由泛复函构造弹性力学平面问题的特解

王 其 申

(安庆师范学院物理系，安庆 246003)

摘要 本文以泛复变函数 (简称泛复函) 为工具，通过引入双调和数，构造出直角坐标和极坐标下平面应力函数的一系列特解. 其中有些是以往文献中尚未出现的.

关键词 泛复变函数，双调和数，平面应力函数

人们一直关注如何构造作为弹性力学平面问题特解的双调和函数 [1], 著名的 Gousat 公式

$$U=\mathrm{Re}\{\bar{z}\varphi(z)+\chi(z)\} \tag{1}$$

给出了由复变解析函数生成双调和函数的实用方法，但它并未完全揭示出双调和函数的内在结构. 在文 [2] 中笔者曾以泛复函为工具，通过引入双调和数，成功地构造出任意正整数阶平面双调和函数族. 与此相仿，本文进一步导出了直角坐标系中相应于基本初等函数的各阶双调和函数，揭示了它们的内在结构. 通过坐标变换，又导出了极坐标下各阶双调和函数的通式. 其中有些超出了文 [1] 所列文献的成果.

1 由泛复函生成平面应力函数

为使以泛复数 $z=x+ky$ 为宗量的泛复函数 $f(z)$ 满足平面双调和方程

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0 \tag{2}$$

非实域的数 k 应满足

$$1+2k^2+k^4=0 \tag{3}$$

称这样的 k 为双调和数. 由泛复函理论 [3], 只要 k 满足 (3) 式，则任意广义解析的函数 $f(z)=f(x+ky)$ 必满足 (2) 式. 同时若记

$$\begin{aligned} f(z)=&\varphi_0(x,y)+k\varphi_1(x,y)\\ &+k^2\varphi_2(x,y)+k^3\varphi_3(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

则 $\varphi_j(j=0,1,2,3)$ 也满足 (2) 式，即 $f(z)$ 的实分蘖都是平面双调和函数.

文献 [3] 、 [4] 已证明，以 $z=x+ky$ 为宗量的基本初等函数 (幂函数、指数函数、三角函数和对数函数) 在其有定义的区域上都是广义解析的. 所以，为了生成平面应力函数，只需对上述函数及其复合函数、导数、积分等进行实分蘖.

注意到调和数 i 满足方程 $i^2+1=0$, 所以调和函数必为双调和函数，而 (4) 式中的 φ_j 满足

$$\varphi_0-\varphi_2=\mathrm{Re}f(x+iy)$$

$$\varphi_1-\varphi_3=\mathrm{Im}f(x+iy)$$

2 直角坐标下的平面应力函数

2.1 整数阶幂函数

根据上述方法，由 $f(z)=z^n(n=0,1,2,\cdots)$, 文 [2] 已经给出直角坐标下多项式型平面应力函数为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{n0}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}(m-1)C_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\\ \varphi_{n1}&=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^{m-1}(m-1)C_n^{2m+1}x^{n-2m-1}\\ &\quad\cdot y^{2m+1}\\ \varphi_{n2}&=\sum_{m=1}^{[n/2]}(-1)^{m-1}mC_n^{2m}x^{n-2m}y^{2m}\\ \varphi_{n3}&=\sum_{m=1}^{[n/2]}(-1)^{m-1}mC_n^{2m+1}x^{n-2m-1}y^{2m+1} \end{aligned}\right\}$$

$$(n=0,1,2,\cdots) \tag{5}$$

并且指出

$$\frac{\partial\varphi_{nj}}{\partial x}=n\varphi_{n-1,j}\quad(j=0,1,2,3;n=1,2,\cdots) \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_{n0}}{\partial y}&=-n\varphi_{n-1,3}\\ \frac{\partial\varphi_{n1}}{\partial y}&=n\varphi_{n-1,0}\\ \frac{\partial\varphi_{n2}}{\partial y}&=n(\varphi_{n-1,1}-2\varphi_{n-1,3})\\ \frac{\partial\varphi_{n3}}{\partial y}&=n\varphi_{n-1,2} \end{aligned}\right\}(n=1,2,\cdots) \tag{7}$$

为将以上结果推广到负整数次幂，引入：

定义 1　对任意泛复数 $z=x+ky$, 若有这样的泛复数 z^* 存在，使得 zz^* 为非负实数 A, 则称 z^* 与 z 共轭，并称 $\sqrt{A}$ 为 z 的模，记作 $|z|$.

