



轴对称巷道变形的弹塑性理论分析

刘夕才

(东北大学采矿系, 沈阳 110006)

摘要 本文采用莫尔-库仑准则和非关联流动法则分析了轴对称巷道围岩的变形规律. 从轴对称平面应变问题的基本方程出发, 导出巷道变形的理想弹塑性位移解答, 给出其适用条件和实例计算结果.

关键词 巷道变形, 轴对称问题, 流动法则

1 引言

现有许多文献中关于轴对称巷道变形的解析解均源于经典塑性力学中金属材料 (Mises 材料和 Tresca 材料) 的厚壁圆筒理论解^[1-2]. 然而岩石不同于金属, 它由矿物颗粒和胶结物组成. 照从莫尔-库仑屈服准则和非关联塑性流动法则. 但是, 在莫尔-库仑屈服准则下轴对称巷道的弹塑性平面应变问题, 不仅一般的塑性力学中很少讨论, 即使在岩石力学专著^[2-3]中, 也只给出了卡斯特纳 (Kastner) 应力解, 虽然我国的于学馥教授等^[4]和郑雨天教授^[1]得到了该问题的位移理论解, 但在推导过程中, 仍沿用经典塑性力学中关于塑性区体积不变的假设. 我们在分析由于软岩的弹塑性变形而引起的巷道围岩失稳时发现^[5], 已有的塑性区位移理论解与有限元数值解有较大的误差, 有时相差甚远. 经研究认为, 对于服从莫尔-库仑准则的岩土材料, 求轴对称巷道的弹塑性位移解时, 关于塑性区体积不变的假设既不必要, 也不合理. 而且还发现, 已有的应力解答和位移解答是有其适用条件的. 本文用非关联流动法则, 从轴对称平面应变问题的基本方程出发, 重新推得了轴对称巷道的弹塑性位移解析解, 并给出了适用条件. 通过一个实例的计算表明, 新的塑性区位移解与有限元数值解相当吻合.

2 基本方程

设半径为 a 的圆形巷道受均匀地应力 P_0 和支持力 P_i 的作用. 岩石为均质各向同性的弹塑性介质, 忽略体力, 则该问题可视为轴对称平面应变问题, 其基本方程可写为

1) 平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

2) 几何方程

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2)$$

3) 相容方程

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} = \frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\theta}{r} \quad (3)$$

4) 本构方程

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (4)$$

5) 屈服条件 采用莫尔-库仑准则

$$F(\sigma_{ij}) = \sigma_1 - N\sigma_3 - \sigma_c = 0 \quad (5)$$

式中, $N = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi}$, $\sigma_c = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \phi}{1 - \sin \phi}$, 而 ϕ 与 c 为岩石的内摩擦角和内聚力.

6) 塑性流动法则

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6)$$

式中, $d\lambda \geq 0$ 为比例系数, G 为塑性势函数.

如果 $G \equiv F$, 则称为关联流动法则; 如果 $G \neq F$, 则称为非关联流动法则. 我们取

$$G = \sigma_1 - N_P \sigma_3 - \sigma_P = 0 \quad (7)$$

其中 $N_P = \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi}$, $\sigma_P = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \psi}{1 - \sin \psi}$, 而 ψ 为岩石的塑性膨胀角, 可由三轴压缩屈服实验求得.

3 圆形巷道的弹塑性理论解

为了推得理论解, 先假设 σ_2 为中间主应力, 且 $\sigma_\theta > \sigma_r$, 则 (5) 和 (7) 式可写为

$$F = \sigma_\theta - N\sigma_r - \sigma_c = 0 \quad (5')$$

$$G = \sigma_\theta - N_P\sigma_r - \sigma_P = 0 \quad (7')$$

将 (5') 代入 (1) 式, 并考虑边界应力条件 $\sigma_r|_{r=a} = P_i$, 得塑性区应力解答^[2]

$$\sigma_r = \frac{\sigma_c}{1-N} + \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{N-1} \quad (8a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_c}{1-N} + N \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i\right) \left(\frac{r}{a}\right)^{N-1} \quad (8b)$$

根据弹性理论,并考虑到边界条件 $\sigma_r|_{r \rightarrow \infty} = P_0$ 以及在弹塑性交界面 $r = R$ 处应力连续,弹性区应力解答和塑性半径 R 分别为^[2]

$$\sigma_r = P_0 + \frac{(N-1)P_0 + \sigma_c}{(N+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (9a)$$

$$\sigma_\theta = P_0 - \frac{(N-1)P_0 + \sigma_c}{(N+1)} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (9b)$$

$$k = a \left\{ \frac{2}{(N+1)} \left[\frac{\sigma_c + P_0(N-1)}{\sigma_c + P_i(N-1)} \right] \right\}^{\frac{1}{N-1}} \quad (10)$$

这就是著名的卡斯特纳^[2] 应力解,又称为修正的芬涅尔(Fenner)应力解.

