

从(6)式可见,只要给定 μ, m, x_0, k 的值,就可以求出 n (n 取整数.用四舍五入法求得一个数)就解出 x_f .

(5)式还可用来求振时测物体间的小摩擦系数 μ ,如在气垫导轨的实验中,运动物块和导轨间等效阻尼系数的测定,可用这一公式来测定.

3. 用函数图像法找 x_f

因为 μ, m, k 一定, x_f 就是初始条件 x_0 的函数.设 $x_f = F(x_0)$,而且该函数具有对称性,即 $F(x_0) = -F(-x_0)$,是一奇函数, b/ω_0^2 是 x_f 的最大值,用 d 表示.

对 $0 \leq x_0 \leq d$,在何处放手就停于何处,对 $x_0 > d$,设 $x_0 = d + \alpha$ ($\alpha > 0$),且设物块下一个速度为零的位置为 x_{10} ,则由功能原理得

$$\frac{1}{2}k(d + \alpha)^2 = \frac{1}{2}kx_{10}^2 + \mu mg(d + \alpha - x_0)$$

式中 $\mu mg = kd$,解出

$$x_{10} = d \pm \alpha$$

舍去不合理的“+”号,求得

$$x_{10} = d - \alpha = 2d - x_0$$

对 $d \leq x_0 \leq 3d$,停点 $x_f = x_{10} = 2d - x_0$,如图2中AB直线.而对 $x_0 > 3d$ 时,左边的第一个停点 $x_{10} < -d$,物块到 x_{10} 后又将反向运动,其下一个停点是 x_{20} ,可由本题的对称性按初位移: $x_{20}^* = -x_{10} = x_0 - 2d > d$,变到原点右方,则

$$x_{20} = -(2d - x_{20}^*) = x_0 - 4d \quad (7)$$

(7)式即图2中的BC直线,这也表明了若 $x_0 > 4d$ 时, $F(x_0)$ 是 x_0 的周期函数,其周期为 $4d$,图2即为 x_f 与 x_0 的函数图像关系.

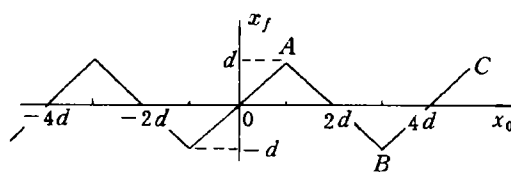


图2

在一个周期 $[0, 4d]$ 上,其解析表达式为

$$F(x_0) = \begin{cases} x_0 & [0, d) \\ 2d - x_0 & [d, 3d) \\ x_0 - 4d & [3d, 4d) \end{cases}$$

因而周函数图像找 x_f 是方便的,只要去掉周期的整数部分,在一个周期内讨论,马上可以从图像的直线上找出 x_f 来.

参 考 文 献

- [1] 朱照宣等. 理论力学. 北京大学出版社, 1982: 310-313
- [2] Barratt C et al. Sliding friction and harmonic oscillation. *A M J phy*, 1981: 500-501

(本文于1993年5月23日收到第一稿,
1993年9月25日收到修改稿)

圆截面压杆稳定设计的简便方法

王世华

(山西太谷利民机械厂职工中专, 太谷 030800)

在“压杆稳定设计的优化方法”(力学与实践1992(2))一文中,作者应用优选法的原理提出一种“收敛较快”的试算法,即大柔度杆的0.34法及中等柔度杆的0.8法.并举例与传统的均值法对比说明.实际上文中忽略了一个如何区分大柔度杆及中等柔度杆的过程.在试算前并不知道所设计压杆属于大

柔度杆还是中等柔度杆.也就无法选定 $\varphi_0 = 0.34$,还是 $\varphi_0 = 0.8$.如果事先知道柔度值多大也就不必试算了.一次即可求出截面尺寸.

如何才能更快、更简便地设计出符合稳定条件的压杆呢?很多人进行了大量探索.目前主要有两

类方法。一类是直接法，此类方法的优点是不必试算，一次即可求得压杆截面尺寸。其中有很多优秀之作。如吴荣礼同志提出的“几种常用截面压杆设计的一种简便方法”(力学与实践, 1981(4)), 但这类方法一般预先要对不同材料、不同柔度、不同类型的压杆分别建立不同的公式或图表, 甚至还要建立一些新的系数表以备查用。计算公式也比较复杂。从应用的角度看显得不够方便。第二类是试算法。传统的试算法由于稳定系数 φ 取值的不定性, 使试算过程繁琐。但通用性强, 不必另外建立公式或系数表。如果能克服不定性, 加强针对性, 便更能显示出这类方法的优越性。按照这一思路, 笔者深入研究了各类材料的 φ - λ 曲线。得出一种圆截面压杆稳定设计的简便方法。实践证明, 对于一般问题只需二次试算即可获得满意结果。大大提高了设计效率。