由此定义并注意到 (3) 式，不难求得

$$z^*=(x-ky)\left(1+k^2\frac{y^2}{x^2+2y^2}\right) \tag{8}$$

$$|z|=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} \tag{9}$$

于是由 $z^{-n}=z^{*n}/(zz^*)^n$ 导出负整数阶平面应力函数的通式为

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{-n,0}&=\frac{\varphi_{n0}}{(x^2+y^2)^n}+\frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Re}(x+iy)^n\\
\varphi_{-n,1}&=\frac{-\varphi_{n1}}{(x^2+y^2)^n}-\frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Im}(x+iy)^n\\
\varphi_{-n,2}&=\frac{\varphi_{n2}}{(x^2+y^2)^n}+\frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Re}(x+iy)^n\\
\varphi_{-n,3}&=\frac{-\varphi_{n3}}{(x^2+y^2)^n}-\frac{ny^2}{(x^2+y^2)^{n+1}}\mathrm{Im}(x+iy)^n
\end{aligned}\right\} \quad (n=1,2,\cdots) \tag{10}$$

同时，(6)、(7) 两式对负整数的 n 仍然成立.

2.2 指数函数和三角函数

采用人们熟知的幂级数来定义以 $z=x+ky$ 为宗量的指数函数 e^z、三角函数 $\sin z,\cos z$, 通过实分蘖，可以得出

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{e0}&=\mathrm{e}^x(\cos y+y\sin y/2)\\
\varphi_{e1}&=\mathrm{e}^x(3\sin y-y\cos y)/2\\
\varphi_{e2}&=\mathrm{e}^x y\sin y/2\\
\varphi_{e3}&=\mathrm{e}^x(\sin y-y\cos y)/2
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{s0}&=\sin x(\mathrm{ch}y-y\mathrm{sh}y/2)\\
\varphi_{s1}&=\cos x(3\mathrm{sh}y-y\mathrm{ch}y)/2\\
\varphi_{s2}&=\sin x(-y\mathrm{sh}y)/2\\
\varphi_{s3}&=\cos x(\mathrm{sh}y-y\mathrm{ch}y)/2
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{c0}&=\cos x(\mathrm{ch}y-y\mathrm{sh}y/2)\\
\varphi_{c1}&=-\sin x(3\mathrm{sh}y-y\mathrm{ch}y)/2\\
\varphi_{c2}&=\cos x(-y\mathrm{sh}y/2)\\
\varphi_{c3}&=-\sin x(\mathrm{sh}y-y\mathrm{ch}y)/2
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

以上三式等价于给出平面双调和函数族

$\mathrm{e}^x\cos y$, $\mathrm{e}^x\sin y$, $\cos x\mathrm{ch}y$, $\cos x\mathrm{sh}y$,

$\sin x\mathrm{ch}y$, $\sin x\mathrm{sh}y$, $\mathrm{e}^x y\cos y$, $\mathrm{e}^x y\sin y$,

$\cos x\cdot y\mathrm{ch}y$, $\cos x\cdot y\mathrm{sh}y$, $\sin x\cdot y\mathrm{ch}y$, $\sin x\cdot y\mathrm{sh}y$

2.3 对数函数

我们定义指数函数 $\mathrm{e}^w=z$ 的反函数为对数函数，仍然记作 $w=\ln z$. 设

$$\ln z=\varphi_{l0}+k\varphi_{l1}+k^2\varphi_{l2}+k^3\varphi_{l3}$$

代入定义有 $\mathrm{e}^w=\mathrm{e}^{\varphi_{l0}}\mathrm{e}^{k\varphi_{l1}}\mathrm{e}^{k^2\varphi_{l2}}\mathrm{e}^{k^3\varphi_{l3}}=z$, 把后三项作泰勒展开后进行实分蘖，可得 $\varphi_{lj}(j=0,1,2,3)$ 所满足的方程，在相差一常数因子的意义上解得

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{l0}&=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2+y^2}\\
\varphi_{l1}&=\frac{3}{2}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\frac{xy}{x^2+y^2}\\
\varphi_{l2}&=-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2+y^2}\\
\varphi_{l3}&=\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\frac{xy}{x^2+y^2}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

这一结果也可以由积分 $\ln z=\int_{z_0}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{z}$ 进行实分蘖后计算 4 个线积分得到. 以上结果等价于给出平面双调和函数族

$$\ln\sqrt{x^2+y^2},\ \mathrm{arctg}\frac{y}{x},\ \frac{y^2}{x^2+y^2},\ \frac{xy}{x^2+y^2}$$

2.4 一般幂函数

当 $\xi=\alpha+k\beta$ 是任意泛复数时，定义

$$z^{\xi}=\mathrm{e}^{\xi\ln z}=\varphi_{\xi0}+k\varphi_{\xi1}+k^2\varphi_{\xi2}+k^3\varphi_{\xi3} \tag{15}$$