将(7')代入(6)得塑性应变增量

$$d\varepsilon_\theta^P = d\lambda, d\varepsilon_2^P = 0, d\varepsilon_r^P = -N_P d\lambda \quad (11)$$

积分得

$$\varepsilon_\theta^P = \lambda, \varepsilon_2^P = 0, \varepsilon_r^P = -N_P \lambda = -N_P \varepsilon_\theta^P \quad (12)$$

塑性体积应变

$$\varepsilon_v^P = \varepsilon_2^P + \varepsilon_r^P + \varepsilon_\theta^P = (1 - N_P) \lambda \quad (13)$$

另外,考虑到平面应变条件 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^e + \varepsilon_2^P = 0$ 得

$$\varepsilon_2^e = 0 \quad (14)$$

由此得

$$\sigma_2 = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) \quad (15)$$

本构方程(4)式化简为

$$\varepsilon_r^e = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_r - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_\theta \right) \quad (16a)$$

$$\varepsilon_\theta^e = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_\theta - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_r \right) \quad (16b)$$

由(13)、(15)、(16)式得岩石的体积应变为

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^P = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} (\sigma_r + \sigma_\theta) + (1 - N_P) \lambda \quad (17)$$

由此可见,对于服从莫尔-库仑准则的岩石,一般情况下, $\varepsilon_v \neq 0$. 文献[1,4]在假设塑性区体积不变($\varepsilon_v = 0$)条件下获得的位移解答,只在泊松比 $\nu = 0.5$ 和塑性膨胀角 $\psi = 0$ 时才成立. 下面我们放弃这种不合理假设,直接根据轴对称巷道的基本方程,推导弹塑性位移解. 因

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^P, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^P \quad (18)$$

力学与实践

代入(3)得

$$\frac{d\varepsilon_\theta^P}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta^P - \varepsilon_r^P}{r} = -\frac{d\varepsilon_\theta^e}{dr} - \frac{\varepsilon_\theta^e - \varepsilon_r^e}{r} \quad (19)$$

注意到(12)中 ε_θ^P 与 ε_r^P 的关系,上式变为

$$\frac{d\varepsilon_\theta^P}{dr} + \frac{(N_P+1)\varepsilon_\theta^P}{r} = -\frac{d\varepsilon_\theta^e}{dr} - \frac{\varepsilon_\theta^e - \varepsilon_r^e}{r} \quad (20)$$

将(8)代入(16)得塑性区弹性应变

$$\varepsilon_\theta^e = \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \left(N - \frac{\nu}{1-\nu} \right) \left[\frac{\sigma_c}{1-N} + \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} \right] + \sigma_c \right\} \quad (21)$$

$$\varepsilon_r^e = \frac{1-\nu^2}{E} \left\{ \left(1 - N \frac{\nu}{1-\nu} \right) \left[\frac{\sigma_c}{1-N} + \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} \right] - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_c \right\} \quad (22)$$

将(21)、(22)代入(20)求解得

$$\varepsilon_\theta^P = -\frac{1-\nu^2}{E} (N+1) \left[\sigma_c + P_i(N-1) \right] \cdot \frac{1}{N+N_P} \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} + A r^{-(N_P+1)} \quad (23)$$

又,因为在 $r = R$ 处 $\varepsilon_\theta^P = 0$,代入上式确定 A 得

$$A = \frac{1-\nu^2}{E} (N+1) \left[\sigma_c + P_i(N-1) \left(\frac{R}{a} \right)^{N-1} \frac{1}{N+N_P} \right] R^{N_P+1} \quad (24)$$

由(21)、(23)、(24)得塑性区的应变

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^P \quad (25)$$

代入(2)得塑性区的位移公式

$$u = r \cdot \varepsilon_\theta = r(\varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^P)$$

即

$$u = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot r \left\{ \frac{(1-2\nu)\sigma_c}{(1-N)(1-\nu)} - \left(\frac{N^2-1}{N+N_P} - N + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} + \frac{N^2-1}{N+N_P} \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i \right) \left(\frac{R}{a} \right)^{N-1} \left(\frac{R}{r} \right)^{N_P+1} \right\} \quad (26)$$

在弹性区, $\varepsilon_r^P = \varepsilon_\theta^P = \varepsilon_2^P = 0$,将(9)式代入(16b)式得弹性区应变 $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e$,由此得位移 $u = \varepsilon_\theta r$,即

$$u = \frac{1+\nu}{E} r \left\{ (1-2\nu)P_0 + \frac{1}{N+1} \left[\sigma_c + P_0(N-1) \right] \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right\} \quad (27)$$

21

考虑到巷道开挖以前, 在初始地应力 P_0 作用下, 岩石已发生初始变形

$$u_0 = \frac{1+\nu}{E}(1-2\nu)P_0r \quad (28)$$

因此, 由于开挖巷道而引起的围岩位移变化量为

1) 在弹性区

$$\delta = u - u_0 = \frac{1+\nu}{E} \cdot r \cdot \frac{1}{N+1} \left[\sigma_c + P_0(N-1) \right] \left(\frac{R}{r} \right)^2 \quad (29)$$