1. 原理及方法

1.1 取初值 $\varphi_1 = 0.47$ (区别于传统试算法初值 $\varphi_1 = 0.5$) 此值为木材大柔度杆 $\lambda > 80$ 及中等柔度杆 $\lambda \leq 80$ 分界处 $\lambda = 80$ 的稳定系数。对于 A3 钢, 大致为 $\lambda = 120$ 。取此值试算一次可起到投石问路的作用。如果试算结果得出实际压杆的 φ'_1 小于 0.47。此压杆必定属于大柔度杆。其 φ 的精确值 (也就是满足设计要求的压杆的稳定系数 φ , 记为 $\varphi_{\text{精}}$) 就在 0.47 以下, 反之, 则在 0.47 以上。将试算范围缩小一半左右。

1.2 取继值 φ_2 , 分两种情况: (a) 当第一次试算得出 $\lambda'_1 > 60$ 时, 取 $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda'_1}$ 所对应的 φ 作为第二次试算的假设值 φ_2 ; (b) 当第一次试算得出 $\lambda'_1 \leq 60$ 时, 取 $\lambda_2 = \sqrt{2} \lambda'_1$ 所对应的 φ 做为第二次试算的假设值 φ_2 。

理论依据: 对于圆型压杆有 $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]\varphi}}$ 。

令 $\alpha = \sqrt{\frac{4\pi[\sigma]}{P}}(\mu l)$, 则

$$\lambda = \alpha \sqrt{\varphi} \quad (1)$$

对于细长木压杆, 有

$$\varphi = k/\lambda^2 \quad (2)$$

若取 $\varphi_1 = n\varphi_{\text{精}}$ 代入 (1) 有

$$\lambda'_1 = \sqrt{n} \lambda_{\text{精}} \quad (3)$$

代入 (2) 有

$$\lambda_{\text{精}} = \sqrt{n} \lambda_1 \quad (4)$$

从式 (3)、(4) 消去 \sqrt{n} 有 $\lambda_{\text{精}} = \sqrt{\lambda_1 \lambda'_1}$, 此关系式在大柔度范围内比较准确。中等柔度杆没有关系式 (2), 那么在什么范围内可近似用此关系式呢? 以木材压杆为例, 经试算当 $\lambda = 60$ 时用大柔度杆公式 $\varphi = 3000/\lambda^2$ 得出 $\varphi = 0.833$, 用中等柔度杆公式 $\varphi = 1.02 - 0.55 \left(\frac{\lambda + 20}{100}\right)^2$ 得出 $\varphi = 0.822$, 两者基本相等。那么在 $\lambda > 60$ 时, 用以上公式 $\lambda_{\text{精}} = \sqrt{\lambda_1 \lambda'_1}$ 试算误差不大。当 $\lambda'_1 \leq 60$ 时, 只用关系式 (1), 此时 $\varphi_1 \approx \frac{1}{L} \varphi_{\text{精}}$ 由关系式 (1) $\lambda'_1 = \sqrt{n} \lambda_{\text{精}}$ 得出 $\lambda_{\text{精}} = \sqrt{2} \lambda'_1$ 。

2. 计算实例

例 1 A3 钢圆截面压杆如图 1 所示, 已知 $l = 800\text{mm}$, $P = 100\text{kN}$, 钢许用应力 $[\sigma] = 170\text{MPa}$, 试设计压杆直径 d 。



图 1

解 令 $\varphi_1 = 0.47$ 。得 $d_1 = \sqrt{\frac{4P}{\pi\varphi_1[\sigma]}} = 40\text{mm}$ 。

此杆柔度 $\lambda'_1 = \frac{\mu l}{i} = \frac{4 \times 2 \times 800}{40} = 160$, 对应的 $\varphi'_1 = 0.272$ 。此时不满足稳定条件。取 $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda'_1} = \sqrt{120 \times 160} = 139$ 对应的 $\varphi_2 = 0.354$ 继续试算, 得 $d_2 = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]\varphi_2}} = 46\text{mm}$ 。 $\lambda'_2 = \frac{\mu l}{i} = 139$, $\varphi'_2 = 0.354$ 。验算满足稳定条件。

例 2 其它条件如例 1, 长度 $l = 500\text{mm}$ 。试设计压杆直径。

解 令 $\varphi_1 = 0.47$, 得 $d_1 = 40\text{mm}$, $\lambda'_1 = \frac{\mu l}{i} = 100$, $\varphi'_1 = 0.604$ 。此时验算离稳定条件较远, 再试算一次, 取 $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1 \lambda'_1} = \sqrt{100 \times 120} = 110$ 对应的 $\varphi_2 = 0.536$, 得 $d_2 = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]\varphi_2}} = 37.5\text{mm}$, $\lambda'_2 = \frac{\mu l}{i} = \frac{8 \times 500}{37.5} = 107$, $\varphi'_2 = 0.556$ 。误差在 5% 以内满足稳定条件。

