《理论力学》学习中常见错误分析之一

—— 动量矩定理的应用

谢正桐　杨海兴

(上海交通大学，上海 200030)

本文根据一道具体习题的求解过程，指出动量矩定理应用中一个应注意的问题：不论是对定点还是对动点，应用动量矩定理必须取一般点而不能取特殊点.

习题　质量为 m_0 、半径为 r 的圆环 O 竖立在一粗糙的平面上. 圆环的边缘上固结一个质量为 m_0 的质点 P(图 1). 试用动量矩定理写出圆环的运动微分方程.

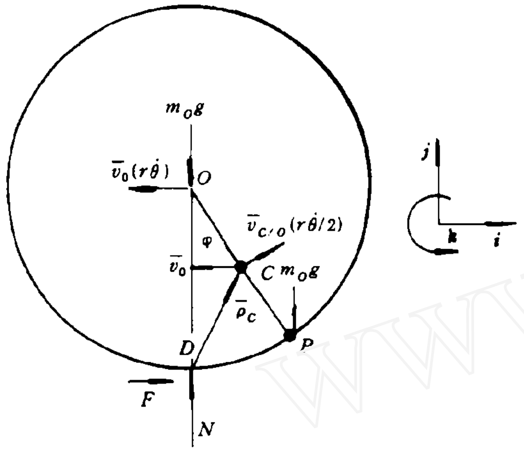

图 1

上述习题中，圆环与质点 P 组成的系统具有一个自由度，取 φ 为独立坐标，利用拉格朗日方程或根据动量定理和相对质心的动量矩定理不难得到以下结果

$$2(2-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+(\dot{\varphi}^2+g/r)\sin\varphi=0 \tag{1}$$

但不符合题意：要求仅用动量矩定理.

按题意求解时，为避免出现约束力，必须对圆环与地面接触点 D 列写动量矩定理. D 点分 3 种情况：

1) 为地面固定点 (定点): $\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{a}_D=0$;

2) 为圆环上的点 (动点): 作摆线运动，$\boldsymbol{v}_D=0, \boldsymbol{a}_D=r\dot{\varphi}^2\boldsymbol{j}$;

3) 为定瞬心迹线上的点 (动点): 作直线运动，$\boldsymbol{v}_D=-r\dot{\varphi}\boldsymbol{i}, \boldsymbol{a}_D=-r\ddot{\varphi}\boldsymbol{i}$.

相应的质点系动量矩定理 [1] 有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_D}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}_D^{(e)} \quad (对固定点) \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_D}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}_D\times m\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{M}_D^{(e)} \quad (对动点的动量矩定理) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_D}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\rho}_C\times m\boldsymbol{a}_D=\boldsymbol{M}_D^{(e)} \quad (对动点的相对动量矩定理) \tag{4}$$

其中 $m=2m_0$, v_C 和 $\boldsymbol{\rho}_C$ 分别为系统质心 C 的速度和 C 相对 D 的矢径

$$\boldsymbol{v}_C=-\frac{1}{2}(2-\cos\varphi)r\dot{\varphi}\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}r\dot{\varphi}\sin\varphi\boldsymbol{j} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\rho}_C=\boldsymbol{DC}=r\sin\varphi\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}r(2-\cos\varphi)\boldsymbol{j} \tag{6}$$

$\boldsymbol{H}_D$ 为系统对 D 点的动量矩，等于圆环和质点 P 对 D 点动量矩的代数和，不论 D 为何点，均有

$$\boldsymbol{H}_D=2(2-\cos\varphi)mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{7}$$

$\boldsymbol{H}'_D$ 为系统对动点 D 的相对动量矩，对不同动点有

$$\boldsymbol{H}'_D=\boldsymbol{H}_D \quad (D为圆环上的点) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{H}'_D=(2-\cos\varphi)mr^2\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \quad (D为定瞬心迹线上的点) \tag{9}$$

$\boldsymbol{M}_D^{(e)}$ 为外力对 D 点的主矩，不论 D 为何点，均有

$$\boldsymbol{M}_D^{(e)}=-mgr\sin\varphi\boldsymbol{k} \tag{10}$$

然而，具体应用这些定理时，却出现了不同的结果：

方法 1. 应用对地面固定点 D 的动量矩定理 (2), 得

$$2(2-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+(2\dot{\varphi}^2+g/r)\sin\varphi=0 \tag{11}$$

方法 2. 应用对圆环上 D 点的动量矩定理 (3), 得

$$2(2-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+(2\dot{\varphi}^2+g/r)\sin\varphi=0 \tag{12}$$

方法 3. 应用对圆环上 D 点的相对动量矩定理 (4), 得

$$2(2-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+(3\dot{\varphi}^2+g/r)\sin\varphi=0 \tag{13}$$

方法 4. 应用对定瞬心迹线上 D 点的动量矩定理 (3), 得

$$2(2-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+(\dot{\varphi}^2+g/r)\sin\varphi=0 \tag{14}$$

方法 5. 应用对定瞬心迹线上 D 点的相对动量矩定理 (4), 得

$$2(2-\cos\varphi)\ddot{\varphi}+(\dot{\varphi}^2+g/r)\sin\varphi=0 \tag{15}$$

与式 (1) 相比，不难得出：式 (14) 、(15) 正确，而式 (11) 、(12) 、(13) 错误.

