

结构力学中支座沉陷问题 虚功方程的补充

刘 刚

(武汉交通科技大学, 武汉 430063)

在结构力学中, 求支座沉陷下静定结构某点的位移时, 都应用了由虚功方程导出的公式^[1]

$$\Delta_{k_j} = -\sum \bar{R}_i C_i \quad (1)$$

式中, Δ_{k_j} 为静定结构 k 点上沿 j 向的位移; \bar{R}_i 为在该结构的 k 点上沿 j 向加一单位载荷后在支座 i 内产生的反力; C_i 为该结构中 \bar{R}_i 相对应的支座沉陷量; 若 C_i 与 \bar{R}_i 反向, 两者乘积取负号。

但式(1)应用于非微小位移的支座沉陷问题时存在着不足. 如图1所示, 由式(1)求出的 B 点的垂直位移 $\Delta_{BV} = -[1 \cdot (-b)] = b$, 但因支座的沉陷而产生的静定结构的位移属于刚体位移, 所以用几何关系(参见图1(b))可求得 $\Delta_{BV} = b + l(1 - \cos \varphi)$, 与式(1)的结果相差 $l(1 - \cos \varphi)$. 当 $a = 0, b = 0, \varphi = \pi/2$ 时, B 点实际的垂直位移为 l , 而用式(1)得出 $\Delta_{BV} = 0$; 又如图2所示的例子, 用式(1)得出 C 点的垂直位移 $\Delta_{CV} = b$, B 点的水平位移 $\Delta_{BH} = 0$, 而用几何关系(参见图2(b))可求得 $\Delta_{CV} = b + h[1 - \sqrt{1 - (b/l)^2}]$, 当 $b < l$ 时, 图2(b)形态存在, Δ_{CV} 有解且 $\Delta_{CV} > b$; 同理 $\Delta_{BH} = l[1 - \sqrt{1 - (b/l)^2}] > 0$. 由此可见, 式(1)确实存在着局限性, 其原因在于由虚功方程得出的一切位移公式是仅对微小位移(变形)才能成立的方程, 而支座沉陷问题已不仅仅是微小位移问题

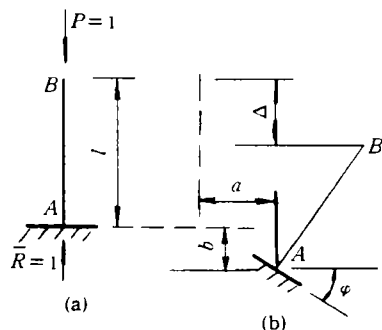


图1 支座沉陷示意图

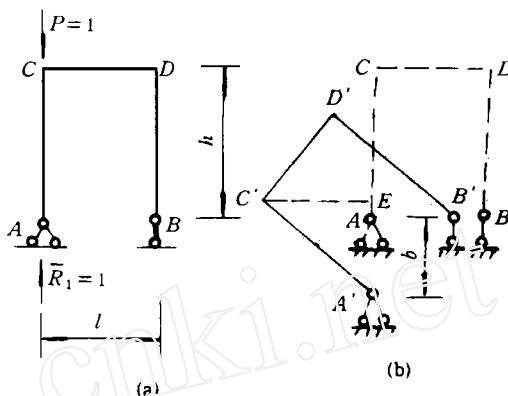


图2 支座沉陷的刚架位移简图

了, 所以仍用式(1), 自然就会出现文中所说的不足和问题. 能否仍以虚功方程的体系而不是几何关系来推导出新的位移公式呢? 本文将就此讨论并给出肯定的答案.

新公式的推导

笔者认为, 从广义虚功的角度看, 当结构由初始状态(图1(a)或图2(a))逐步达到最终状态时(图1(b)或图2(b)), 相应的虚功也在发生着变化.

以图3作为最基本的情况分析, 初始状态如图3(a)所示, 结构支座沉陷中的某一状态如图3(b)所示. 设此时支座沉陷的水平量为 x , 竖直量为 y , 转角为 θ ; 在 $P = 1$ 作用下的支座反力为 \bar{X}_i 、 \bar{Y}_i 和 \bar{M}_i . 在接下去的一个微沉陷过程中 (B 点由 B_1 到 B_2), 支座沉陷的水平微量为 dx , 竖直微量为 dy , 微转角为 $d\theta$, 结构中某点的位移为 $d\Delta_{k_j}$, 在这个过程中, 可认为 \bar{X}_i 、 \bar{Y}_i 和 \bar{M}_i 不变, 所以微外力虚功为 $dT = 1 \cdot d\Delta_{k_j} + \bar{X}_i dx + \bar{Y}_i dy + \bar{M}_i d\theta$, 又因每一沉陷过程的内力虚功为零, 由虚功原理得虚功方程

