偏心压缩可靠性计算的教学探索

李有兴　肖芳淳
(西南石油学院，南充 637001)

为了扩大学生视野，培养学生理论联系实际的能力，开发学生的智力，对材料力学的教学，除了进行正常的课堂教学外，我们还采用了第二课堂教学的办法．在方式上，运用自学、讨论、创新，让学生发挥主体作用，教师定期指导，收到了预期效果，提高了教学质量．现以偏心压缩可靠性计算[1]为例，加以说明．

我们选用厂房中支承吊车梁的立柱作为偏心压缩可靠性计算的实例，激发了学生的学习兴趣，让第二课堂教学得到顺利开展，培养了学生理论联系实际的能力．作法是：首先让学生自学有关工程结构可靠性分析设计的内容，在理解所学知识的基础上，进行讨论，以奠定可靠性计算的理论基础．

学生通过讨论明确偏心压缩立柱的强度计算问题，只要立柱的抗弯刚度较大，就可按压缩和弯曲的组合变形来计算，否则就属压弯杆件的稳定问题，在此不加讨论．

随后提出图示截面 $b \times h$ 的立柱，下端固定，上端在 c 处受偏心距为 e_1 的集中力 P_1 的作用，在 B 处受偏心距为 e_2 的集中力 P_2 的作用，且 $P_2e_2 > P_1e_1$，而 P_1 、 P_2 为彼此独立的随机变量，其作用线均位于立柱的纵向对称面内．已知 P_1 、 P_2 的均值和标准差分别为 μ_{P_1} 、 σ_{P_1}；μ_{P_2} 、 σ_{P_2}，试对立柱 AB 段作可靠性计算．

在学生的创新基础上加以综合，兹介绍如下：

让学生明确传统的设计原则是构件的强度不小于载荷效应，其安全度是用安全系数表示．例如用平均值表达的单一平均安全系数 n 可定义为

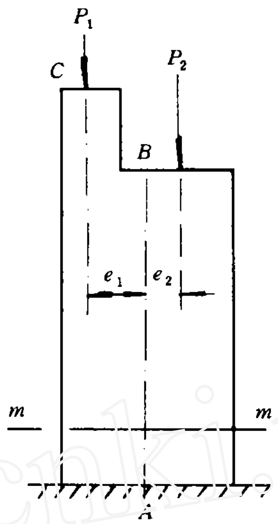
$$n = \frac{\text{强度平均值}}{\text{荷载效应平均值}} = \frac{\mu_G}{\mu_S} \tag{1}$$

其相应的设计表达式为

$$\mu_G \geq n \cdot \mu_S \tag{2}$$

从统计数学观点看，安全系数 n 有两个问题：

(1) 它没有定量考虑强度和荷载效应的随机性，往往靠经验或工程判断的方法取值．因此免不了带有人为因素，甚至主观臆断的成份．



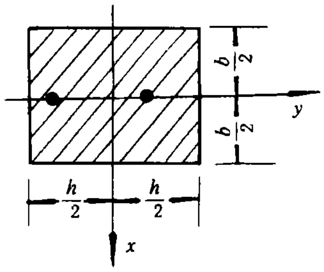


图 1

(2)$n = \mu_G/\mu_S$ 只与 G 和 S 的相对位置有关，而与它们的离散程度 (σ_G 、 σ_S) 无关，这与客观实际不符．为了解决这两个问题，我们便从以下几步着手进行指导学生．

第 1 步　确定最大压应力

在图 1 中，首先将 P_1 、 P_2 看作确定的量，则任一截面 m-m 上由于 P_1 引起的应力[2]为

$$S_{P_1} = -\frac{P_1}{b \times h} \pm \frac{12P_1e_1}{bh^3}y \tag{3}$$

截面 m-m 上由于 P_2 引起的应力为

$$S_{P_2} = -\frac{P_2}{bh} \pm \frac{12P_2e_2}{bh^3}y \tag{4}$$

在小变形情况下，应力可以叠加，于是有

$$S = S_{P_1} + S_{P_2} = -\frac{P_1 + P_2}{bh} \pm \frac{12(P_2 e_2 - P_1 e_1)}{bh^3} y \tag{5}$$

在前式中，由于 $P_2 e_2 > P_1 e_1$，因为要进行立柱的强度计算，所求的是危险截面上危险点的最大压应力，在 (5) 式中右边第二项应取 "–" 号，于是得

$$S_{\max}^{-} = \frac{1}{bh}\left(1 - \frac{6e_1}{h}\right) P_1 + \frac{1}{bh}\left(1 + \frac{6e_2}{h}\right) P_2 \tag{6}$$

第 2 步　计算最大压应力的均值与标准差

为了简化计算，这里只考虑 P_1、P_2 为随机变量，其余均视为常量，故 $S_{\max}^{-}$ 是两个随机变量 P_1、P_2 的函数，其均值和标准差 [3–5] 为

均值

$$\mu_{S_{\max}^{-}} = \left(\frac{1}{bh} - \frac{6e_1}{bh^2}\right)\mu_{P_1} + \left(\frac{1}{bh} + \frac{6e_2}{bh^2}\right)\mu_{P_2} \tag{7}$$