以 $\ln z$ 的分蘖式代入，可得如下实分蘖

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_{\xi_0}&=\mathrm{e}^R\left[(u+1)\cos t+v\sin t\right]\\
\varphi_{\xi_1}&=\mathrm{e}^R\left[(u+\frac{3}{2})\sin t-v\cos t\right]\\
\varphi_{\xi_2}&=\mathrm{e}^R\left[u\cos t+v\sin t\right]\\
\varphi_{\xi_3}&=\mathrm{e}^R\left[(u+\frac{1}{2})\sin t-v\cos t\right]
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
R&=\alpha\ln\sqrt{x^2+y^2}-\beta\mathrm{arctg}\frac{y}{x}\\
t&=\alpha\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+\beta\ln\sqrt{x^2+y^2}
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\alpha}{2}\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{\beta}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\frac{xy}{x^2+y^2}\right) \\
v &= \frac{\alpha}{2}\frac{xy}{x^2+y^2}+\frac{\beta}{2}\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{18}
$$

3 极坐标下的平面应力函数

上节导出的 (5)、(10)、(14)、(16) 式相当复杂，很难记忆．如果利用坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 把它们转化到极坐标中，情况大为改观．即

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{n0} &= \frac{n\cos(n-2)\theta+(4-n)\cos n\theta}{4}r^n \\
\varphi_{n1} &= \frac{n\sin(n-2)\theta+(6-n)\sin n\theta}{4}r^n \\
\varphi_{n2} &= \frac{n\cos(n-2)\theta-n\cos n\theta}{4}r^n \\
\varphi_{n3} &= \frac{n\sin(n-2)\theta+(2-n)\sin n\theta}{4}r^n
\end{aligned}\right\}
\quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{19}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{l0} &= \ln r-\frac{1}{2}\sin^2\theta, \quad \varphi_{l1}=\frac{3}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta, \\
\varphi_{l2} &= -\frac{1}{2}\sin^2\theta, \quad \varphi_{l3}=\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{20}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi_{\xi0} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}\left[(u+1)\cos t+v\sin t\right] \\
\varphi_{\xi1} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}\left[\left(u+\frac{3}{2}\right)\sin t-v\cos t\right] \\
\varphi_{\xi2} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}\left[u\cos t+v\sin t\right] \\
\varphi_{\xi3} &= r^\alpha e^{-\beta\theta}\left[\left(u+\frac{1}{2}\right)\sin t-v\cos t\right]
\end{aligned}\right\} \tag{21}
$$

只是此时

$$
t=\alpha\theta+\beta\ln r \tag{22}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{\alpha}{2}\sin^2\theta+\frac{\beta}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta) \\
v &= \frac{\alpha}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{\beta}{2}(\ln r+\sin^2\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{23}
$$

(19)、(20) 式等价于给出双调和函数族：$\ln r, \theta, r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta, r^n\cos(n-2)\theta, r^n\sin(n-2)\theta (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 至于 (21) 式，还可以分别讨论 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 的特殊情况，从而给出一系列重要的双调和函数．限于篇幅，具体讨论从略．

4 结束语

通过对以上基本初等函数的和差积商及其有限次复合而成的初等函数乃至它们的导数、积分进行实分蘖，本文所获得的双调和函数族还可以大为扩充．这表明，以泛复函为工具构造平面应力函数是切实可行的．

参 考 文 献

1 丁皓江，王敏中．在极坐标中构造平面弹性力学特解的一种方法．力学与实践，1982(1): 68–69

2 王其申．多项式型平面应力函数及其应用．力学与实践，1990(3): 29–33

3 熊锡金．泛复变函数．武汉大学学报，1980(1): 26–39, 1981,(4): 31–38

4 熊锡金．泛复变函数及其在数学和物理中的应用．长春：东北师大出版社，1988

(1994 年 8 月 29 日收到第 1 稿，
1994 年 12 月 2 日收到修改稿)

(上接第 55 页)

2 Sui Yunkang et al. Relevant theories and numerical methods of the curvilinear search. 数学研究与评论，1995, 15(3)

3 隋允康等．曲线寻优的收敛性和近似解析解法．大连理工大学学报，1995, 35(3)

4 Fleury C. Structural weight optimization by dual method of convex programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14: 1761–1781

5 钱令希．工程结构优化设计．北京：水力电力出版社，1983

6 Schmit L A, Farshi B. Some approximation concepts for strutural synthesis. *AIAA J*, 1974, 12(5): 692–699

7 Venkayya G N. Design of optimum structures. *Computers and Structures*, 1977, 1(1–2): 265–269

8 钱令希，钟万勰，隋允康，张近东．多单元、多工况、多约束的结构优化设计．大连工学院学报，1980, 19(4): 1–17

9 Berke L, Khot N S. Use of optimility criteria methods for large scale systems. AGARD Lectures Series No.70, Structure Optimization, 1974: 1–29

(1994 年 11 月 13 日收到第 1 稿，
1995 年 1 月 17 日收到修改稿)