

旁撑对一端支承一端自由压杆长度系数的影响

任治章

(吉林建工学院, 长春 130021)

摘要 本文讨论了旁撑对一端支承一端自由的压杆长度系数的影响, 并给出了简单的计算公式, 供设计者参考.

关键词 压杆, 长度系数, 临界力, 稳定

1 引言

压杆(柱)的设计主要是由稳定条件控制的. 为了对压杆进行稳定计算, 首先要确定压杆的长度系数 μ . 迄今为止, 人们只对工程上常见的具有端部约束的压杆进行了比较详尽的研究, 确定了这些压杆的长度系数的值^[1]. 对具有中间支承的压杆研究得很少, 而这种压杆在工程中也时有所见. 比如当前建筑工程上使用的大型钢筋混凝土构件模板支架中的立柱钢管, 就可以简化成这种模型. 为了对承重很大的支架进行合理的设计, 就需要研究中间支撑对压杆长度系数的影响, 即导出具有中间支撑的压杆的长度系数的计算公式.

本文只讨论旁撑对一端支承一端自由压杆长度系数的影响, 首先导出这种压杆的通用稳定方程, 然后分析压杆长度系数 μ 与旁撑位置之间的关系, 最后给出一个简单的计算公式, 供设计者参考.

2 旁撑对一端固定一端自由压杆长度系数 μ 的影响

2.1 压杆的稳定方程

一端固定一端自由压杆如图 1 所示, 假定其旁撑位于任意位置 mL ($0 < m \leq 1$). 在临界力 P_{lj} 作用下, 压杆处于微弯平衡状态, 设自由端 C 的挠度为 δ , 方向如图 1 示. 则压杆的弯矩方程为

$$AB \text{ 段 } M(x) = P_{lj}(\delta + V) - Q(mL - x) \quad (0 \leq x \leq mL) \quad (1)$$

$$BC \text{ 段 } M(x) = P_{lj}(\delta - V), \quad (mL < x \leq L) \quad (2)$$

式中 V 是杆轴线上任一点的挠度; Q 是旁撑对杆的约束反力.

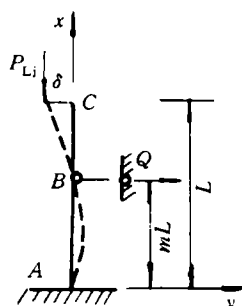


图 1 压杆简图

压杆微弯时挠曲线近似微分方程^[1]为

$$V'' = -\frac{M(x)}{EI} \quad (3)$$

将(1)式代入(3)式, 并令 $\frac{P_{lj}}{EI} = K^2$, 整理后得

$$V'' + K^2V = \frac{Q}{EI}(mL - x) - K^2\delta \quad (4)$$

此方程的通解为

$$V = C_1 \cos Kx + C_2 \sin Kx + \frac{1}{K^2} \cdot \frac{Q}{EI}(mL - x) - \delta \quad (5)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} V|_{x=0} &= 0 \\ V'|_{x=0} &= 0 \\ V|_{x=mL} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将(5)式代入(6)式中的3式, 求解整理后得

$$\delta \cdot K^3 EI (\cos mKL - 1) + Q (\sin mKL - mL \cos mKL) = 0 \quad (7)$$

再将(2)式代入(3)式, 并令 $\frac{P_{lj}}{EI} = K^2$, 有

$$V'' + K^2V = K^2\delta \quad (8)$$

其通解为

$$V = -C_3 \cos Kx - C_4 \sin Kx - \delta \quad (9)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} V|_{x=mL} &= 0 \\ V'_{BC}|_{x=mL} &= V'_{AB}|_{x=mL} \\ V|_{x=L} &= -\delta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将 (9) 式代入 (10) 式, 求解整理后得

$$\delta \cdot [\cos KL \cdot \sin^2 mKL + \cos(1-m)KL - \sin KL \cdot \sin mKL \cdot \cos mKL] - Q \frac{\sin(1-m)KL}{K^3 EI} (-mKL \sin mKL)$$

$$\begin{vmatrix} \cos KL \cdot \sin^2 mKL + \cos(1-m)KL & \frac{\sin(1-m)KL}{K^3 EI} (mKL \cdot \sin mKL + \cos mKL - 1) \\ -\sin KL \cdot \sin mKL \cdot \cos mKL & \\ K^3 EI(\cos mKL - 1) & \sin mKL - mKL \cdot \cos mKL \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开, 整理后即得此类压杆通用的稳定方程为

$$\sin KL + \sin(1-m)KL \cdot (\cos mKL - 2) - mKL \cdot \cos KL = 0 \quad (12)$$

