

经过平移变换

$$x = u + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \varepsilon c} \right), v = y. \quad (12)$$

后, (11) 式变为

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -\sqrt{\frac{1}{4} - \varepsilon c} u + u^2 + \varepsilon(f \cos \omega t - \delta y) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

类似于 [5], 可以求出 δ - f 平面上由 Melnikov 方法给出的 (11) 和 (13) 式的混沌区域分别为

$$\frac{f}{\delta} > R_1(\omega) = \frac{\text{sh}(\pi\omega)}{5\pi\omega^2} \quad (14)$$

$$\frac{f}{\delta} > R_2(\omega) = \frac{(1-4\varepsilon c)^{5/4}}{5\pi\omega^2} \text{sh}\left(\frac{\pi\omega}{(1-4\varepsilon c)^{1/4}}\right) \quad (15)$$

在表 2 中我们计算出 $\frac{R_1(\omega)}{R_2(\omega)}$ 的若干值以做比较.

表 2 (11) 和 (13) 式混沌阈比较

| | -0.10 | -0.05 | -0.01 | 0.01 | 0.05 | 0.10 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 0.1 | 1.396 | 1.198 | 1.041 | 0.962 | 0.802 | 0.603 |
| 0.5 | 1.324 | 1.163 | 1.034 | 0.968 | 0.834 | 0.664 |
| 1.0 | 1.180 | 1.091 | 1.019 | 0.982 | 0.907 | 0.811 |
| 5.0 | 0.429 | 0.624 | 0.896 | 1.110 | 1.863 | 4.487 |
| 10.0 | 0.121 | 0.310 | 0.762 | 1.294 | 4.588 | 38.127 |

从表 2 可知即使当 $|\varepsilon c| < 0.1$ 时, $\frac{R_1(\omega)}{R_2(\omega)}$ 也显著偏离 1.000.

4 讨论

以上两个例子表明由 Melnikov 方法确定的参数空间中混沌区域并不具有平移不变性.

这种现象产生的原因固然与 Melnikov 方法仅是一阶近似有关, 更主要的是对于具体系统, $O(1)$ 与 $O(\varepsilon)$ 并无明显区别, 故未被摄动可积系统中可能含有接近 $O(\varepsilon)$ 的量, 进而使未被摄动可积系统的选择不是唯一的. 例如, (6) 式中 $\varepsilon_1 b = 0, \varepsilon f = 0.25, \omega = 1.0$ 时, 由 Melnikov 方法给出的临界值 $\varepsilon f = 0.188$ 与数值实验结果完全符合 [6]. 因而当 $\varepsilon_1 b = 0.2$ 时, $0.2x^2$ 既可以作为未被摄动可积系统中的一项, 这时对应的临界值为 $\varepsilon f = 0.373$, $0.2x^2$ 也可以做为小摄动中的一项, 相应的临界值仍是 $\varepsilon f = 0.188$, 两者之间有明显的差别. 同时, 由于 $O(1)$ 和 $O(\varepsilon)$ 无明显区别, Melnikov 函数的简单零点应与 ε 无关的要求也难以检验.

参 考 文 献

- 1 李继彬. 浑沌与 Melnikov 方法. 重庆大学出版社, 1989: 102-107
- 2 Ling F H, Bao G W. *Phys Lett*, 1984, 122A: 413-417
- 3 Moon F C, Holmes P J. *J Sound Vib*, 1979, 65: 285-296
- 4 陈立群. 固体力学学报, 1992, 23: 59-63
- 5 陈立群. 物理学报, 1989, 38: 1874-1876
- 6 Guckenheimer J, Holmes P J. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983: 192-193

(本文于 1993 年 3 月 27 日收到)

结构影响图的有限元方法

余蓬英 李明瑞

(北京农业大学, 北京 100083)

摘要 本文提出了一种计算任意结构位移和内力影响图的有限元算法.

关键词 影响线, 有限元, 互等定理

1 引言

在工程实践中除了承受位置固定载荷的作用外, 还可能承受移动载荷的作用, 例如桥梁-行车

等. 在进行这种结构分析时, 需要知道移动载荷在不同位置时结构上某一固定截面的位移、内力以及复杂载荷组合作用的情况. 解决这些和移动载荷有关的问题采用影响线的方法是较为有效的.

在结构力学 [1] 中对影响线的定义是: 当一个单位载荷在结构上移动时, 表示某一固定截面上某一量值 (位移或内力的某一分量) 的变化规律的图

形,称为该量值的影响线.如果我们进一步考虑到二维和三维结构问题时,可以由以上定义推广得出影响面和影响体的概念.我们统称为影响图.