2) 在塑性区

$$\delta = u - u_0 = \frac{1-\nu^2}{E} \cdot r \left\{ \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left(\frac{\sigma_c}{1-N} - P_0 \right) - \left(\frac{N^2-1}{N+N_P} - N + \frac{\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{N-1} + \frac{N^2-1}{N+N_P} \left(\frac{\sigma_c}{N-1} + P_i \right) \left(\frac{R}{a} \right)^{N-1} \left(\frac{R}{r} \right)^{N_P+1} \right\} \quad (30)$$

4 算例

某软岩巷道的基本参数为: $a = 1.0\text{m}$, $\sigma_c = 6.0\text{MPa}$, $P_i = 0.0\text{MPa}$, $P_0 = 10.0\text{MPa}$, $\psi = 30^\circ$, $E = 1000\text{MPa}$, $\nu = 0.3$.

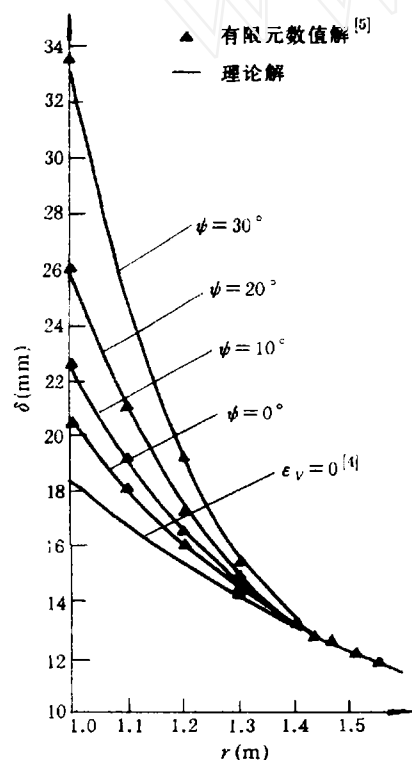


图1 巷道塑性区的位移分布规律

由(1)式得塑性半径 $R = 1.472\text{m}$; 由(30)式得岩石膨胀角 ψ 分别为 $30^\circ, 20^\circ, 10^\circ, 0^\circ$ 时塑性区位移的分布规律. 假设塑性区 $\epsilon_v = 0$ 而得的位移

分布仍由(29)式确定^[4], 这些结果与有限元数值模拟^[5]结果的关系如图1所示. 巷道边界的位移量, 如表1所示.

表1 巷道边界 ($r = a$) 的位移量

ψ	30°	20°	10°	0°	$\epsilon_v = 0$
δ	数值 33.65	26.34	22.63	20.47	—
(mm)	理论 33.64	26.33	22.61	20.43	18.31

5 结论

(1) 对于服从莫尔-库仑准则的岩土材料, 在求解轴对称巷道问题时, 塑性区体积不变的假设既不必要, 也不合理. 已有的塑性区位移解偏小, 与实际结果有较大的误差^[1].

(2) 和已有的理论解^[1,4]相比, 采用非关联流动法则, 这对塑性区位移解和应力解没有影响, 只对塑性区位移解有影响. 本文给出的塑性区位移解修正了已有解的误差, 与有限元数值结果相当吻合.

(3) 本文给出的应力和位移解是有适用条件的. 它们是假设塑性区内 $\sigma_\theta > \sigma_r, \sigma_z = \sigma_2$ 为中间主应力条件推得的, 其条件为^[5]

$$\sigma_c \geq P_0 \left(\frac{1-\nu}{\nu} - N \right) \quad (31)$$

若上式不满足, 则不能保证 $\sigma_z = \sigma_2$, 理论解不成立.

可以证明, 算例满足(31)式的适用条件. 若其它参数不变, 泊松比 $\nu = 0.2$, 则不满足(31)式, 已有的理论解不成立. 这就是理论解与有限元数值解相差甚远的原因.

感谢郑雨天教授审阅了本文的推导过程以及导师林韵梅教授的指导.

参考文献

- 1 郑雨天. 岩石力学的弹塑黏性理论基础. 北京: 煤炭工业出版社, 1988
- 2 耶格 J C, 库克 N G W. 岩石力学基础 (中译本). 北京: 科学出版社, 1981
- 3 科茨 D F. 岩石力学原理 (中译本). 北京: 冶金工业出版社, 1989
- 4 于学馥, 郑颖人, 刘怀恒, 方正昌. 地下工程围岩稳定分析. 北京: 煤炭工业出版社, 1983
- 5 刘夕才, 林韵梅. 大桥煤矿软岩巷道围岩稳定性的有限元数值模拟. 沈阳: 东北大学科研 05033003 报告, 1993,2

(本文于 1993 年 9 月 18 日收到)