



# 半平面弹性体受梯形分布荷载作用下的沉陷计算

胡 钧 涛

(新疆石河子农学院, 石河子 832003)

**摘要** 本文利用符拉芒 (Flamant) 公式导出半平面弹性体在边界上受梯形分布荷载作用下的沉陷公式. 同时, 还给出了受任意分布荷载作用下的沉陷计算方法. 与现行方法相比, 提高了计算精度.

**关键词** 半平面弹性体, 梯形分布荷载, 沉陷

## 1 引言

半平面弹性体在边界上受任意分布荷载作用下的沉陷计算, 长期采用将其等分数段, 各段荷载近似地取均布的方法. 但当荷载分段较少, 其强度变化率较大时, 则计算结果误差较大. 如将任意分布荷载用数段梯形分布荷载来代替, 则可提高计算精度. 为此, 作者利用符拉芒公式导出半平面弹性体在边界上受梯形分布荷载作用下的沉陷公式, 根据叠加原理, 可用该式求得受任意分布荷载作用下的沉陷. 为了便于计算, 文中给出了  $\varphi_1 \sim \varphi_4$  的数值表, 以供查用.

## 2 三角形分布荷载作用下的沉陷计算

为了便于公式推导, 将梯形分布荷载分为两个三角形分布荷载, 然后叠加之.

文献 [1] 给出符拉芒公式为

$$\eta_k = \frac{2P}{\pi E_0} \ln \frac{s}{r} \quad (1)$$

则如图 1(a) 所示荷载分布的沉陷, 可利用式 (1) 得

$$d\eta_k = \frac{2qdr}{\pi E_0} \ln \frac{s}{r} \quad (2)$$

式中符号见图 1 所示,  $E_0$  为地基的弹性模量.

将坐标原点分别取在  $B$  点及  $K$  点, 则式 (2) 可写成如下形式

$$d\eta_k = \frac{2}{\pi E_0} \left[ q(\ln s) \cdot ds - q(\ln r) \cdot dr \right] \quad (3)$$

式中  $q$  分别表示为:  $q = \frac{q_0(s-b)}{c}$  及  $q = \frac{q_0(r-a)}{c}$ . 代入式 (3) 并积分, 得

$$\begin{aligned} \eta_{kj}^{(1)} &= \frac{2q_0}{\pi E_0 c} \left[ \int_b^{b+c} (s-b)(\ln s) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{a+c} (r-a)(\ln r) dr \right] \\ &= \frac{q_0}{\pi E_0 c} \left[ (c^2 - b^2) \ln(b+c) + (a^2 - c^2) \ln(a \right. \\ &\quad \left. + c) + b^2 \ln b + (b-a)c - a^2 \ln a \right] \quad (4) \end{aligned}$$

式中脚标  $j$  表示作用荷载段的编号.

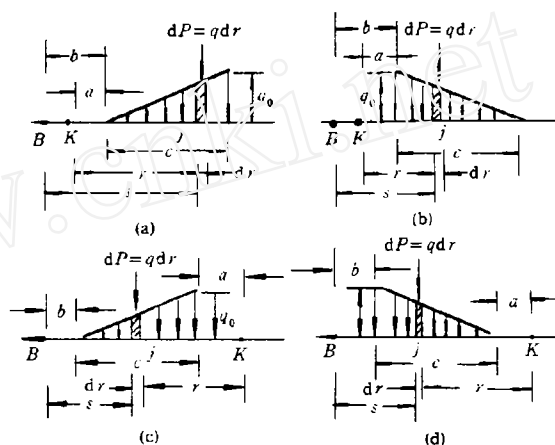


图 1

同理, 可分别导出图 1(b)、(c) 及 (d) 所示荷载分布和  $K$  点位置的沉陷公式为

$$\begin{aligned} \eta_{kj}^{(2)} &= \frac{q_0}{\pi E_0 c} \left[ (b+c)^2 \ln(b+c) - b(b+2c) \ln b \right. \\ &\quad \left. - (a+c)^2 \ln(a+c) + a(a+2c) \ln a \right. \\ &\quad \left. - (b-a)c \right] \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{kj}^{(3)} &= \frac{q_0}{\pi E_0 c} \left[ (c^2 - b^2) \ln(b+c) + b^2 \ln b \right. \\ &\quad \left. - (a+c)^2 \ln(a+c) + a(a+2c) \ln a \right. \\ &\quad \left. + (b+c)c + c^2 \right] \quad (6) \end{aligned}$$

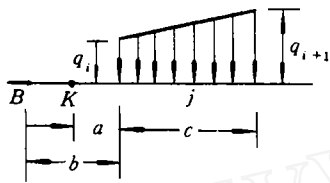
$$\eta_{kj}^{(4)} = \frac{q_0}{\pi E_0 c} \left[ (b+c)^2 \ln(b+c) - b(b+2c) \ln b - (a^2 - c^2) \ln(a+c) - a^2 \ln a - (a+b)c - c^2 \right] \quad (7)$$

### 3 梯形分布荷载作用下的沉陷计算

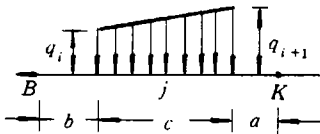
将两个三角形分布荷载作用下的沉陷公式相加后, 便可得到梯形分布荷载的沉陷公式.

