# 用加权残值法求压杆的临界载荷

刘 悦 藏

(河北工学院材料力学教研室，天津 300132)

加权残值法是一种求解微分方程的方法. 它不是严格地求微分方程的解析解，而是直接从微分方程得出问题的近似解. 与其它数值法相比，它没有完全抛弃已有的理论解. 由于此法原理简单、方法简便、计算工作量小，因此，在流体力学、热传导学、化学工程及结构分析等方面得到广泛应用. 国内自 70 年代后期开展此法研究以来，发展很快，正在形成计算力学的一个重要分支.

本文将加权残值法应用于材料力学中求压杆的临界载荷. 实践证明，运用此法求解临界载荷，简便宜行，精确度高.

## 1 加权残值法的分类方法

加权残值法的分类方法有几种. 其中一个重要的分类方法是按权函数的形式进行分类. 据此，加权残值法分为 5 种基本方法. 见表 1.

表 1 加权残值法的 5 种基本方法

| 方法名称 | 消除残值的方程式 | 权函数 | 附注 |
|---|---|---|---|
| 配点法 | $\int_v R\delta(x-x_j)\mathrm{d}v = R\|_{x=x_j}=0$ | $\delta(x-x_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ | $x_j$ 为配点 |
| 子域法 | $\int_{v_j} R\mathrm{d}v_j=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$ | $w_j=\begin{cases}1,(v_j内)\\0,(v_j外)\end{cases}$ | 将 $v$ 分为 $n$ 个子域 |
| 矩量法 | $\int_v Rx^j\mathrm{d}v=0$ | $x^j,(j=0,1,2,\cdots,n-1)$ | |
| 伽辽金法 | $\int_v RN_j\mathrm{d}v=0$ | $N_j,(j=1,2,\cdots,n)$ | $\tilde{u}=\sum_{j=1}^{n}c_jN_j$ |
| 最小二乘法 | $\int_v R\frac{\partial R}{\partial c_j}\mathrm{d}v=0$ | $\frac{\partial R}{\partial c_j},(j=1,2,\cdots,n)$ | |

## 2 用加权残值法求压杆的临界载荷

**例 1** 求图 1 两端铰支等截面细长压杆的临界力 $P_{cr}$.

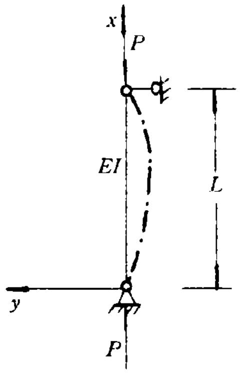


图 1

**解** 建立压杆的控制方程为

$$y''+k^2y=0$$

式中 $k^2=\frac{P_{cr}}{EI}$

选择满足边界条件的试函数为

$$\tilde{y}=c(x^4-2lx^3+l^3x)$$

将试函数代入控制方程得残值方程

$$R=c\left[12x^2-12lx+k^2(x^4-2lx^3+l^3x)\right]$$

用不同方法确定待定参数：

(1) 配点法 配点 $x=\frac{l}{3}$

将 $x=\dfrac{l}{3}$ 代入残值方程 $R=0$

得

$$k^2=\frac{9.82}{l^2}$$

(2) 子域法

$$\int_0^l R\mathrm{d}x=\int_0^l c\big[12x^2-12lx+k^2(x^4-2lx^3+l^3x)\big]\mathrm{d}x=0$$

得

$$k^2=\frac{10}{l^2}$$

(3) 矩量法

$$\int_0^l Rx^0\mathrm{d}x=\int_0^l c\big[12x^2-12lx+k^2(x^4-2lx^3+l^3x)\big]\mathrm{d}x=0$$

得

$$k^2=\frac{10}{l^2}$$

(4) 伽辽金法

$$\int_0^l RN_j\mathrm{d}x=\int_0^l c\big[12x^2-12lx+k^2(x^4-2lx^3+l^3x)\big]\cdot(x^4-2lx^3+l^3x)\mathrm{d}x=0$$

得

$$k^2=\frac{9.87}{l^2}$$

(5) 最小二乘法

$$\int_0^l R\frac{\partial R}{\partial c}\mathrm{d}x=\int_0^l c\big[12x^2-12lx+k^2(x^4-2lx^3+l^3x)\big]\cdot\big[12x^2-12lx+k^2(x^4-2lx^3+l^3x)\big]\mathrm{d}x=0$$

化简

$$49k^4l^4-97k^2l^2+480=0$$

得

$$k^2=\begin{cases}\dfrac{10}{l^2}\\[2mm]\dfrac{9.8}{l^2}\end{cases}\quad\left(取\ k^2=\frac{9.8}{l^2}\right)$$

**表 2 采用 5 种方法计算 $P_{cr}$ 的结果比较**

| 方法 | 计算结果 | 精确解 (取 $\pi=3.14$) | 误差 (%) |
| --- | --- | --- | --- |
| 配点法 | $9.82EI/l^2$ | $9.86EI/l^2$ | 0.4 |
| 子域法 | $10EI/l^2$ | $9.86EI/l^2$ | 1.42 |
| 矩量法 | $10EI/l^2$ | $9.86EI/l^2$ | 1.42 |
| 伽辽金法 | $9.87EI/l^2$ | $9.86EI/l^2$ | 0.1 |
| 最小二乘法 | $9.8EI/l^2$ | $9.86EI/l^2$ | 0.6 |

