

产事故的原因是：在设计阶段未能正确计算过渡过程中平衡锤的运动规律，尤其是最大偏移量。

因此，笔者运用前面所述理论以神府机的空车起动进行了分析计算。图5、图6分别为平衡锤和驱动滚筒的动力响应曲线，它们与实际的运动情况相吻合。从图5可以看出，平衡锤的最大偏移量为2.6m，比实测值2.2m稍大，误差为18%。

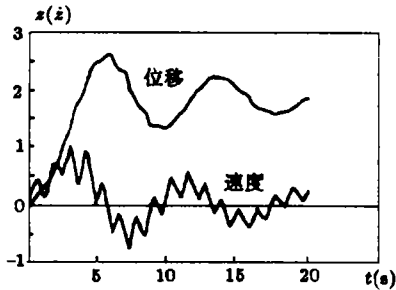


图5 平衡锤动力响应曲线

计算误差的产生不完全是方法本身的原因，也与下列因素有关：(1) 神府机有 $-8^\circ \sim 3^\circ$ 的弧形段。(2) 上下托辊间距不等，它们在输送带上的等效质量并不相同。(3) 起动力矩很复杂，不是简单地按某一折线输出。(4) 有些结构参数查表所得，

如钢丝绳芯弹性模量 E 等。

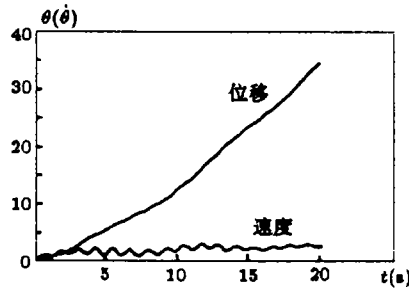


图6 驱动滚筒动力响应曲线

参考文献

- 1 谢献忠. 带式输送机在起、制动过程中张紧装置的瞬态响应. 硕士论文, 1994
- 2 南京工学院编. 数学物理方程与特殊函数. 北京: 高等教育出版社, 1982
- 3 凌复华等. 常微分方程数值方法及其在力学中的应用. 重庆: 重庆大学出版社, 1990
- 4 Harrison A. Stress front velocity in elastomer belts with bonded steel cable reinforcement. *Bulk Solids Handling*, 1986(1)

(本文于1994年12月12日收到)

桁架结构优化的曲线寻优数值方法¹⁾

隋允康 郭英乔* 聂宗泉 叶宝瑞 王文军

(大连理工大学, 大连 116023)

摘要 在结构优化设计领域中，首次将曲线寻优理论中的数值解法应用于桁架结构的优化过程，本文针对相应的优化模型，基于对偶规划，推导了曲线寻优算法所依赖的公式，编制了微机上的程序，算例表明曲线寻优的数值解法取得了快而稳的满意结果。

关键词 结构最优化，数值积分，曲线寻优

结构优化算法依赖于数学规划，因而都是直线上寻优过程的交替，文[1,2]揭示的曲线寻优在效率

与稳定性上皆优于传统的直线寻优。本文首次将曲线寻优的数值方法用于桁架静力优化设计，取得了满意的结果。

这一问题的数学模型为^[3]

$$\begin{cases} W = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i \rightarrow \min \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n \tau_{ij} / A_i \leq \bar{u}_j \quad (j = 1, \dots, J) \\ \underline{A}_i \leq A_i \leq \bar{A}_i \quad (i = 1, \dots, n) \end{cases} \quad (1)$$

¹⁾ 国家自然科学基金资助课题。

* 法国贡比涅技术大学工程力学系。

其对偶规划为

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda) &\rightarrow \max (\lambda \in E^J) \\ \text{s.t. } \lambda &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中

$$\varphi(\lambda) = \min_{\underline{A}_i \leq A_i \leq \bar{A}_i} \left\{ L(A, \lambda) = \sum_{i=1}^n \rho_i l_i A_i + \sum_{j=1}^J \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \tau_{ij} / A_i - \bar{u}_j \right) \right\} \quad (3)$$

式(3)的 Kuhn-Tucker 条件为

$$\left. \begin{aligned} \partial L(A, \lambda) / \partial A_i \Big|_{A=A^*} &\leq 0 \quad (A_i^* = \bar{A}_i) \\ &= 0 \quad (\underline{A}_i < A_i^* < \bar{A}_i) \\ &\geq 0 \quad (A_i^* = \underline{A}_i) \end{aligned} \right\}$$

