用压缩法求解三维刚体的转动惯量

吴 文 旺

(石家庄铁道学院物理教研室，石家庄 050043)

求解刚体转动惯量的垂直轴定理 $I_z = I_x + I_y$ 只适用于平面薄板情况．我们可以把 I_x 想象成薄板的质量全部压缩到 y 轴的一根细棒上 (一般情况细棒密度非均匀) 绕 x 轴的转动惯量，即 $I_x = \int y^2 \mathrm{d}m(y)$．既然全部质量已在一根细棒上，那么这根细棒绕 x 轴的转动惯量与绕 xoz 平面内与棒相交的任意轴 (包括特殊方向的轴 z 轴) 的转动惯量都是相等的．我们把其绕 z 轴的转动惯量记为 I_1，同理对应于 I_y 的记为 I_2，有 $I_z = I_1 + I_2$．I_1, I_2 虽然与 I_x 、 I_y 分别相等，但它们的意义是不同的．事实上现在已经不存在 “垂直轴” 了．对于三维刚体，我们可以看成由许多平行于 xoy 平面的薄板组成，每个薄板绕 z 轴的转动惯量为 $\mathrm{d}I_z = \mathrm{d}I_1 + \mathrm{d}I_2$，此式对于每个平面薄板均成立．积分后所得到的公式仍为 $I_z = I_1 + I_2$．虽然公式的形式如前，但这时的公式对于任意形状的三维刚体都是适用的，不过 I_1 、 I_2 应是将质量分别压缩到 yoz 和 xoz 平面上的平面薄板绕 z 轴的转动惯量 (谓之压缩法)．本方法在求解平面薄板物体的转动惯量时，常比垂直轴定理简便、直观，更重要的是，对于三维刚体垂直轴定理已无法直接应用．推广了的垂直轴定理 [1] 在某些情况下 (如旋转体) 应用显得简便，本方法 (可与之相互补充) 在不少情况下 (特别是规则形状) 可以方便地求解三维刚体的转动惯量．限于篇幅，不再举例说明．

参 考 文 献

[1] Mckelvey J P. A generalization of the perpendicular axis theorem for the rotational inertia of rigid bodies, *Am. J. Phys.*, 1983, 51(7): 658

(本文于 1993 年 3 月 9 日收到第一稿，1993 年 7 月 20 日收到修改稿)

由运动曲面的方程能得到什么？

翟 大 熙

(华中理工大学，武汉 430074)

在一本流体力学教科书中有一道习题：

若可变椭球面

$$\frac{x^2}{a^2k^2t^4} + kt^2\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 1$$

是一个流体在 t 时可能的边界面，设 u, v, w 是边界面上的速度分量．试决定 u, v, w．

而在一本习题集中，则以此题作为例题给予了解答．其解法如下：

取椭球面上的曲线坐标 (θ, φ) 为变量，把椭球面方程写成参数形式

$$\begin{cases} x = akt^2\cos\theta \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{kt}}\sin\theta\cos\varphi & (0 \le \theta \le \pi) \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{kt}}\sin\theta\sin\varphi & (0 \le \varphi \le 2\pi) \end{cases}$$

该解法随即实质上断言上式表示了椭球面上的物质点的位置随时间的变化规律，并在运动过程中保持 θ, φ 不变．然后根据在流动边界上速度连续的要