比较图 2(a) 和图 1(a)、(b) 可知, 式 (4) 中的  $q_0 = q_{i+1}$ , 式 (5) 中的  $q_0 = q_i$ , 将式 (4) 和 (5) 相加, 整理后, 得图 2(a) 所示荷载分布的沉陷公式为

$$\eta_{kj}^{(5)} = \eta_{kj}^{(1)} + \eta_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\pi E_0 c} \left\{ q_i \left[ (b+c)^2 \ln(b+c) - (a+c)^2 \ln(a+c) - b(b+2c) \ln b + a(a+2c) \ln a - (b-a)c \right] + q_{i+1} \left[ (c^2 - b^2) \ln(b+c) + (a^2 - c^2) \ln(a+c) + b^2 \ln b - a^2 \ln a + (b-a)c \right] \right\} \quad (8)$$



(a)



(b)

图 2

比较图 2(b) 和图 1(c)、(d) 可知, 式 (6) 中的  $q_0 = q_{i+1}$ , 式 (7) 中的  $q_0 = q_i$ . 将式 (6) 与 (7) 相加, 整理后, 得图 2(b) 所示荷载分布的沉陷公式为

$$\eta_{kj}^{(6)} = \eta_{kj}^{(3)} + \eta_{kj}^{(4)} = \frac{1}{\pi E_0 c} \left\{ q_i \left[ (b+c)^2 \ln(b+c) + (a^2 - c^2) \ln(a+c) - a^2 \ln a - b(b+2c) \ln b - (b+a)c - c^2 \right] + q_{i+1} \left[ (c^2 - b^2) \ln(b+c) + b^2 \ln b - (a+c)^2 \ln(a+c) + a(a+2c) \ln a + (b+a)c + c^2 \right] \right\} \quad (9)$$

式 (8) 及 (9) 对于  $q_i > q_{i+1}$  或  $q_i < q_{i+1}$  均适用.

### 4 任意分布荷载作用下的沉陷计算

半平面弹性体, 在边界上受任意分布荷载作用时, 可将其等分数段, 每段荷载按梯形分布, 如图 3 所示. 然后利用式 (8) 和 (9) 进行计算, 并叠加之, 即可求得在该荷载作用下的沉陷. 为了计算方便, 令  $b = Lc, a = Mc, c$  为荷载段长,  $L$  及  $M$  为正整数, 则式 (8) 和 (9) 可分别写成如下形式

$$\eta_{kj}^{(7)} = \frac{c}{\pi E_0} (q_i \varphi_1 + q_{i+1} \varphi_2) \quad (10)$$

$$\eta_{kj}^{(8)} = \frac{c}{\pi E_0} (q_i \varphi_3 + q_{i+1} \varphi_4) \quad (11)$$

式中

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \ln \frac{L+1}{M+1} + (2L+L^2) \ln \frac{L+1}{L} - (2M+M^2) \ln \frac{M+1}{M} - (L-M) \\ \varphi_2 &= \ln \frac{L+1}{M+1} + M^2 \ln \frac{M+1}{M} - L^2 \ln \frac{L+1}{L} + (L-M) \\ \varphi_3 &= \ln \frac{L+1}{M+1} + M^2 \ln \frac{M+1}{M} + (2L+L^2) \ln \frac{L+1}{L} - (L+M) - 1 \\ \varphi_4 &= \ln \frac{L+1}{M+1} - (2M+M^2) \ln \frac{M+1}{M} - L^2 \ln \frac{L+1}{L} + (L+M) + 1 \end{aligned}$$

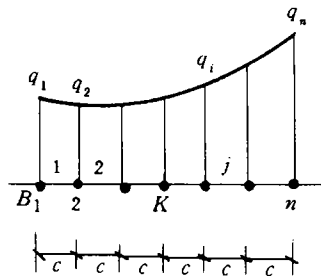


图 3

式 (10) 适用于  $K$  与  $B$  点位于荷载段的同侧, 式 (11) 适用于异侧. 为了便于计算, 现将  $\varphi_1 \sim \varphi_4$  值的计算结果列于表 1 中, 以供查用.