一般在传统结构力学中求影响线时,对于简单静定结构有时可采用求出结构的影响线方程的方法,而对于较复杂的结构来说,还没有很好的方法.本文提出了用有限元方法可以迅速、方便地求出任意类型复杂结构的位移、内力影响图.其基本理论依据是功与位移的互等定理.

2 功和位移的互等定理

由结构力学可知,在线弹性体的情况下,利用变形能的概念,可以导出功的互等定理和位移互等定理.功的互等定理用公式表示为

$$\bar{P}_1 \cdot \bar{\Delta}_{12} = \bar{P}_2 \cdot \bar{\Delta}_{21}$$

其中 \bar{P}_1 和 \bar{P}_2 是作用在结构上两个不同点处的载荷. $\bar{\Delta}_{ij}$ 是 \bar{P}_j 在 i 点引起的位移.当 $P_1 = P_2 = 1$ 时,则有 $\delta_{12} = \delta_{21}$ 这就是位移互等定理.其中 $\delta_{ij}(i, j = 1, 2)$ 是 j 点沿 \bar{P}_j 方向的位移分量.这里应强调指出两点: (1) \bar{P}_i 与 \bar{P}_j 可以是不同性质的力,如一个是切向力另一个是力偶. (2) 位移向量 $\bar{\Delta}_{ij}$ 实际上包含有多个位移成份,但只有沿着 \bar{P}_i 方向的位移分量才能与 \bar{P}_i 共同构成功.

3 位移影响图的有限元方法

为了简单起见以平面梁架结构为例.如果在结构中各点分别加单位力矩,而希望求得 C 截面处的垂直挠度 v_c 的影响线,可以在 C 点加垂直方向的载荷向量 $\bar{P}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 分别求出在 $1, 2, \dots$

各点的位移 $\bar{\Delta}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$, 由位移互等定理可以

得知位移向量 $\bar{\Delta}_i$ 的转角分量 θ_i 在数值上将等于在 i 点加单位力矩而求出的 v_{ci} . 一般而言,在结构上某指定点 c 处加一个单位力 $\bar{P}_c = \bar{e}^{(k)}$, 其中 $\bar{e}^{(k)} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ ($\bar{e}^{(k)}$ 是一个除第 k 个分量为 1, 其他分量为 0 的向量, 这个向量的阶数为 NDF , 即该点的自由度.) 由此求得结构各点的位移向量后, 就相当于分别在结构上各点加 X_i 或 Y_i 或 M_i 时求得的在 C 截面处沿第 k 个位移分量的 3 条位移影响线 (在一般情况下, 求得了 NDF 条位移影响线). 所以我们如果采用有限元方法在作了结构的剖分后, 就能方便地解决位移影响图问题.

4 求内力影响图的有限元方法

用有限元方法求内力影响图. 实质上是要求出某一单元在移动载荷作用下的内力值. 这样就必须知道该单元所联结的各节点的位移值. 现仍以平面梁架为例, 为要求某一单元的内力影响图, 并设该单元的联系节点是 C 与 D 点. 必须知道在梁架上各点分别加某一方向的单位力时, 同时求得 C 点与 D 点的位移向量.

下面用功与位移互等定理来研究这个问题. 如果我们希望求出在 1 点作用 $Y_1 = 1$ 时, C 点的位移向量 (u_c, v_c, θ_c) , 只要在 C 点分别加载荷 $X_c = 1, Y_c = 1, M_c = 1$ 时求出 1 点的三组位移 $(u_{1X}, v_{1X}, \theta_{1X}), (u_{1Y}, v_{1Y}, \theta_{1Y}), (u_{1M}, v_{1M}, \theta_{1M})$, 并从中进行挑选构造一组新的位移向量 (v_{1X}, v_{1Y}, v_{1M}) 即为 C 点在 $Y_1 = 1$ 作用下的位移向量.

推广到一般情况, 如要在 i 点加载 $\bar{P}_i = \bar{e}_i^{(k)}$ 希望求出在 C 点的各位移向量 $\bar{\Delta}_C = (u_1, u_2, \dots, u_{NDF})^T$, 则应在 C 点分别加以 $\bar{P}_c = \bar{e}^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, NDF$) 而求 i 点的 NDF 组位移向量

$$\bar{\Delta}_{ic} = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iNDF} \end{bmatrix}^{(m)} \quad (m = 1, 2, \dots, NDF)$$

再分别取出其中的第 k 个分量, 构成一个向量

$$\bar{\Delta}_c = \begin{bmatrix} u_{ik}^{(1)} \\ u_{ik}^{(2)} \\ \vdots \\ u_{ik}^{(m)} \end{bmatrix}$$

这个向量即为所求 C 点的位移向量, 我们可用同样的方法求出 D 点的位移向量, 对于更复杂的结构而言, 设所求单元的节点数为 NEN , 每个节点有 NDF 个自由度, 则应分别在该单元的各个节点上依次加上 $\bar{e}_j^{(m)}$ 载荷 ($j = 1, 2, \dots, NEN, m = 1, 2, \dots, NDF$). 然后求出相应的 $NEN * NDF$ 组位移, 再分别进行挑选并重组位移向量即可.