注：压杆的临界力 $P_{cr}=k^2EI$

**例 2** 求图 2 两端铰支变截面细长压杆的临界力 $P_{cr}$.

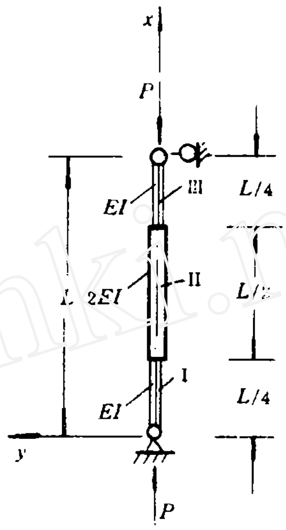


图 2

**解** 建立压杆的控制方程为

$$y''+k^2y=0$$

式中 $k_1^2=k_3^2=\dfrac{P_{cr}}{EI}$, $k_2^2=\dfrac{P_{cr}}{2EI}$.

选择满足边界条件的整杆的试函数为

$$\tilde{y}=c_1\sin\frac{\pi x}{l}+c_2\sin\frac{3\pi x}{l}$$

将试函数代入控制方程得残值方程

$$R_{\mathrm{I}}=\Big(-\frac{\pi^2}{l^2}+k_1^2\Big)c_1\sin\frac{\pi x}{l}+\Big(-\frac{9\pi^2}{l^2}+k_1^2\Big)c_2\sin\frac{3\pi x}{l}$$

$$R_{\mathrm{II}}=\Big(-\frac{\pi^2}{l^2}+k_2^2\Big)c_1\sin\frac{\pi x}{l}+\Big(-\frac{9\pi^2}{l^2}+k_2^2\Big)c_2\sin\frac{3\pi x}{l}$$

$$R_{\mathrm{III}}=R_{\mathrm{I}}$$

用子域法确定待定参数.

由于压杆受力情况和结构的对称性，所以只考虑一半压杆即可.

将压杆分为 $(0 \le x \le \frac{l}{4})$ 和 $(\frac{l}{4} \le x \le \frac{l}{2})$ 两个子域，则

$$\int_0^{l/4} R_{\mathrm{I}} \mathrm{d}x = \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{l/4}^{l/2} R_{\mathrm{II}} \mathrm{d}x = \mathrm{d}x = 0$$

整理得

$$\left.\begin{aligned} &3\left(-\frac{\pi^3}{l^3}+\frac{\pi}{l}k_1^2\right)c_1 + 17.1\left(-\frac{27\pi^3}{l^3} + \frac{3\pi}{l}k_1^2\right)c_2 = 0 \\ &\left(-\frac{\pi^3}{l^3}+\frac{\pi}{l}k_2^2\right)c_1 + \left(\frac{27\pi^3}{l^3}-\frac{3\pi}{l}k_2^2\right)c_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 3\left(-\frac{\pi^3}{l^3}+\frac{\pi}{l}k_1^2\right) & 17.1\left(-\frac{27\pi^3}{l^3}+\frac{3\pi}{l}k_1^2\right) \\ \left(-\frac{\pi^3}{l^3}+\frac{\pi}{l}k_2^2\right) & \left(\frac{27\pi^3}{l^3}-\frac{3\pi}{l}k_2^2\right) \end{vmatrix} = 0$$

得

$$k_2^2 = \begin{cases} 5.24\dfrac{\pi^2}{l^2} \\ 0.857\dfrac{\pi^2}{l^2} \end{cases} \quad (取\ k_2^2 = 0.857\frac{\pi^2}{l^2})$$

其临界力为 $P_{\mathrm{cr}} = 2k_2^2 EI = \dfrac{1.71\pi^2 EI}{l^2}$，与精确解 $P_{\mathrm{cr}} = \dfrac{1.68\pi^2 EI}{l^2}$ 比较，误差为 2.0%.

**例 3** 求图 3 一端固定，另一端自由的等截面细长压杆的临界力 $P_{\mathrm{cr}}$.

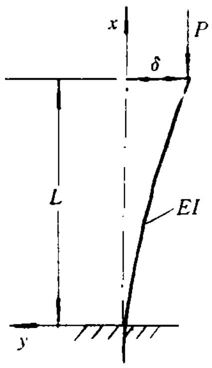


图 3

**解** 建立压杆的控制方程为

$$y'' + k^2 y = k^2 \delta$$

式中 $k^2 = \dfrac{P_{\mathrm{cr}}}{EI}$.