表 1  $\varphi_1 \sim \varphi_4$  数值表

M	$\varphi$	L							
		0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\varphi_1$	0.000	1.773	2.343	2.702	2.965	3.173	3.345	3.491
	$\varphi_2$	0.000	1.000	1.477	1.797	2.039	2.234	2.397	2.536
	$\varphi_3$	-1.000	0.773	1.343	1.701	1.964	2.173	2.345	2.491
	$\varphi_4$	1.000	2.000	2.477	2.797	3.039	3.234	3.397	3.536
1	$\varphi_1$	-1.773	0.000	0.570	0.929	1.192	1.401	1.573	1.719
	$\varphi_2$	-1.000	0.000	0.476	0.797	1.039	1.234	1.397	1.536
	$\varphi_3$	-2.000	-0.227	0.342	0.701	0.964	1.173	1.345	1.491
	$\varphi_4$	-0.773	0.227	0.704	1.025	1.267	1.462	1.625	1.764
2	$\varphi_1$	-2.343	-0.570	0.000	0.359	0.622	0.830	1.002	1.149
	$\varphi_2$	-1.477	-0.476	0.000	0.321	0.563	0.757	0.920	1.060
	$\varphi_3$	-2.477	-0.704	-0.134	0.225	0.488	0.696	0.868	1.015
	$\varphi_4$	-1.343	-0.342	0.134	0.455	0.697	0.891	1.054	1.194
3	$\varphi_1$	-2.702	-0.929	-0.359	0.000	0.263	0.471	0.644	0.790
	$\varphi_2$	-1.797	-0.797	-0.321	0.000	0.242	0.437	0.600	0.737
	$\varphi_3$	-2.797	-1.025	-0.455	-0.096	0.167	0.375	0.548	0.694
	$\varphi_4$	-1.701	-0.701	-0.225	0.096	0.338	0.532	0.696	0.835
4	$\varphi_1$	-2.965	-1.192	-0.622	-0.263	0.000	0.208	0.380	0.527
	$\varphi_2$	-2.039	-1.039	-0.563	-0.242	0.000	0.194	0.357	0.497
	$\varphi_3$	-3.039	-1.267	-0.697	-0.338	-0.075	0.133	0.305	0.452
	$\varphi_4$	-1.964	-0.964	-0.488	-0.167	0.075	0.269	0.432	0.572
5	$\varphi_1$	-3.173	-1.401	-0.830	-0.471	-0.208	0.000	0.172	0.319
	$\varphi_2$	-2.234	-1.234	-0.757	-0.437	-0.194	0.000	0.163	0.303
	$\varphi_3$	-3.234	-1.462	-0.891	-0.532	-0.269	-0.061	0.111	0.258
	$\varphi_4$	-2.173	-1.173	-0.696	-0.375	-0.133	0.061	0.224	0.364
6	$\varphi_1$	-3.345	-1.573	-1.002	-0.644	-0.380	-0.172	0.000	0.147
	$\varphi_2$	-2.397	-1.397	-0.920	-0.500	-0.357	-0.163	0.000	0.140
	$\varphi_3$	-3.397	-1.625	-1.054	-0.696	-0.432	-0.224	-0.052	0.095
	$\varphi_4$	-2.345	-1.345	-0.868	-0.548	-0.305	-0.111	0.502	0.192
7	$\varphi_1$	-3.491	-1.719	-1.149	-0.790	-0.527	-0.319	-0.147	0.000
	$\varphi_2$	-2.536	-1.536	-1.060	-0.737	-0.497	-0.303	-0.140	0.000
	$\varphi_3$	-3.536	-1.764	-1.194	-0.835	-0.572	-0.364	-1.192	-0.045
	$\varphi_4$	-2.491	-1.491	-1.015	-0.694	-0.452	-0.258	-0.095	0.045

因此, 半平面弹性体在边界上受任意分布荷载作用下, 任一荷载段边缘点  $K$  对于基点  $B$  的相对沉降, 便可由下式求得

$$\eta_k = \frac{c}{\pi E_0} \left[ \sum_{i=1}^{i=k-1} (q_i \varphi_3 + q_{i+1} \varphi_4) + \sum_{i=k}^{i=n-1} (q_i \varphi_1 + q_{i+1} \varphi_2) \right] \quad (12)$$

( $k = 1, 2, \dots, n$ .  $n$  为结点数)