2.2 旁撑对压杆长度系数的影响

下面讨论当旁撑位于不同位置时压杆的长度系数。

当 $m = 1$ 时, 压杆成为一端固定一端铰支的压杆, 代入 (12) 式, 得到其稳定方程为

$$\operatorname{tg} KL = KL$$

用数值方法解此方程, 得 $KL = 4.49$, 由此得压杆临界力 $P_{Lj} = \pi^2 EI / (0.7L)^2$, 压杆的长度系数为 $\mu = 0.7$ 。用类似的方法, 可得到 $m = 3/4, 1/2, 1/4, 1/8$ 及 0 时压杆的 μ 值, 如表 1 所示。

表 1

m	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
μ (理论)	0.7	0.91	1.26	1.63	1.85	2.0
经验公式求得的 μ	0.7	0.91	1.26	1.65	1.84	2.0
误差 (%)	0	0	0	1.2	0.5	0

2.3 旁撑在任一位置时压杆长度系数的计算

在工程实际中, 旁撑可能位于某个任意位置。为了确定压杆相应的长度系数, 就需要用数值方法来求解相应的稳定方程, 其过程是相当繁琐的, 应用起来很不方便。为了便于工程应用, 根据表 1 的数据, 应用拉格朗日插值法, 可将压杆的长度系数 μ 与旁撑位置参数 m 之间的关系用下列函数表示

$$\mu = 2.0 - 1.16m - 1.16m^2 + 1.02m^3 \quad (13)$$

$$-\cos mKL + 1 = 0 \quad (11)$$

注意到 (7)、(11) 两式是关于 δ 、 Q 的线性齐次方程组, 由于 δ 、 Q 不可能为零, 因此有

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin(1-m)KL}{K^3 EI} (mKL \cdot \sin mKL + \cos mKL - 1) \\ \sin mKL - mKL \cdot \cos mKL \end{vmatrix} = 0$$

用此经验公式求得的 μ 值及其与理论值的比较如表 1 所示。可以看到, 在工程实际中, 应用 (13) 式来计算旁撑在任意位置时压杆的 μ 值, 具有足够的精确度。

3 旁撑对一端铰支一端自由压杆长度系数的影响

推导的原理及基本过程与前类似, 下面仅给出主要结果。

3.1 压杆通用稳定方程

$$\sin mKL \cdot \sin[(m-1)KL] + mKL \cdot \sin KL = 0 \quad (14)$$

3.2 计算 μ 的经验公式

$$\mu = 2.46 - 2.98m + 1.52m^2 \quad (m \neq 0) \quad (15)$$

4 算例

例 1 某模板支柱可简化为图 2 所示模型。已知: 立柱材料为 A3 钢, 直径 $d = 40\text{mm}$, 材料强度许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$, 该立柱承受的轴向压力为 $P = 100\text{kN}$ 。试校核立柱的稳定性。

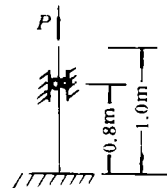


图 2 立柱简图

解: 立柱的长度系数 μ 可按 (13) 式求得 $\mu = 0.85$ 由此得立柱的柔度 $\lambda = \frac{\mu L}{i} = 85$, 查稳定系数表^[1], 得 $\varphi = 0.7$ 。将 φ 值及已知数据代入稳定条件 $\frac{P}{A} \leq \varphi[\sigma]$, 有

$$\frac{P}{A} = 79.6\text{MPa} < \varphi[\sigma] = 119\text{MPa}$$

可见, 该立柱满足稳定条件.

例 2 A3 钢柱如图 3 示. 已知: 柱截面为圆形, 承受轴向压力 $P = 100\text{kN}$, 材料强度许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$. 试设计柱截面直径 d .

