解 系统具有两个自由度，相应的广义速度取 ω_1 和 ω_2. 由运动学分析可知

$$u_{co}=\frac{l}{2}\omega_1,\ u_c=l\omega_1+\frac{l}{2}\omega_2,\ 且\ I_{co}=I_c=\frac{1}{12}ml^2$$

则

$$\begin{aligned}T^*&=\frac{1}{2}mu_{co}^2+\frac{1}{2}I_{co}\omega_1^2+\frac{1}{2}mu_c^2+\frac{1}{2}I_c\omega_2^2\\&=\frac{1}{6}ml^2\omega_1^2+\frac{1}{2}m(l\omega_1+\frac{l}{2}\omega_2)^2+\frac{1}{24}ml^2\omega_2^2\end{aligned}$$

$$I_1=lS,\quad I_2=\frac{l}{2}S$$

代入分析法方程式 (9), 经化简得

$$8ml\omega_1+3ml\omega_2=6S$$

$$3ml\omega_1+2ml\omega_2=3S$$

解得

$$\omega_1=\frac{3S}{7ml},\quad \omega_2=\frac{6S}{7ml},\quad u_c=\frac{6S}{7m}$$

显见，该题用分析法方程求解十分方便.

参 考 文 献

1 哈尔滨工业大学理论力学教研室编. 理论力学. 高等教育出版社， 1985

2 赵文礼，王林泽. 解决碰撞问题的动静法. 力学与实践， 1992(6)

(1993 年 10 月 7 日收到第 1 稿，
1994 年 5 月 12 日收到修改稿)

一种推导单自由度线性振动系统杜哈梅积分的方法

陈 立 群

(鞍山钢铁学院，鞍山 114002)

在机械振动教材中，任意干扰力作用下的单自由度振系受迫振动可用迭加原理和单位冲量的响应求得 [1], 也可用 Laplace 变换法求出 [2]. 前者虽然物理意义明确直观易懂，但数学上看稍嫌不严格；后者数学上无懈可击，但要求准备知识较多推导繁复. 本文给出一种新方法，其基本思路是通过变换将原方程降阶然后求解.

考虑单自由度小阻尼受迫振动系统

$$\ddot{x}+2\zeta p\dot{x}+p^2x=f(t) \tag{1}$$

其中， $\zeta<1$ 为阻尼比， p 为相应无阻尼系统的固有频率. 引入新变量 (c 为待定复数)

$$z=\dot{x}+cx \tag{2}$$

则

$$x=\frac{1}{c}(z-\dot{x}),\quad \ddot{x}=\dot{z}-c\dot{x} \tag{3}$$

将 (3) 式代入 (1) 式有

$$\dot{z}-\frac{1}{c}(c^2-2\zeta pc+p^2)\dot{x}+\frac{p^2}{c}z=f(t) \tag{4}$$

令

$$c=(\zeta-\sqrt{1-\zeta^2}j)p\quad (j^2=-1) \tag{5}$$

则 (4) 式中 $\dot{x}$ 项系数为零，故 (4) 式为 z 的 1 阶线性微分方程，其零初值特解为

$$\begin{aligned}z&=e^{-\frac{p^2}{c}t}\int_0^t f(\tau)e^{\frac{p^2}{c}\tau}\mathrm{d}\tau\\&=\int_0^t f(\tau)e^{-(\zeta+\sqrt{1-\zeta^2}j)p(t-\tau)}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{6}$$

将 (5) 式代入 (2) 式并利用 (6) 式有

$$\begin{aligned}x&=-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}p}\mathrm{Im}(z)\\&=\frac{e^{-\zeta pt}}{\sqrt{1-\zeta^2}p}\int_0^t e^{\zeta p\tau}f(\tau)\sin\sqrt{1-\zeta^2}p(t-\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{7}$$

其中， $\mathrm{Im}(z)$ 表示复数 z 的虚部. (7) 式给出了振系 (1) 的零初值响应.