式 (12) 用下列矩阵方程求解更为方便

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \\ \vdots \\ \eta_n \end{Bmatrix} = \frac{c}{\pi E_0} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1i} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2i} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \cdots & f_{ki} & \cdots & f_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{ni} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式中  $f_{ki}$  称地基柔度矩阵元素, 当基点  $B$  取在结点 1 时, 该值应为:  $f_{1i} = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$ ; 当  $k \geq 2$  时,  $f_{k1} = \varphi_3, \varphi_3$  由  $L = 0, M = k - 2$  查表 1 而得; 当  $i \geq k$  时,  $f_{ki} = \varphi_2 + \varphi_1, \varphi_2$  由  $L = i - 2, M = i - k - 1$  查表 1 得,  $\varphi_1$  由  $L = i - 1, M = i - k$  查得; 当  $i < k$  时,  $f_{ki} = \varphi_3 + \varphi_4, \varphi_3$  由  $L = i - 1, M = k - i - 1$  查得;  $\varphi_4$  由  $L = i - 2, M = k - i$  查得; 当  $k < n$  时,  $f_{kn} = \varphi_2, \varphi_2$  由  $L = n - 1, M = n - k - 1$  查得; 当  $k = n$  时,  $f_{kn} = \varphi_4, \varphi_4$  由  $L = n - 1, M = 0$  查得.

### 5 算例

现有一半平面弹性体, 在边界上作用有如图 4 所示的分布荷载, 其中  $q_1 = 120, q_2 = 80, q_3 = 40, q_4 = 20, q_5 = 50, q_6 = 150$ . 其作用范围为 50m, 地基弹性模量  $E_0 = 10^4 \text{kN/m}^2$ . 设为平面应力问题, 试求其沉降量.

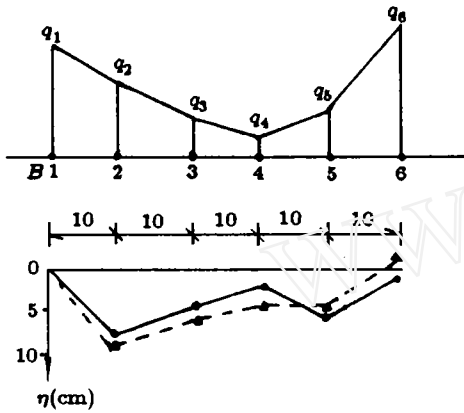


图 4

解 将荷载分为 5 等分,  $c=10\text{m}$ , 基点  $B$  设在荷载左边缘的结点 1, 如图 4 所示, 则全段荷载分别对各结点对于基点  $B$  的相对沉降, 可利用式 (12) 或

(13) 及表 1 中的  $\varphi_1 \sim \varphi_4$  值进行计算. 现举例说明计算方法. 例如, 求第 3 段荷载 ( $j = 3$ ) 对结点 4 ( $k = 4$ ) 对于结点 1 的相对沉降, 因  $K$  与  $B$  点在荷载段的异侧,  $q_i = q_3 = 40, q_{i+1} = q_4 = 20 (i = 3), i < k, \varphi_3$  由  $L = i - 1 = 2$  及  $M = k - i - 1 = 0$  由表 1 查得,  $\varphi_3 = 1.343$ , 同理, 查得  $\varphi_4 = 2.477$ . 将各段荷载对结点 4 的相对沉降叠加后, 便可得到全部荷载对结点 4 的相对沉降为  $\eta_4 = 1.555\text{cm}$ .

同理, 可得全部荷载对各结点的相对沉降, 并用列阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 & \eta_6 \end{bmatrix}^T \\ = [0 \quad 7.85 \quad 4.37 \quad 1.56 \quad 5.54 \quad 0.78]^T \text{cm}$$

其计算结果表示在图 4 中 (实线). 同时, 为了比较, 该图还示出了由文献 [2] 给出的公式, 将梯形分布荷载用均布荷载代替的计算结果 (虚线).

### 6 结语

(1) 由算例可知, 任意分布荷载用均布荷载代替和用梯形荷载代替, 两者计算结果差别较大, 最大达 131%.

(2) 用梯形分布荷载计算时, 虽然公式较繁, 但利用表 1 中给出的  $\varphi_1 \sim \varphi_4$  值, 可使计算大为简便, 且计算精度可以提高.

(3) 本文给出的地基沉降公式, 也可用来进行弹性地基梁的计算.

### 参 考 文 献

- 徐芝纶编. 弹性力学. 北京: 人民教育出版社, 1982
- 胡钧涛. 用 Flamant 公式计算地基沉降的新方法. 力学与实践, 1989, 11(4):38-40

(1993 年 10 月 22 日收到第 1 稿,  
1994 年 5 月 14 日收到修改稿)

## 弹性力学平面问题的新解法——应力分量法

吴毓熙

(同济大学工程力学系, 上海 200092)

**摘要** 本文提出了一种求解弹性力学平面问题的新方法——应力分量法, 并对经典的平面问题进行了求解, 解答正确、方法便捷, 与传统的应力函数

法相比, 难度小、费时少、速度快.

**关键词** 应力分量法, 弹性力学, 平面问题, 边值问题