$$d\Delta_{k_j} + \bar{X}_i dx + \bar{Y}_i dy + \bar{M}_i d\theta = 0$$

即

$$d\Delta_{k_j} = -(\bar{X}_i dx + \bar{Y}_i dy + \bar{M}_i d\theta)$$

对全过程积分, 考虑结构有多个杆件, 所以

$$\Delta_{k_j} = - \sum \left(\int_0^a \bar{X}_i dx + \int_0^b \bar{Y}_i dy + \int_0^\varphi \bar{M}_i d\theta \right) \quad (2)$$

式(2)就是从虚功方程的角度出发而推导出的支座沉陷问题的新的位移公式. 式中的 a 、 b 和 φ 是支座沉陷的最终量, 其它符号含义同前, 若反力的实际方向与沉陷方向相反, 积分号内的乘积取负号. 因为在式(2)的推导过程中, 对支座沉陷量及结构形式无限制, 所以式(2)对任何支座沉陷量和任一

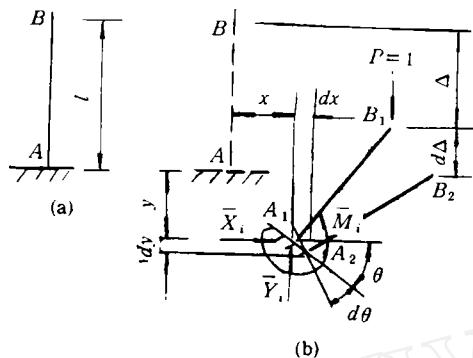


图3 示意图

静定结构形式均是适用的, 且为精确解.

用式(2)对图1所示的情况进行检验, 在任一沉陷位置, $\bar{X}_i = 0, \bar{Y}_i = 1, \bar{M}_i = l \cdot \sin \theta$, 因 y 与 \bar{Y}_i 、 θ 与 \bar{M}_i 反向, 故

$$\begin{aligned} \Delta_{BV} &= - \left[\int_0^b (-1) dy + \int_0^\varphi (-l \cdot \sin \theta) d\theta \right] \\ &= b + l(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

这与按刚体位移的几何关系推导出的结果完全一致; 再假设 $a = 0, b = 0, \varphi = \pi/2$, 由式(2)得出 $\Delta_{BV} = l$, 这与实际情况也相同.

同理, 用式(2)对图2所示的情况求解其 Δ_{CV} 和 Δ_{BH} , 可得到与实际情况完全相同的结果, 限于篇幅, 本文不再赘述.

参 考 文 献

- 1 余崇义. 结构力学. 北京: 人民交通出版社, 1987
(1993年12月13日收到第1稿,
1994年2月20日收到修改稿)

用分析温度场的程序计算 定常无旋流动

郑 作 昌

(北京大学力学系, 北京 100871)

目前流行的用于热传导分析的计算机程序很多, 如 ADINAT, SAP5-T 等. 但它们的能力却远远超出了分析热传导问题. 本文通过分析热传导问题与其它一些连续场问题在数学上的等价性, 而把它们直接用于一些非温度场问题的分析.

温度场程序能求解的热传导定解问题是

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & = c \frac{\partial u}{\partial t} - f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 内} \\ & u|_{S_1} = g_1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = g_2, \\ & \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_3} = h(g_3 - u^S), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g_4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, Ω 是有界开区域, $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, n 是边界外法向, u 是温度函数; $u^S = u|_{S_3}$, g_1, g_2, g_3, g_4, f 是已知函数, h, c, k_1, k_2, k_3 是已知函数, 可与 u 有关.

定解问题式(1)的非线性可出现在方程和边界条件中, 在 $c \neq 0$ 时还是初值问题. 为了既经济又有效地选择时间步长, 有的温度计算程序如 ADINAT 还编入了求解广义特征值问题的特征解程序.

若给温度函数 u 赋予不同的物理意义, 定解问题式(1)除可以描述热传导问题外还可描述自然界中许多现象. 一个重要的例子就是自然界中普遍存在的扩散现象. 引入与温度相当的相似变量后其它一些场问题与热传导问题在数学上是等价的. 这样