由此得

$$\bar{A}_i = \begin{cases} \bar{A}_i, & \text{若 } \sum_{j=1}^J \tau_{ij} \lambda_j \geq \rho_i l_i (\bar{A}_i)^2 \\ \left(\sum_{j=1}^J \tau_{ij} \lambda_j / (\rho_i l_i) \right)^{1/2}, & \\ \underline{A}_i, & \text{若 } \rho_i l_i (\underline{A}_i)^2 < \sum_{j=1}^J \tau_{ij} \lambda_j < \rho_i l_i (\bar{A}_i)^2 \\ \underline{A}_i, & \text{若 } \sum_{j=1}^J \tau_{ij} \lambda_j \leq \rho_i l_i (\underline{A}_i)^2 \end{cases} \quad (4)$$

根据(3)、(4)可推出

$$\partial \varphi / \partial \lambda_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ij} / A_i^*(\lambda) - \bar{u}_j \quad (5)$$

以上亦为直线寻优所用^[4], 对于曲线寻优, 我们导出 $\varphi(\lambda)$ 目标值上升的寻优曲线 $\lambda = \lambda(t) (t \in E')$, 它满足如下常微分方程组^[1,2]

$$\begin{aligned} d\lambda_j / dt &= \partial \varphi(\lambda) / \partial \lambda_j / \|\nabla \varphi(\lambda)\| \\ &\quad (j = 1, \dots, J) \end{aligned} \quad (6)$$

将式(5)代入式(6)得

$$\begin{aligned} d\lambda_j / dt &= \sum_{i=1}^n (\tau_{ij} / A_i^*(\lambda) - \bar{u}_j) \\ &\quad / \left[\sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^n \tau_{ij} / A_i^*(\lambda) - \bar{u}_j \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\quad (j = 1, \dots, J) \end{aligned} \quad (7)$$

若从式(7)解出上升曲线 $\lambda = \lambda(t)$, 代入式(2), 便成为一维搜索

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\lambda(t)) &\rightarrow \max (t \rightarrow E') \\ \text{s.t. } \lambda(t) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

解式(7)有近似解析与数值两种途径, 本文是对后一途径的探讨. 实际上, 这恰好对应于在离散点上进行的一维搜索. 式(8)的寻优过程中总要确定某个数量 t 对应的向量 $\lambda = \lambda(t)$, 亦即完成 $t \rightarrow \lambda$ 的映射算法, 也可写成

$$\lambda_j^{(\nu+1)} = \lambda_j^{(\nu)} + \sum_{j=1}^J d\lambda_j / dt \Big|_{t=t^{(\nu)}} \Delta t^{(j)} \quad (j = 1, \dots, J) \quad (9)$$

具体可按 Euler 法、Runge-Kutta 法或 Adams 法计算.

一维搜索可按调线法或切线法解之

$$t^{(\nu+1)} = \left(t_2^{(\nu)} \varphi'(t_1^{(\nu)}) - t_1^{(\nu)} \varphi'(t_2^{(\nu)}) \right) / \left(\varphi'(t_1^{(\nu)}) - \varphi'(t_2^{(\nu)}) \right) \quad (10)$$

$$t^{(\nu+1)} = t^{(\nu)} - \varphi'(t^{(\nu)}) / \varphi''(t^{(\nu)}) \quad (11)$$

为了计算 $\varphi''(t)$, 根据式(4)得

$$\partial A_i^*(\lambda) / \partial \lambda_j = \begin{cases} \tau_{ij} / (2\rho_i l_i A_i^*) & (\text{当 } i \in \bar{n}) \\ 0 & (\text{当 } i \notin \bar{n}) \end{cases} \quad (12)$$

式中

$$\bar{n} = \left\{ i \mid \underline{A}_i < A_i^* < \bar{A}_i \quad (i = 1, \dots, n) \right\} \quad (13)$$

可以导出式(10)、(11)所需的一、二阶导数

$$\varphi'(t) = \sum_{j=1}^J \partial \varphi / \partial \lambda_j \cdot d\lambda_j / dt = \left[\sum_{j=1}^J u_j^2(A^*) \right]^{1/2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= - \sum_{k=1}^J \sum_{j=1}^J \left[u_j(A^*) u_k(A^*) \left(\sum_{j=1}^J u_j^2(A^*) \right)^{-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. \sum_{i \in \bar{n}} \tau_{ij} \tau_{ik} / (2\rho_i l_i A_i^{*3}) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$u_j(A^*) = \sum_{i=1}^n \tau_{ij} / A_i^*(\lambda) - \bar{u}_j \quad (16)$$

根据上述公式, 编制了桁架结构曲线寻优数值解法通用程序, 程序实现时采用了设计变量连续与

约束删除技术. 大量算例表明本文方法的有效性
与稳定性.