例 3 其它条件如例 1, $l = 150\text{mm}$, 设计压杆直径。

解 令 $\varphi_1 = 0.47$, 得 $d_1 = 40\text{mm}$, $\lambda'_1 = \frac{\mu l}{i} = 30$. 因 $30 < 60$, 取 $\lambda_2 = \sqrt{2}\lambda'_1 = 42$ 对应的 $\varphi_2 = 0.92$ 进行第二次试算, 得 $d_2 = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]\varphi}} = 29\text{mm}$, $\lambda'_2 = \frac{\mu l}{i} = 42$, 完全满足设计要求. 通过以上例题可见, 由于第二次试算 φ 取值有据可依, 具有

针对性, 所以收敛很快. 一般问题通过二次试算即可得到满意结果, 如第二次试算后还不满足, 可取 $\lambda_3 = \sqrt{\lambda_2\lambda'_2}$ 所对应的 φ_3 再进行试算, 大大提高了设计效率, 而且不必重新利用其它条件, 只要根据现有设计规范即可. 是一种快速方便的设计方法.

(本文于 1993 年 4 月 16 日收到)

欧拉微分式的一种简化方法

冯 贤 桂

(重庆大学, 重庆 630044)

在材料力学和弹性力学中平面极坐标问题的求解及轴对称问题的计算, 常常遇到欧拉微分方程的求解. 例如, 轴对称厚壁圆筒的位移法求解的基本方程为^[1]

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (1)$$

圆形薄板轴对称弯曲位移法基本方程^[2]

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}\right) = \frac{q(r)}{D} \quad (2)$$

方程 (1)、(2) 都是欧拉微分方程, 可以用求特征根的方法来解这些微分方程. 但是也可以将方程左边的欧拉微分式改写为复合高阶导数, 再用逐次积分的方法求解, 这种方法有时很方便, 特别是对非齐次欧拉方程. 用此法将方程 (1)、(2) 改写为

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} = \frac{q_0(r)}{D} \quad (4)$$

用积分方法很容易解出方程 (3)、(4).

对于比较简单的欧拉方程, 可以用试凑法得到方程左边欧拉微分式的复合高阶导数表达式, 对于较复杂的欧拉微分式, 用试凑法就比较困难. 本文提出一种欧拉微分式的化简方法, 可以方便地得到复合高阶导数表达式.

设有 m 阶欧拉微分方程为

$$a_0 \frac{d^m u}{dr^m} + \frac{a_1}{r} \frac{d^{m-1} u}{dr^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{r^{m-1}} \frac{du}{dr} + a_m \frac{u}{r^m} = f(r) \quad (5a)$$

将此方程简写为

$$L_m(u) = f(r) \\ \tilde{L}_m(u) = a_0 \frac{d^m u}{dr^m} + \frac{a_1}{r} \frac{d^{m-1} u}{dr^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{r^{m-1}} \frac{du}{dr} + a_m \frac{u}{r^m} \quad (5b)$$

设 $u = r^n$, 代入 (5b) 式对应的齐次欧拉方程 $L_m(u) = 0$ 可得到它的特征方程, 当特征方程有整数解 n_1, n_2, \dots, n_m 时, 欧拉微分式可简化为如下形式的 m 阶复合导数

$$L_m(u) = \frac{a_0}{r^{-n_1+m-1}} \frac{d}{dr} r^{-n_1+n_2+1} \frac{d}{dr} r^{-n_2+n_3+1} \dots \frac{d}{dr} \dots \frac{d}{dr} r^{-n_{m-1}+n_m+1} \frac{d}{dr} (r^{-n_m} u) \quad (6)$$

$L_m(u)$ 的导数表达式不是唯一的, 当 $L_m(u) = 0$ 的特征方程有 m 个不同的整数解时, 由 (6) 式易知, $L_m(u)$ 的导数表达式有 $m!$ 种.

本文仅以二阶欧拉微分式为例对 (6) 式作一证明, m 阶欧拉微分式的结论可用数学归纳法证明. 当 $m = 2$ 时, (6) 式变为

$$L_2(u) = \frac{a_0}{r^{-n_1+1}} \frac{d}{dr} r^{-n_1+n_2+1} \frac{d}{dr} (r^{-n_2} u) \quad (a)$$

设 $u = r^n$, 代入 $L_2(u) = 0$, 可得到特征方程

$$a_0 n^2 - (a_0 - a_1)n + a_2 = 0 \quad (b)$$

若特征方程 (b) 有整数解 n_1, n_2 , 由韦达定理有

$$n_1 + n_2 = \frac{a_0 - a_1}{a_0}, \quad n_1 n_2 = \frac{a_2}{a_0} \quad (c)$$