对于非零初值响应，这里的方法仍适用，只需将 (6) 式改写为

$$z=e^{-\frac{p^2}{c}t}\left(z_0+\int_0^t f(z)e^{\frac{p^2}{c}\tau}\mathrm{d}\tau\right) \tag{8}$$

其中

$$z_0=\dot{x}_0+cx_0 \tag{9}$$

由以上讨论知，我们给出方程 (1) 一个数学上严格的解法，又无需附加数学准备知识.

参 考 文 献

1 吴福光，蔡承武，徐光. 振动理论，高等教育出版社，1987: 44-46

2 胡宗武. 工程振动分析基础. 上海交通大学出版社 1985: 74-76

(1993 年 5 月 5 日收到第 1 稿，1994 年 5 月 10 日收到修改稿)

平面运动刚体的动能基点

刁 海 林

(广西农业大学林学院，南宁 530001)

平面运动刚体的动能等于随质心 C 平动的动能与绕质心 C 转动的动能的和. 即

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2 \tag{1}$$

对刚体上任一点 A 可否使下式成立呢？

$$T=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}J_A\omega^2 \tag{2}$$

显然，一般情况 (2) 式不能成立. 下面将证明，对某些特殊的点 (2) 式成立. 使 (2) 式成立的点称为刚体的动能基点，即平面运动刚体的动能被严格地表示为随该点平动和绕该点转动的两部分动能之和的点.

1 动能基点的存在性

如图 1 所示， A 为平面图形上任一点，至质心 C 的距离为 r, CA 连线与 $\boldsymbol{V}_C$ 夹角为 α. 将 $J_C=J_A-mr^2$ 代入 (1) 式，得

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}(J_A-mr^2)\omega^2\\&=\frac{1}{2}m(v_C^2-v_{AC}^2)+\frac{1}{2}J_A\omega^2\end{aligned} \tag{3}$$

由 A 点的速度分析可知，一般情况下 $v_C^2-v_{AC}^2\neq v_A^2$. 但在 BCD 线上总可以找到这样一个 $r=r'$ 的 A' 点，使得 $\boldsymbol{V}_{A'}\perp\boldsymbol{V}_{A'C}$, 如图 1 所示，从而有 $v_C^2-v_{A'C}^2=v_{A'}^2$, 故可使 (3) 式写为

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}m(v_C^2-v_{A'C}^2)+\frac{1}{2}J_{A'}\omega^2\\&=\frac{1}{2}mv_{A'}^2+\frac{1}{2}J_{A'}\omega^2\end{aligned} \tag{4}$$

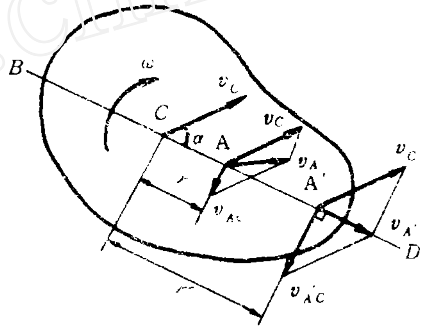

图 1

于是 A' 点使 (2) 式得以成立， A' 点即为动能基点.

至此已证明了，任一瞬时在过质心 C 的任一直线上，总能够唯一地找到一个动能基点. 由于过质心 C 可作无穷多条这样的直线，故平面运动刚体在任一瞬时可有无穷多个动能基点.

2 动能基点的位置及其分布规律

动能基点 A'(图 1) 的位置由下式确定

$$\begin{aligned}v_{A'C}&=v_C\sin\alpha=r'\omega\\r'&=\frac{v_C\sin\alpha}{\omega}\end{aligned} \tag{5}$$

当 $\alpha=0$ 或 π 时， $r'=0$, 点 A' 即为质心. 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$r'=\frac{v_C}{\omega}$, 此恰为速度瞬心 p 的位置. 至于