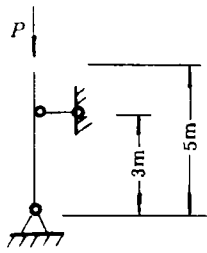


图 3 立柱简图

解: 应用文 [2] 给出的直接法公式来设计此柱. 为此, 先用 (15) 式求出柱的长度系数 $\mu = 1.22$ 由文 [2] 知, A3 圆钢压杆的类型判别式为

$$\frac{P}{[\sigma]} \leq 8.1 \times 10^{-4} \mu^2 L^2$$

代入已知数据, 有 $P/[\sigma] = 5 \times 10^{-4} < 8.1 \times 10^{-4} \times 1.22^2 \times 5^2 = 301.4 \times 10^{-4}$; 显然, 此柱为大柔度柱, 其截面半径为

$$r = \left[\frac{P(\mu L)^{1.85}}{891.4\pi[\sigma]} \right]^{\frac{1}{3.85}} = 44\text{mm}$$

故 $d = 2r = 88\text{ mm}$, 解毕.

参 考 文 献

- 1 孙训方, 方孝淑, 关来泰. 材料力学 (下册) 第二版, 高等教育出版社, 121-162
- 2 任治章. 压杆稳定设计的直接法. 力学与实践, 1993(1): 66-69

(1993 年 8 月 12 日收到第 1 稿,
1994 年 4 月 17 日收到修改稿)

摩擦对梁的接触问题的影响

舒小平

(淮海工学院, 连云港 222001)

摘要 本文对接触问题的经典梁理论和广义梁理论作了改进. 考虑了接触面间摩擦力对接触问题的影响. 从而克服了以往梁接触问题中一些不切实际的接触规律, 使梁的接触规律趋于合理.

关键词 梁, 接触压力, 摩擦

1 引 言

在以往梁的接触研究中, 均未考虑接触面间摩擦力的影响^[1-3]. 作者在文 [4] 中作了初步探讨, 将接触面间摩擦力当作轴力处理. 该处理方法虽然反映了摩擦对接触问题的影响, 但未能克服由经典梁理论得到的如点接触和集中反力等不合理接触现象, 在广义梁理论中也未考虑摩擦力对梁截面的矩的作用. 本文利用最小势能原理, 分别在经典梁理论和广义梁理论中准确地考虑了接触面间摩擦力的影响, 从而改进了梁的接触规律.

2 接触面间摩擦力的定义

设梁与某一表面接触. 如图 1 悬臂梁, $0 \leq x \leq \xi$ 为接触区. 梁在受载变形过程中, 接触面会

相对滑动, 因接触压力而产生摩擦力. 即在接触区内梁会受到两种分布反力, 一为接触正压力 $q_R(x)$, 一为接触摩擦力 $F(x)$. 且 $F(x) = \pm f q_R(x)$, f 为动摩擦系数. $F(x)$ 的正向如图 1 所示. 在整个接触区, 当梁的截面转角不变号时, $F(x)$ 亦不变号; 否则, 在应用下节平衡方程时要分段考虑摩擦力的

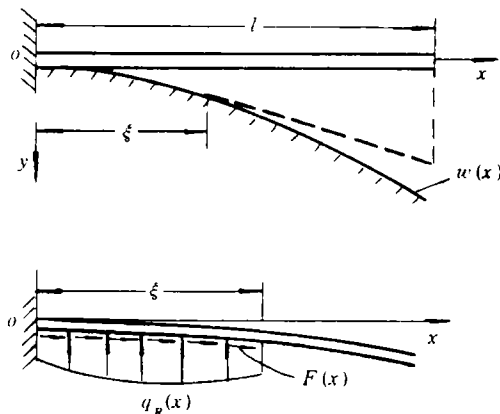


图 1 接触面反力 $q_R(x)$ 和摩擦力 $F(x)$

符号.

3 考虑摩擦时接触问题的经典梁理论

在经典梁理论的接触问题研究中,常会出现点接触和集中反力等不合理结果.许多研究者认为这是经典梁理论本身的缺陷.文[4]虽然考虑了摩擦的影响,也未克服上述现象.本文建立的经典梁理论将克服上述现象.

