



水平管中受压扭细长圆杆(管)的几何非线性弯曲

李子丰 马兴瑞 黄文虎

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150006)

摘要 本文建立了水平管中受压扭细长圆杆(管)几何非线性弯曲的微分方程和边界条件, 作为特例分析了无重受压扭圆杆(管)的螺旋弯曲.

关键词 杆, 非线性, 屈曲, 失稳, 稳定性

1. 前言

石油工程中的钻柱、套管柱、油管柱和抽油杆柱在水平井筒中工作时经常处于压扭状态, 对它们的受力和变形状态进行较精确的分析有助于进行优化设计.

1962年, Lubinski 首先用能量法分析了无重油管柱的螺旋弯曲, 求得了螺距与轴向压缩力的数学关系. 1964年, Paslay 用能量法分析了斜圆柱约束下圆杆的稳定问题^[1]. 1984年 Dawson 将 Paslay 的结果进行了一些技术处理得到了斜直井杆管柱失稳载荷的较简单计算公式^[3]. Mitchell 利用力学基本方程分析了螺旋弯曲的轴向载荷、接触压力和内力等^[2,4,5]. 1990年, Chen Yu-Che 推导了正弦弯曲和螺旋弯曲的临界弯曲压力的公式, 并用实验进行了验证^[6]. 上述研究中都采用了小变形假设. 本文则放弃了小变形假设, 建立了水平管中受压扭

细长圆杆(管)几何非线性弯曲的微分方程和边界条件, 作为特例分析了无重受压扭圆杆(管)的螺旋弯曲.

本文采用如下基本假设:

- (1) 细长圆杆(管)处于线性弹性状态;
- (2) 细长圆杆(管)的横断面为圆形或圆环形;
- (3) 细长圆杆(管)被压扭缩成螺旋状或正弦状, 并与约束圆管均匀接触;
- (4) 约束圆管为直的并水平放置;
- (5) 忽略细长圆杆(管)与约束圆管之间的滑动摩擦力;
- (6) 杆(管)柱沿其自身轴线的长度不变.

2. 数学模型

2.1 参考坐标系

2.1.1 空间笛卡尔直角坐标系

空间笛卡尔直角坐标系 $OXYZ$, 如图 1 所示. 其中 O 取在约束圆管轴线上, 一个螺距的左端, X 轴垂直向下, 单位矢量为 i , Z 轴沿约束圆管轴线向右, 单位矢量为 k , Y 轴由右手法则确定, 单位矢量为 j .

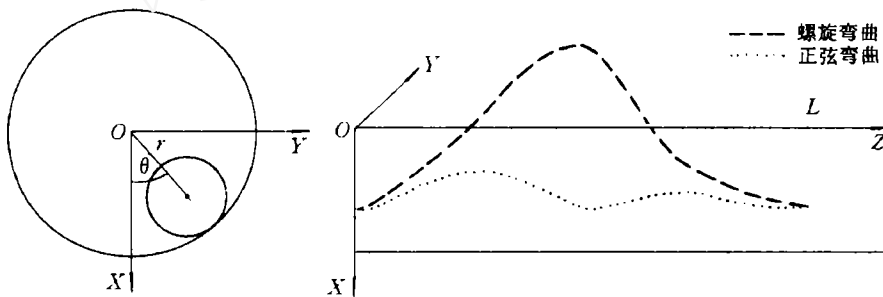


图 1

2.1.2 柱坐标系

柱坐标系的原点与直角坐标系 $OXYZ$ 的原点一致, 柱坐标系的极轴与直角坐标系 $OXYZ$ 的 X 轴一致, 柱坐标系的 Z 轴与直角坐标系 $OXYZ$ 的

Z 轴一致, 极角如图 1 所示.

2.2 微分方程

设细长圆杆(管)的轴线用 $R = Ui + Vj + Wk$ 表示, 则根据力平衡方程

$$\frac{d\mathbf{F}}{dl} = \mathbf{H} + \mathbf{h} \quad (1)$$

式中 \mathbf{F} 为内力矢量; \mathbf{H} 为体积力矢量; \mathbf{h} 为表面力矢量; l 为沿杆(管)轴线的长度; 力矩平衡方程

$$\frac{d\mathbf{M}}{dl} = \mathbf{F} \times \mathbf{t} \quad (2)$$

式中 \mathbf{M} 为内力矩矢量; \mathbf{t} 为轴向的切向量; 和本构方程

$$\mathbf{M} = EI \left(\mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{t}}{dl} \right) + GJ \frac{d\gamma}{dl} \mathbf{t} \quad (3)$$