标准差

$$\sigma_{S_{\max}^{-}}^2 = \left(\frac{1}{bh} - \frac{6e_1}{bh^2}\right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{1}{bh} + \frac{6e_2}{bh^2}\right)^2 \cdot \sigma_{P_2}^2 \tag{8}$$

第 3 步　偏心压缩的可靠性分析

假定屈服极限 G 服从正态分布，其均值和标准差为 μ_G、σ_G，则状态函数 [3–5]

$$Z = G - S_{\max}^{-} \tag{9}$$

也服从正态分布，其均值和标准差分别为

$$\begin{aligned} \mu_Z &= \mu_G - \mu_{S_{\max}^{-}} \\ \sigma_Z^2 &= \sigma_G^2 + \sigma_{S_{\max}^{-}}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

由文 [3-5] 得知，立柱的可靠度 R 为

$$R = \int_{\mu_2/\sigma_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{(Z - \mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \mathrm{d}Z$$

引入 "标准化变量"，$t = (Z - \mu_Z)/\sigma_Z, \mathrm{d}_Z = \sigma_Z \cdot \mathrm{d}t$，于是前式变为

$$\begin{aligned} R &= \int_{\mu_Z/\sigma_Z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \Phi\left(-\mu_Z/\sigma_Z\right) = \Phi(-\beta) \end{aligned} \tag{11}$$

式中，$\Phi(\cdot)$ 为标准化正态分布函数.

β 称为可靠性指标，若考虑 (7)、(8)、(10) 三式，则其表达式为

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \\ &= -\frac{\mu_G - \left(\frac{1}{bh} - \frac{6e_1}{bh^2}\right)\mu_{P_1} - \left(\frac{1}{bh} + \frac{be_2}{bh^2}\right)\mu_{P_2}}{\sqrt{\sigma_G^2 + \left(\frac{1}{bh} - \frac{6e_1}{bh^2}\right)^2 \sigma_{P_1}^2 + \left(\frac{1}{bh} + \frac{6e_2}{bh^2}\right)^2 \sigma_{P_2}^2}} \end{aligned} \tag{12}$$

第 4 步　偏心压缩的强度计算

由 (12) 式，并考虑 (10) 式，整理得

$$\frac{\mu_G}{\mu_{S_{\max}^{-}}} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\sigma_G}{\mu_G} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_{S_{\max}^{-}}}{\sigma_G}\right)^2}} \tag{13}$$

若令 $\eta = \beta \cdot \sigma_G/\mu_G = C_G \cdot \beta$，$a = (\sigma_{S_{\max}^{-}}/\mu_{S_{\max}^{-}}/(\sigma_G/\mu_G) = C_{S_{\max}^{-}} \cdot /C_G$，则

$$\frac{\mu_G}{\mu_{S_{\max}^{-}}} = \frac{1 + \eta\sqrt{1 + a^2(1 - \eta^2)}}{1 - \eta^2} \tag{14}$$

若考虑 $a_{P_1} = C_{P_1}/C_G, a_{P_2} = C_{P_2}/C_G$，则有

$$\begin{aligned} \frac{\mu_G}{\mu_{S_{\max}^{-}}} = 1 + \eta\Big\{1 + (1 - \eta^2)\Big[\left(\frac{1}{bh} - \frac{6e_1}{bh^2}\right)^2 a_{P_1}^2 \\ + \left(\frac{1}{bh} + \frac{6e_2}{bh^2}\right)^2 a_{P_2}^2\Big]\Big\}^{1/2} \Big/ (1 - \eta^2) \end{aligned} \tag{15}$$

其相应的强度计算式为

$$\mu_G \geq F_G \cdot \mu_{S_{\max}^{-}} \tag{16}$$

这里 F_G 称为偏心压缩时的强度因子，即

$$\begin{aligned} F_G = 1 + \eta\Big\{1 + (1 - \eta^2)\Big[\left(\frac{1}{bh} - \frac{6e_1}{bh^2}\right)^2 a_{P_1}^2 \\ + \left(\frac{1}{bh} + \frac{6e_2}{bh^2}\right)^2 a_{P_2}^2\Big]\Big\}^{1/2} \Big/ (1 - \eta^2) \end{aligned} \tag{17}$$

从 (16) 式看出，既可作立柱的强度校核，又可作立柱的可靠性设计，有其独特的优越性.

通过这样的教学，我们体会到，若选题得当，学生受益不浅，不仅巩固所学材力的基本内容，还能加深理解，扩大眼界，而且提高了分析和解决实际问题的能力，但还需进一步探索.

参 考 文 献

1 赵国藩等. 工程结构可靠度. 水利电力出版社，1984

2 孙训方等. 材料力学. 人民教育出版社，1979

3 肖芳淳. 价值可靠性计算的理论研究. 强度与环境，1992(1)

4 肖芳淳. 模糊价值可靠性设计及其应用. 第二届全国模糊分析设计学术会议论文集.

5 李有兴. 杆件纵横弯曲时对确定热屈曲临界长度的研究. 西南石油学院学报，1993(1)

(本文于 1993 年 2 月 19 日收到)