

2. 文献 [1] 认为若假定纯弯曲梁的纵向纤维单向受力, 则它变形时也应和直杆轴向拉、压时一样保持直线, 梁的整体也不会弯成弧形. 对照梁纯弯曲问题的弹性力学解, 显然这一观点是不正确的. 其原因是把梁看成是由一根根能单独变形的纵向纤维组成的纤维束. 事实上梁是弹性体, 弹性体的变形不仅仅决定于受力情况, 而且还要满足变形连续条件和变形物理条件. 从用弹性力学方法求出位移 (5) 的过程中可以看出, 纯弯曲梁弯成弧形, 正是变形连续条件和变形物理条件起作用的结果. 即便对图 1(c) 所示的模型, 情况也是这样. 纵向截面上的微小挤压力决不会是纯弯曲梁变弯的主要原因. 从挤压力对应变量贡献的量级分析可说明这一点.

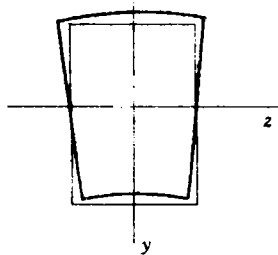


图 2 纯弯曲梁横截面变形

### 3. 用弹性力学三维理论以梁纯弯曲问题分析

结果跟用平面理论得到的结果相一致, 在梁的纵向截面上无挤压力作用. 并给出梁的横截面变形情况如图 2 所示<sup>[4]</sup>. 文献 [3] 指出, 矩形截面梁的纯弯曲试验证实了这一点. 这又从另一个方面说明了纵向纤维单向受力假设的正确性.

综上所述, 梁发生纯弯曲时, 在梁的纵向截面上是否有挤压力作用由采用哪种力学模型而定, 但是即使有挤压力存在, 因为它很微小, 对纯弯曲梁的强度和变形都无实际重要意义, 而且在梁的纯弯曲试验时, 梁横截面的变形表示出纵向纤维单向受力的性质, 所以为了简化分析, 材料力学在推导纯弯曲梁横截面上正应力公式时采用纵向纤维单向受力假设是完全正确的.

### 参 考 文 献

- 1 马凤刚. 纯弯曲梁纵向截面上挤压力. 力学与实践, 1989 (4)
- 2 徐芝纶. 弹性力学 (上册), 人民教育出版社, 1983
- 3 铁木辛柯 S, 盖尔 J 著. 胡人礼译. 材料力学, 科学出版社, 1978
- 4 谢裕权, 林钟祥, 丁皓江编. 弹性力学, 浙江大学出版社, 1988

(本文于 1992 年 12 月 2 日收到)

## 我看“矩形截面梁剪应力计算公式的严格推导”

薛福林

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150006)

文 [1] 给出一个在梁的剪力不是常量时弯曲剪应力公式的推导, 并认为这个推导是严格的.

笔者认为该文的推导存在矛盾. 该文在假定剪力、弯矩和剪应力都是截面位置坐标的函数时, 根据脱离体 (该文图 4) 的  $x$  方向的平衡条件推导出该文的式 (9). 但是由该文式 (9) 我们可得出

$$\Delta\tau(x, y) = \frac{\Delta Q(x) \cdot S_z^*}{I_x b}$$

这就是说在该文所允许的剪力不是常量的条件下, 脱离体的  $AA_1m_1m$  和  $BB_1n_1n$  两面对应点处的剪

应力将有应力差  $\Delta\tau(x, y)$ , 由于

$$\iint_{A^*} \Delta\tau(x, y) dA = \frac{\Delta Q(x)}{I_x b} \iint S_z^* dA \neq 0$$

从而导致脱离体在  $y$  方向不平衡.

现行材料力学书中在推导梁的弯曲剪应力公式时, 把微段取于无分布力处是对的<sup>[2]</sup>, 这就避免了上述矛盾.