出错的原因在于求导. 动量矩定理中的求导为保证导函数的连续性，一般是相对于某一个坐标系进行的. 对于定点，是对以定点为原点的惯性坐标系；对于动点，是对以动点为原点的平动坐标系. 不论定点还是动点，在运动过程中都应始终位于所取坐标系的原点. 为方便计，将这种点称为一般点，否则称为特殊点. 由于定瞬心迹线上的 D 点在系统运动的任意时刻均处于圆环与地面的接触点位置，属于一般点，因此结果是正确的. 而地面上的 D 点和圆环上的 D 点仅在图示位置与接触点相重合，一般情况下则远离接触点，属于特殊点. 因此结果是错误的. 为避免这种错误，应该改取地面的 B 点或圆环上的 A 点 (图 2) 列写动量矩定理，求导以后，再将 D 作为 B 或 A 的特殊点代入. 下面取对圆环上 A 点的动量矩定理说明之.

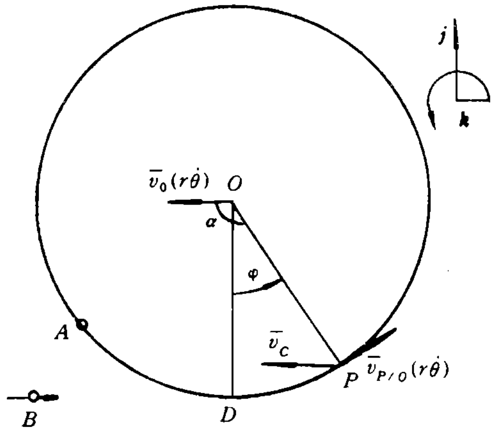

图 2

仍设 φ 为独立坐标，由于 A 与 P 均为圆环上的固定点，因此 OA 与 OB 的夹角 α 为常值，且有 $\alpha=\varphi\big|_{A=D}$. 对圆环上 A 点列写动量矩定理

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{v}_A\times m\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{M}_A^{(e)} \tag{16}$$

对于后 2 项，因不存在求导，取值仍与方法 2 相同

$$\boldsymbol{v}_A\times m\boldsymbol{v}_C\big|_{A=D}=\boldsymbol{v}_D\times m\boldsymbol{v}_C=-m_0r^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\boldsymbol{k} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{M}_A^{(e)}\big|_{A=D}=\boldsymbol{M}_D^{(e)}=-m_0gr\sin\varphi\boldsymbol{k} \tag{18}$$

对于第 1 项，先写出系统对于动点 A 的动量矩

$$\boldsymbol{H}_A=\boldsymbol{H}_A^{(O)}+\boldsymbol{H}_A^{(P)} \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{H}_A^{(O)}$ 和 $\boldsymbol{H}_A^{(P)}$ 分别为圆环 O 和质点 P 对动点 A 的动量矩

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A^{(O)}&=\left[J_0\dot{\varphi}+m_0v_0OA\cos(\alpha-\varphi)\right]\boldsymbol{k}\\&=m_0r^2\dot{\varphi}[1+\cos(\alpha-\varphi)]\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_A^{(P)}=&\left\{m_0(v_{P/O}\cos\varphi-v_0)[\overline{OP}\cos\varphi\right.\\&-\overline{OA}\cos(\alpha-\varphi)]+m_0v_{P/O}\sin\varphi[OP\sin\varphi\\&\left.+\overline{OA}\sin(\alpha-\varphi)]\right\}\boldsymbol{k}\\=&\,m_0r^2\dot{\varphi}[(1-2\cos\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)]\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{21}$$

将式 (20) 、(21) 代入 (19), 然后对时间求导，得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t}=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{2m_0r^2\dot{\varphi}[(1-\cos\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)]\boldsymbol{k}\right\}\\=&\{2m_0r^2\ddot{\varphi}[(1-\cos\varphi)+\cos(\alpha-\varphi)]\\&+2m_0r^2\dot{\varphi}^2[\sin\varphi+\sin(\alpha-\varphi)]\}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{22}$$

对于特殊点 D, 将 $\alpha=\varphi$ 代入上式，得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_A}{\mathrm{d}t}\bigg|_{A=D}=[2m_0r^2\ddot{\varphi}(2-\cos\varphi)+2m_0r^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi]\boldsymbol{k} \tag{23}$$

将式 (17) 、(18) 、(23) 代入定理 (16), 即可得到与 (1) 完全相同的结果.

参 考 文 献

1 刘延柱，杨海兴. 理论力学，北京：高等教育出版社，1991

(本文于 1994 年 3 月 11 日收到)