例 1 10 杆平面桁架¹⁾(图 1)

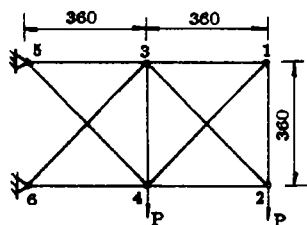


图 1 10 杆平面桁架

此例有 6 个节点, 10 个设计变量, 在 2,4 节点有 $P = 10^5$ 向下的载荷. 许用应力 $\sigma^* = \pm 25000$, 弹性模量 $E = 10^7$, 材料容重 $\rho = 0.1$, 节点 1,2,3,4 有 ± 0.2 垂直方向位移约束. 表 1 给出的几种方法的比较表明本文方法效果较好.

表 1 10 杆桁架各种方法的结果比较

杆件号	杆件最后面积			
	文献 [6]	文献 [7]	文献 [8]	本文
1	33.432	30.416	30.902	31.03
2	0.100	0.128	0.100	0.10
3	24.260	23.408	23.545	22.68
4	14.260	14.904	14.960	15.29
5	0.100	0.101	0.100	0.10
6	0.100	0.101	0.297	0.65
7	8.338	8.696	7.611	5.80
8	20.740	21.084	21.275	21.79
9	19.690	21.077	21.156	21.62
10	0.100	0.186	0.100	0.10
结构重量	5089.0	5048.9	5069.4	5026.0
重分析次数	24	26	11	10

例 2 72 杆空间桁架 (图 2)

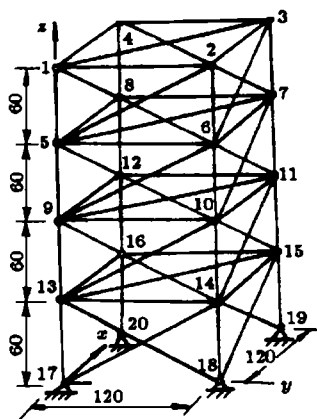


图 2 72 杆空间桁架

杆件分组和荷载作用情况详见表 2 和表 3.

表 2 72 杆杆件分组

杆类	杆号
1	1-5, 2-6, 3-7, 4-8
2	1-6, 2-5, 2-7, 3-6, 3-8, 4-7, 1-8, 4-5
3	1-2, 2-3, 3-4, 1-4
4	1-3, 2-4
5	5-9, 6-10, 7-11, 8-12
6	5-10, 6-9, 6-11, 7-10, 7-12, 8-11, 5-12, 8-9
7	5-6, 6-7, 7-8, 5-8
8	5-7, 6-8
9	9-13, 10-14, 11-15, 12-16
10	9-14, 10-13, 10-15, 11-14, 11-16, 12-15, 9-16, 12-13
11	9-10, 10-11, 11-12, 9-12
12	9-11, 10-12
13	13-17, 14-18, 15-19, 16-20
14	13-18, 14-17, 14-19, 15-18, 15-20, 16-19, 13-20, 16-17
15	13-14, 14-15, 15-16, 13-16
16	13-15, 14-16

顶部 4 个节点在三个方向的位移均不超过 ± 0.25 , 各杆截面积下限均为 0.1, 许用应力 $\sigma^* = \pm 25000$, 弹性模量 $E = 10^7$, 材料容重 $\rho = 0.1$, 表 4 给出的几种方法的比较再次表明本文方法的效率.

我们的程序还计算了 4 杆空间桁架、6 杆平面桁架、25 杆输电塔架的算例, 均较其它方法收敛快而稳, 限于本文篇幅不一列举了.

表 3 72 杆荷载工况

工况	结点	P_x	P_y	P_z
1	1	5K	5K	-5K
	1	0	0	-5K
2	2	0	0	-5K
	3	0	0	-5K
	4	0	0	-5K

表 4 72 杆桁架各种方法的结果比较

方法	文献 [6]	文献 [7]	文献 [9]	文献 [8]	本文
结构重量	388.63	381.20	379.67	379.62	363.40
重分析次数	22	12	5	8	4

参 考 文 献

1 隋允康等. 基于目标流线的曲线方向寻优. 数学研究与评论, 1991, 11(2): 285-289

(下转第 58 页)

¹⁾ 国外文献中例 1、2 均取英制单位, 为了便于比较, 不换算为国际单位制了, 仅略掉原单位.