式中 E 为弹性模量; G 为剪切弹性模量; I 为截面惯矩; J 为截面极惯矩; γ 为扭转角. 以及假设条件, 推导出细长圆杆(管)的轴线三维几何非线性弯曲的微分方程

$$(V'W'''' - W'V'''')EI + TU'' = F_Y W' - F_Z V' \quad (4)$$

$$(W'U'''' - U'W'''')EI + TV'' = F_Z U' - F_X W' \quad (5)$$

$$(U'V'''' - V'U'''')EI + TW'' = F_X V' - F_Y U' \quad (6)$$

$$\sqrt{U^2 + V^2} = r \quad (7)$$

$$\sqrt{(U')^2 + (V')^2 + (W')^2} = 1 \quad (8)$$

$$F_X = F_{X_0} - \int_0^1 (P + h_X) dl \quad (9)$$

$$F_Y = F_{Y_0} - \int_0^1 h_Y dl \quad (10)$$

$$F_Z = F_{Z_0} \quad (11)$$

式中:

$$(\cdot)' = \frac{d(\cdot)}{dl}, \quad (\cdot)'' = \frac{d^2(\cdot)}{dl^2}, \quad (\cdot)''' = \frac{d^3(\cdot)}{dl^3}$$

F_X, F_Y, F_Z 为 \mathbf{F} 在 X, Y, Z 方向的分量; $F_{X_0}, F_{Y_0}, F_{Z_0}$ 为 \mathbf{F} 在原点处沿 X, Y, Z 方向的分量; h_X 为 \mathbf{h} 在 X 方向的分量; h_Y 为 \mathbf{h} 在 Y 方向的分量; P 为单位长度的重度; r 为水平管半径与细长圆杆管半径之差; T 为所受扭矩; 由图可知

$$U = r \cos \theta, \quad V = r \sin \theta \quad (12)$$

$$h_X = -N \cos \theta, \quad h_Y = -N \sin \theta \quad (13)$$

其中 θ 为极角; N 为水平管与细长杆(管)柱之间的正压力. 将(12)、(13)代入(4)-(11), 经整理得

$$\begin{aligned} & EI \left[\left(\frac{W'''\theta'}{W'} \right)' - \theta'''' + 6(\theta')^2 \theta'' \right] \\ & + \frac{1}{W'} \theta'' (F_Z - 3T\theta') + \frac{W''}{(W')^2} \theta' (T\theta' - F_Z) \\ & = \frac{P \sin \theta}{r} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} N = P \cos \theta + r \left\{ EI \left[-\frac{W''''}{W'} (\theta')^2 - (\theta')^4 + 3(\theta'')^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4\theta' \theta'''' \right] + \frac{1}{W'} \left[T(\theta')^3 - T\theta'''' - F_Z (\theta')^2 \right] \right. \\ \left. + \frac{TW''\theta''}{(W')^2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, $W' = \sqrt{1 - (r\theta')^2}$. (14) 式用于求解 θ , (15) 式用于计算压力 N . 在 $|r\theta'| \ll 1$, 即 $\theta' \approx 0$ 的条件下, 可近似取 $W' = 1, W'' = W''' = 0$, 则上述二式可简化为几何线性分析的微分方程.

2.3 边界条件

在本文假设条件下, 细长杆(管)柱弯曲的波形具有周期性, 依据图 1, 有如下边界条件

$$\mathbf{R}(0) = r\mathbf{i} \quad (16)$$

$$\mathbf{R}(0) + Z\mathbf{k} = \mathbf{R}(L) \quad (17)$$

$$\mathbf{R}'(0) = \mathbf{R}'(L) \quad (18)$$

$$\mathbf{R}''(0) = \mathbf{R}''(L) \quad (19)$$

$$\mathbf{R}'''(0) = \mathbf{R}'''(L) \quad (20)$$

其中, Z 为细长杆(管)柱弯曲波形的螺距; L 为一个螺距内杆(管)柱沿其轴线的长度.

若用柱坐标表示则为

$$\theta(0) = 0, \quad W(0) = 0 \quad (21)$$

$$\theta(L) = 2\pi n \quad (\text{正弦弯曲 } n = 0, \text{ 螺旋弯曲 } n = \pm 1)$$

$$W(L) = Z \quad (22)$$

$$\theta'(0) = \theta'(L) \quad (23)$$

$$\theta''(0) = \theta''(L) \quad (24)$$

$$\theta'''(0) = \theta'''(L) \quad (25)$$

如果根据该模型求得的 N 有负值存在, 则细长杆(管)柱的实际变形与本文假设不符, 需另行研究.

3. 无重细长圆杆(管)的螺旋弯曲

无重细长圆杆(管)的螺旋弯曲是杆柱力学的基本内容之一, 在本文的假设条件下, 无重细长圆杆(管)变形后的轴线为等螺距螺旋线, θ' 为常数, $\theta'' = 0$ 和 $\theta''' = 0$.