5 有限元程序设计要点

5.1 位移影响图

要求出在结构各点处加第 k 个方向单位力而在某一截面 C 处第 i 个位移分量 u_i 的影响图, 一般而言, 可用任意现有的有限元程序计算在 C 点处

加 $\bar{e}_c^{(i)}$ 而求结构各点处的位移, 按照计算要求, 将各点位移向量中的第 k 个分量挑选出来即可.

5.2 内力影响图

a. 如果要求出在各点加单位力 $\bar{e}^{(m)}$ 时, 第 n 号单元的内力影响图, 则应给出信息 m 与 n .

b. 由单元联系信息求出该单元的节点号, 节点坐标, 材料信息及单元类型.

c. 分别在该单元的 NEN 个节点上逐个加以沿第 k 个自由度方向的单位力 $\bar{e}_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, \dots, NEN, k = 1, 2, \dots, NDF$), 共 $NEN * NDF$ 组载荷.

d. 分别求出各组载荷下在 i 点 ($i = 1, 2, \dots, NUMNP$) 的位移向量, 其中 $NUMNP$ 是结构中全部节点数.

e. 从已求出的各组位移中, 挑出各节点位移向量中的第 m 个位移分量, 重新构造一个位移向量 $U(NDF, NEN, NUMNP)$. 例如, 由单元的第 j 点加 $\bar{e}_j^{(k)}$ 时得出了第 i 点的位移后, 挑选出第 m 个分量, 应将其存放在 $U(k, j, i)$ 处.

f. 将上面挑选得到的数组 U , 逐个取出第 i 点的位移, 作为单元节点位移数组 $U^e(NDF, NEN)$, 由此可计算出单元内力, 即为所求.

参 考 文 献

1 潘亦培, 朱伯欣主编. 结构力学. 高等教育出版社, 1985, 131: 220-222

(1993年8月12日收到第1稿,
1993年11月20日收到修改稿)

新的迭代法及其在力学中的应用

袁 轶 吾

(中南工业大学, 长沙 410012)

1 引 言

试求解方程

$$f(x) = 0 \quad (1)$$

先把上式化成下列形式

$$-(a + bx + cx^2) = g(x) \quad (2)$$

式中, a 、 b 、 c 均为任意常数; $f(x)$ 及 $g(x)$ 则均为 x 的任意函数.

设已知式 (1) 的一个近似根 x_0 , 则函数 $g(x)$ 在点 x_0 附近可用泰勒多项式表示为

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}g''(x_0)(x - x_0)^2 + O(\epsilon^3) \quad (3)$$

式中, $\epsilon = x - x_0$ 设定为小量, 标号“'”表示对 x 求导一次. 将上式代入式 (2) 得 x 的二次方程, 解得 x 后, 可得迭代公式为

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{b + g'(x_k) - x_k g''(x_k)}{c + (1/2)g''(x_k)} \pm \left[\left(\frac{b + g'(x_k) - x_k g''(x_k)}{c + (1/2)g''(x_k)} \right)^2 - 4 \left(\frac{a + g(x_k) - x_k g'(x_k) + \frac{1}{2}x_k^2 g''(x_k)}{c + (1/2)g''(x_k)} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

$$= g_1(x_k) \quad (4)$$

可以证明 (见附录 1), 在所论近似范围内, 迭代公式 (4) 是收敛的.

2 求解奇异代数方程

设有方程

$$\epsilon x^4 + \epsilon x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (5)$$

式中, ϵ 为微量, 试求其根.

将式 (5) 改写成

$$x^2 - 2x + 1 = \epsilon x^4 + \epsilon x^3 \quad (6)$$

将上式右端在 x_0 附近展为泰勒级数得

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - 3(2\epsilon x_0^2 + \epsilon x_0) \\ B &= -2 + 8\epsilon x_0^3 + 3\epsilon x_0^2 \\ C &= -3\epsilon x_0^4 - \epsilon x_0^3 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

现求 x_0 . 设 $x = 0(\epsilon^{-1})$, 即 $x \gg 1$, 则式 (5) 的左边可略去 $2x - 1$ 而得 (设 $x \neq 0$)

$$x_0 = (-1 \pm \sqrt{1 + 4/\epsilon})/2 \quad (9)$$