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\alpha}{2} \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{\beta}{2} \left(\arctg \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2+y^2} \right) \\ v &= \frac{\alpha}{2} \frac{xy}{x^2+y^2} + \frac{\beta}{2} \left(\ln \sqrt{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$t = \alpha\theta + \beta \ln r \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{\alpha}{2} \sin^2 \theta + \frac{\beta}{2} (\theta + \sin \theta \cos \theta) \\ v &= \frac{\alpha}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{\beta}{2} (\ln r + \sin^2 \theta) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

3 极坐标下的平面应力函数

上节导出的(5)、(10)、(14)、(16)式相当复杂, 很难记忆. 如果利用坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 把它们转化到极坐标中, 情况大为改观. 即

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n0} &= \frac{n \cos(n-2)\theta + (4-n) \cos n\theta}{4} r^n \\ \varphi_{n1} &= \frac{n \sin(n-2)\theta + (6-n) \sin n\theta}{4} r^n \\ \varphi_{n2} &= \frac{n \cos(n-2)\theta - n \cos n\theta}{4} r^n \\ \varphi_{n3} &= \frac{n \sin(n-2)\theta + (2-n) \sin n\theta}{4} r^n \end{aligned} \right\} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{10} &= \ln r - \frac{1}{2} \sin^2 \theta, & \varphi_{11} &= \frac{3}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta, \\ \varphi_{12} &= -\frac{1}{2} \sin^2 \theta, & \varphi_{13} &= \frac{1}{2} \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\xi 0} &= r^\alpha e^{-\beta \theta} \left[(u+1) \cos t + v \sin t \right] \\ \varphi_{\xi 1} &= r^\alpha e^{-\beta \theta} \left[\left(u + \frac{3}{2} \right) \sin t - v \cos t \right] \\ \varphi_{\xi 2} &= r^\alpha e^{-\beta \theta} \left[u \cos t + v \sin t \right] \\ \varphi_{\xi 3} &= r^\alpha e^{-\beta \theta} \left[\left(u + \frac{1}{2} \right) \sin t - v \cos t \right] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

只是此时

(19)、(20)式等价于给出双调和函数族:
 $\ln r, \theta, r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta, r^n \cos(n-2)\theta, r^n \sin(n-2)\theta$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 至于(21)式, 还可以分别讨论 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 的特殊情况, 从而给出一系列重要的双调和函数. 限于篇幅, 具体讨论从略.

4 结束语

通过对以上基本初等函数的和差积商及其有限次复合而成的初等函数乃至它们的导数、积分进行实分乘, 本文所获得的双调和函数族还可以大为扩充. 这表明, 以泛复函为工具构造平面应力函数是切实可行的.

参 考 文 献

- 1 丁皓江, 王敏中. 在极坐标中构造平面弹性力学特解的一种方法. 力学与实践, 1982(1): 68-69
- 2 王其申. 多项式型平面应力函数及其应用. 力学与实践, 1990(3): 29-33
- 3 熊锡金. 泛复变函数. 武汉大学学报, 1980(1): 26-39, 1981(4): 31-38
- 4 熊锡金. 泛复变函数及其在数学和物理中的应用. 长春: 东北师大出版社, 1988

(1994年8月29日收到第1稿,
 1994年12月2日收到修改稿)

(上接第55页)

- 2 Sui Yunkang et al. Relevant theories and numerical methods of the curvilinear search. 数学研究与评论, 1995, 15(3)
- 3 隋允康等. 曲线寻优的收敛性和近似解析解法. 大连理工大学学报, 1995, 35(3)
- 4 Fleury C. Structural weight optimization by dual method of convex programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14: 1761-1781
- 5 钱令希. 工程结构优化设计. 北京: 水力电力出版社, 1983
- 6 Schmit L A, Farshi B. Some approximation concepts

- for structural synthesis. *AIAA J*, 1974, 12(5): 692-699
- 7 Venkayya G N. Design of optimum structures. *Computers and Structures*, 1977, 1(1-2): 265-269
- 8 钱令希, 钟万镒, 隋允康, 张近东. 多单元、多工况、多约束的结构优化设计. 大连工学院学报, 1980, 19(4): 1-17
- 9 Berke L, Khot N S. Use of optimality criteria methods for large scale systems. AGARD Lectures Series No.70, Structure Optimization, 1974: 1-29

(1994年11月13日收到第1稿,
 1995年1月17日收到修改稿)