忽略圆杆管的重量, 对(14)进行积分, 再将 $\theta'' = 0$ 和 $\theta''' = 0$ 代入, 得

$$2EI(\theta')^3 \sqrt{1 - (r\theta')^2} - 2T(\theta')^2 + F_Z \theta' + T/r^2 = C$$

在 $\theta' = 0$ 的特殊条件下求得 $C = T/r^2$, 从而

$$2EI(\theta')^3 \sqrt{1 - (r\theta')^2} - 2T(\theta')^2 + F_Z \theta' = 0 \quad (26)$$

$$N = r \{ -EI(\theta')^4 + [T\theta' - F_Z](\theta')^2 / W' \} \quad (27)$$

根据边界条件 (21)–(25) 以及 θ' 为常数的假定, 求得

$$L = \sqrt{Z^2 + (2\pi r)^2} \quad (28)$$

$$\theta' = \pm 2\pi/L \quad (29)$$

3.1 若扭矩 $T = 0$ 则

$$F_Z = -8EI\pi^2 Z/[Z^2 + (2\pi r)^2]^{1.5} \quad (30)$$

$$N = 16\pi^4 r EI/[Z^2 + (2\pi r)^2]^2 \quad (31)$$

(1) 轴向力的最大(负)值

$$F_Z = -4EI/(3\sqrt{3}r^2) \quad (32)$$

此时 $Z = \sqrt{2}\pi r, N = 4EI/(9r^3)$.

(2) 侧向正压力的最大值

$$N = EI/r^3 \quad (33)$$

此时 $Z = F_Z = 0$.

3.2 若轴向力 $F_Z = 0$ 则

$$T = \pm 2\pi EIZ/[Z^2 + (2\pi r)^2] \quad (34)$$

$$N = 0 \quad (35)$$

当 $Z = 2\pi r$ 时, T 的绝对值最大

$$|T| = EI/2r \quad (36)$$

参 考 文 献

- [1] Paslay P R and Bogy D B. The stability of a circular rod laterally constrained to be in contact with an inclined circular cylinder. *Journal of Applied Mechanics*, 1964: 605–610
- [2] Mitchell R F. Buckling behavior of well tubing: the packer effect. *Society of Petroleum Engineers Journal*, Oct 1982: 616–624. /SPE 9264
- [3] Dawson Rapiet and Paslay P R. Drillpipe buckling in inclined holes. *Journal of Petroleum Technology*, Oct 1984: 1734–1738. /SPE 11167
- [4] Mitchell R F. Simple frictional analysis of helical buckling of tubing. *SPE Drilling Engineering*, Dec 1986: 457–465. /SPE 13064
- [5] Mitchell R F. New concepts for helical buckling. *SPEDE*, 1988: 303–310
- [6] Chen Yu-Che, Lin Yu-Hsu and Cheatham J B. Tubing and casing buckling in horizontal wells. *JPT*, Feb. 1990: 140–141, 191
- [7] 李子丰, 刘希圣. 导向钻具组合三维小挠度力学分析. *石油钻探技术*, 1993(2)
- [8] 赵国珍, 龚伟安. *钻井力学基础*. 石油工业出版社, 1988

(本文于 1993 年 9 月 2 日收到第一稿,
1993 年 12 月 27 日收到修改稿)

混合型裂纹的一个新的启裂准则

陈增涛 王 铎

(哈尔滨工业大学, 哈尔滨 150006)

摘要 本文利用两个基本假设, 给出了混合型裂纹的启裂准则. 与实验结果的比较证明用本准则分析混合型裂纹问题是有效的.

关键词 应变能密度, 断裂, 有效应力

1. 引 言

混合型裂纹的开裂准则的研究已有近 30 年历史了^[1-4]. 然而以往的工作均单一的从应力或能量(应变能、应变能密度等)出发, 给出开裂方向和启裂准则. 这在对开裂方向和启裂条件假设的解释中总是存在难以捉摸的问题, 如 S 准则中的应变能密

度因子是一个缺乏明确物理意义的量. 在细观力学研究中^[5], 裂纹尖端处的材料总是处在损伤状态, 其性质是同时存在塑性和弹性, 且具有极高的应变率(对扩展裂纹). 细观力学中的一个重要参量, 同时也是塑性理论中的重要参量, 即等效应力可以引入断裂判据中. 本文基于以上思考, 考虑以下两个假定: (1) 裂纹沿裂尖到等应变能密度线最近的方向开裂; (2) 当上述方向裂尖附近的有效应力达到 I 型裂纹的临界拉应力时裂纹发生初始扩展, 从而得到一种全新的混合型断裂准则. 通过与实验结果的比较, 证明了准则有效性.