为了准确反映接触面间摩擦力的影响,本文选用最小势能原理来推导平衡方程和边界条件.显然在总势能中应包括摩擦力的势能

$$\int_l -F \cdot u(y = h/2) dx = \int_l F \frac{h}{2} \frac{dw}{dx} dx \quad (1)$$

对总势能变分,得平衡方程

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{h}{2} \frac{dF(x)}{dx} = q - q_R \quad (2)$$

边界条件

$$\text{已知 } -D \frac{d^2 w}{dx^2} \text{ 或 } \frac{dw}{dx} \quad (3)$$

$$\text{已知 } \frac{Fh}{2} - D \frac{d^3 w}{dx^3} \text{ 或 } w \quad (4)$$

平衡方程和边界条件中均包含了 $F(x)$.

下面以悬臂梁与一刚性表面 $y(x)$ 接触为例.设接触表面为半径 R 的圆柱面

$$y(x) = \frac{x^2}{2R} \quad (5)$$

例1 梁在端部受一集中载荷 P 的作用.若不考虑摩擦,该问题的解为梁与刚性表面仅是点接触,在接触点处有集中反力,大小为 P .

根据平衡方程(2),其接触压力 $q_R(x)$ 的解为

$$q_R(x) = \frac{2P}{fh} e^{\frac{2}{fh}(x-\xi)} \quad (0 \leq x \leq \xi) \quad (6)$$

式中 $\xi = l - \frac{D}{PR}$.图2为 $\xi = 10h$ 时 $q_R(x)$ 的分布情况,图中引进了无量纲压力 $\bar{q}_R = q_R h / P$.

从图2看出,当 $f = 0$ 时,即不计摩擦力时接触压力为一集中反力(大小等于 P).考虑摩擦后,接触压力为分布反力,且随摩擦系数 f 的增大压力分布趋于平缓.显然考虑摩擦后接触压力更趋合理.

例2 梁受均布载荷 q .若不考虑摩擦,该问题的解为梁与刚体在 $0 \leq x \leq \xi$ 内接触.接触压力 $q_R = q_0$,且在 ξ 处有一集中反力,大小为 $q_0(l - \xi)$.

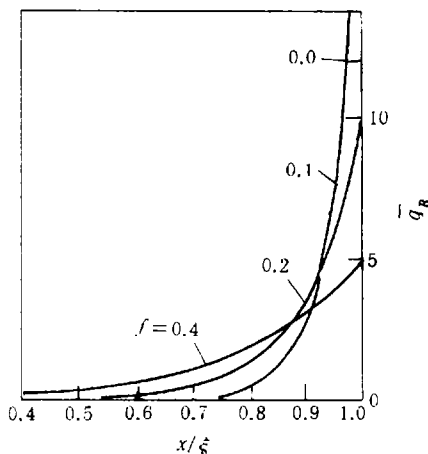


图2 接触压力 $q_R(x)$

由本文平衡方程(2)解得

$$q_R = q_0 + q_0 \left[\frac{2}{fh} (l - \xi) - \frac{1}{2} \right] e^{\frac{2}{fh}(x-\xi)} \quad (7)$$

式中 $\xi = l - \sqrt{2D/Rq_0}$.由式(7)知, $q_R(x)$ 在悬臂附近为 q_0 ,在 ξ 附近很大.这与不计摩擦得到的 q_R 为均匀分布 ($q_R = q_0$) 且在 ξ 处有集中反力的结论相去甚远.

由上述两例可见,摩擦对接触的影响是显著的.它不仅能影响接触压力的大小,而且影响其接触规律.

4 考虑摩擦时接触问题的广义梁理论

广义梁理论指有两个位移 w, φ 的梁理论.考虑摩擦后应对原有的广义梁理论作相应的改进.显然在总势能中应包括摩擦力的势能

$$\int_l -F \cdot u(y = \frac{h}{2}) dx = \int_l F \frac{h}{2} \varphi dx \quad (8)$$

对总势能变分,得平衡方程

$$-\frac{d}{dx} \left[C \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \right] = q - q_R \quad (9)$$

$$-\frac{d}{dx} \left(D \frac{d\varphi}{dx} \right) - C \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) + F \cdot \frac{h}{2} = 0 \quad (10)$$

边界条件

$$\text{已知 } C \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \text{ 或 } w \quad (11)$$

$$\text{已知 } -D \frac{d\varphi}{dx} \text{ 或 } \varphi \quad (12)$$

平衡方程中增加了一项 $F \cdot \frac{h}{2}$,即考虑了摩擦力对梁中面的矩.