选择满足边界条件的试函数为

$$\tilde{y} = \frac{\delta}{2l^3}(3lx^2 - x^3)$$

将试函数代入控制方程得残值方程

$$R = \frac{3\delta}{l^3}(l-x) + k^2\left[\frac{\delta}{2l^3}(3lx^2 - x^3)\right] - k^2\delta = 0$$

用矩量法确定待定参数

$$\int_0^l R x^0 \mathrm{d}x = \int_0^l \left\{\frac{3\delta}{l^3}(l-x) + k^2\left[\frac{\delta}{2l^3}(3lx^2 - x^3)\right] - k^2\delta\right\}\mathrm{d}x = 0$$

得

$$k^2 = \frac{2.4}{l^2}$$

临界力为 $P_{\mathrm{cr}} = k^2 EI = \dfrac{2.4EI}{l^2}$，与精确解 $P_{\mathrm{cr}} = \dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$ 比较，其误差为 2.4%.

**例 4** 求图 4 等截面细长压杆由于自重引起杆件失稳时的临界自重 $q_{\mathrm{cr}}$.

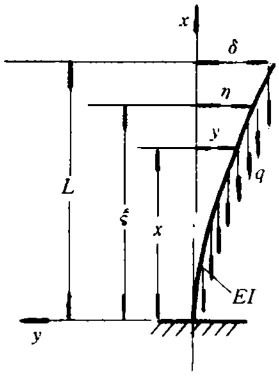


图 4

**解** 建立压杆的控制方程为

$$EIy'' - \int_x^l q(\eta - y)\mathrm{d}\xi = 0$$

其中最后一项为 $q$ 力在 $(l-x)$ 段对于 $A$ 点的弯矩

$$M = \int_x^l q(\eta - y)\mathrm{d}\xi \qquad (1)$$

式中 $\xi, \eta$ 为流动坐标.

选择满足边界条件的试函数为

$$\tilde{y} = \frac{\delta}{2l^3}(3lx^2 - x^3)$$

以 $\eta = \dfrac{\delta}{2l^3}(3l\xi^2 - \xi^3)$ 代入 (1) 式积分得

$$M = \frac{\delta q}{2l^3}\left(\frac{3l^4}{4} - 3l^2x^2 + 3lx^3 - \frac{3x^4}{4}\right) \qquad (2)$$

将试函数和式 (2) 代入控制方程得残值方程

$$R = EI\frac{6\delta}{2l^3}(l-x) - \frac{\delta q}{2l^3}\left(\frac{3l^4}{4} - 3l^2x^2 + 3lx^3 - \frac{3}{4}x^4\right)$$

用配点法确定待定参数

配点 $x = \dfrac{l}{4}$, 将 $x = \dfrac{l}{4}$ 代入残值方程 $R = 0$, 得

$$q_{cr}l = \frac{7.42EI}{l^2}$$

与精确解 $q_{cr}l = \dfrac{7.83EI}{l^2}$ 比较，误差为 5.2%.

## 参 考 文 献


1 徐次达. 固体力学加权残值法. 同济大学出版社，1989 年 6 月

2 邱吉宝. 加权残值法的理论与应用. 宇航出版社，1985 年 2 月

3 徐文焕，陈虬. 加权余量法在结构分析中的应用. 中国铁道出版社，1991 年 5 月



(本文于 1993 年 9 月 23 日收到)


# 用弯剪矩阵法确定压杆临界力的教学研究


李有兴　肖荐淳

(西南石油学院，南充 637001)


确定压杆临界力的方法很多，有静力法、能量法等. 但就其推导过程而言，至今无一个统一算式. 在目前的教材中，大多从压杆的挠曲线近似微分方程出发，先求出两端铰支压杆的临界力，然后用类比法求其余支承压杆的临界力；或者再仿照两端铰支压杆的情况，重新建立微分方程求解，结果是费时费事，要得到欧拉公式的统一形式，难以一目了然. 本文针对这一缺陷，采取另一途径，从压杆的挠曲线微分方程，导出弯矩微分方程，结合矩阵运算，得到一种新的讲授方法，称其为弯剪矩阵法. 本法只需一个算式，便能得出各种支承压杆的欧拉公式，使统一公式得来非常自然，也使学生容易理解与掌握.

为了便于分析，我们仍取两端铰支的细长压杆进行研究，选取图 1 所示的坐标系，则任意截面的弯矩为

$$M = -Py$$

将上式两边对 $x$ 求导两次得

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -P\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (1)$$

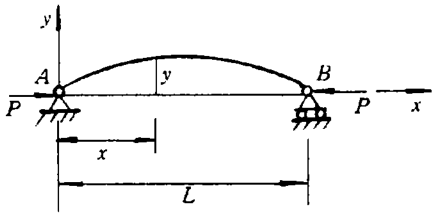


图 1

由材料力学 [1] 得知，压杆的弹性曲线近似微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (2)$$

将 (2) 代入 (1), 并令 $K^2 = P/EI$, 整理得

$$\frac{d^2M}{dx^2} + K^2M = 0 \qquad (3)$$

这是用弯矩 $M$ 表示的弹性曲线近似微分方程. 上式的通解为

$$M = C_1\sin Kx + C_2\cos Kx \qquad (4)$$

求导得

$$Q = KC_1\cos Kx - KC_2\sin Kx \qquad (5)$$