要想在存在剪应力差  $\Delta\tau(x, y)$  的时候, 仍使脱离体满足  $y$  方向的平衡条件, 就必须假定在该文图 4 脱离体的  $AA_1B_1B$  面上有正应力. 然而这又破坏

了梁的纵向纤维在横向不受力的材料力学假定, 导致横截面正应力不按直线规律分布. 因此用材料力学的正应力公式进行梁的剪应力计算公式的严格推导是不可能的.

## 参 考 文 献

- 1 李正良, 陈春. 矩形截面梁剪应力计算公式的严格推导. 力学与实践, 1992,14(4)
- 2 刘鸿文主编. 材料力学, 高等教育出版社, 1982

(本文于 1993 年 3 月 12 日收到)

# 冲力情况下拉格朗日方程的应用特点

宋福磐 黎邦隆

(湖南大学, 长沙 410082)

冲力情况下的第二类拉格朗日方程在应用上有一些特点, 在现有的教材和参考书中似未提及. 笔者认为, 无论是从教学需要还是从教材编写的角度着想, 谈谈这些特点都是必要的.

对于理想、完整系统, 冲力情况下的拉氏方程为

$$\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \hat{Q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (I)$$

其中  $T$  为系统的动能,  $\dot{q}_i$  是第  $i$  个广义速度,  $\hat{Q}_i$  是对应于广义坐标  $q_i$  的广义冲量,  $k$  是系统的自由度. 方程的左边表示系统的广义动量在碰撞末了和开始两瞬时的差值.

应用方程 (I) 解题时, 须计算动能对广义速度的偏导数, 因此须将动能表为系统的广义速度和广义坐标的函数. 一般说来, 应将系统摆在任意位置来写出这个函数. 但现在所需要的只是碰撞始末两瞬时动能对广义速度的偏导数值, 所以动能表达式必须且只须在包括碰撞始末两瞬时在内的整个碰撞过程这个闭区间内成立. 因此若无外来或内部突加约束, 即若系统在碰撞前后的约束情况不变, 就可不解除约束, 按所给的碰撞位置写出其动能表达式. 这样做比较简便. 如果有外来或内部突加约束, 则碰撞前后的约束情况变了, 这时就须解除突加约束, 并按此计算系统的自由度, 将系统放在各广义坐标均为任意值的一般位置来计算系统的动能. 请看以下两例:

3 根相同的均质杆各长  $l$ , 质量为  $m$ , 互相铰接后放在光滑桌面上,  $O$  处为固定铰支座. 系统原来是静止的, 且  $\angle OAB = \angle ABC = 90^\circ$  (图 1). 设在

$C$  端突然作用一冲量  $S$  如图, 求碰撞终了时 3 杆的角速度.

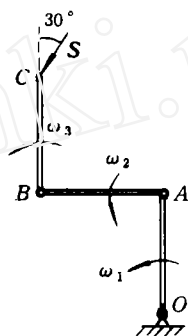


图 1

此系统碰撞前后的约束情况不变, 可按给出的碰撞位置写出其动能表达式. 系统有 3 个自由度, 以 3 杆的角速度  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  为广义速度, 得系统的动能

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left( \frac{ml^2}{3} \right) \omega_1^2 + \frac{m}{2} \left[ (l\omega_1)^2 + \left( \frac{l\omega_2}{2} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{ml^2}{12} \right) \omega_2^2 + \frac{m}{2} \left[ (l\omega_1 + \frac{l\omega_3}{2})^2 \right. \\ &\left. + (l\omega_2)^2 \right] + \frac{1}{2} \left( \frac{ml^2}{12} \right) \omega_3^2 \\ &= ml^2 \left( \frac{7}{6} \omega_1^2 + \frac{2}{3} \omega_2^2 + \frac{1}{6} \omega_3^2 + \frac{1}{2} \omega_1 \omega_3 \right) \end{aligned}$$

据此求出  $\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right)$ 、 $\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right)$ 、 $\Delta \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \right)$  之值及对应于  $\omega_1$ 、 $\omega_2$ 、 $\omega_3$  的广义冲量, 即可由方程 (I) 解得  $\omega_1 = -3S/19ml$ ,  $\omega_2 = 3\sqrt{3}S/8ml$ ,  $\omega_3 = 33S/19ml$ .