

称曾多于两次改变其凹凸性的现象。由于梁中弯矩 $M = EI \cdot \partial^2 W / \partial x^2$, 则该现象意味着梁中弯矩至少两次改变符号。这也反映了黏弹性基础支承对梁作用的效果。

4. 结束语

本文建立的黏弹性基础上弹性直梁受物体撞击的动力响应分析方法是方便、有效的。但本文所建立各表达式仅适用于物体撞击速度不大的动力响应的分析计算。对于工程中的高速碰撞问题, 由于被撞击体的变形往往超出弹性范围, 上述方法

及其表达式必须按塑性动力学理论等加以修正。这一问题还有待于深入研究。

参 考 文 献

- [1] Goldsmith W. Impact. Edward Arnold Publishers, 1960: 108-113, 137-144
- [2] 杨桂通, 张善元. 弹性动力学. 中国铁道出版社, 1988: 175-181
- [3] 黄伟, 邹毅达. 爆炸与冲击, 1992, 12(3): 239-246

(本文于 1992 年 11 月 19 日收到)

J. M. Dancan 反转应力法的探讨

郝跃天 杨更社 任建喜
(西安矿业学院, 西安 710054)

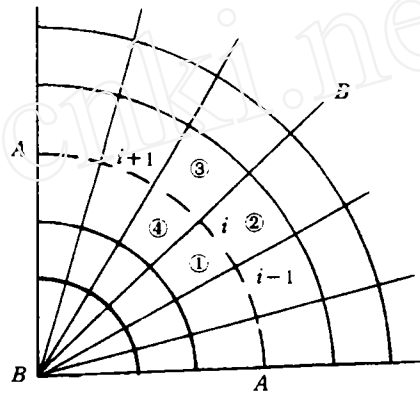
摘要 作者从近年来实际应用有限元法模拟地下工程开挖过程时发现的问题入手, 讨论了 J. M. Dancan 反转应力法存在的缺陷, 并进一步从理论上分析了 J. M. Dancan 法出现问题的特征和条件, 最后给出了一种可替代 J. M. Dancan 反转应力释放法的直接积分法。

关键词 有限元法, 反转应力释放, 直接积分

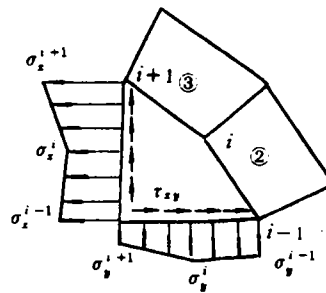
1. J. M. Dancan 反转应力法剖析

众所周知, 有限元法以其灵活多变、适用性强的特点, 在岩石地下工程的数值分析中占有非常重要的地位。地下工程区别于其它工程的最大特点就是开挖, 由开挖而引起的围岩应力、位移状态的重分布是工程设计最为关心的问题。有限元计算中, 模拟开挖过程的传统方法是依 J.M.Dancan 提出的反转应力释放法来处理开挖所产生的应力释放等效荷载。

图 1 所示为一开挖边界简图, A-A 虚线为开挖边界。假设开挖边界上各节点的应力已知, 且两节点之间的应力按线性变化, 将应力分布视之为作用在开挖边界上的荷载分布, 则开挖边界上各点的等效荷载应可由下式求得



(a) 开挖区域



(b) 反转应力

图 1 J.M.Dancan 反转应力示意图

$$\left. \begin{aligned} P_x^i &= \frac{1}{6} [\sigma_x^i (b_1 + b_2) + \sigma_x^{i-1} b_2 + \sigma_x^{i+1} b_1 \\ &\quad + 2\tau_{xy}^i (a_1 + a_2) + \tau_{xy}^{i-1} a_1 + \tau_{xy}^{i+1} a_2] \\ P_y^i &= \frac{1}{6} [\sigma_y^i (a_1 + a_2) + \sigma_y^{i-1} a_1 + \sigma_y^{i+1} a_2 \\ &\quad + 2\tau_{xy}^i (b_1 + b_2) + \tau_{xy}^{i-1} b_1 + \tau_{xy}^{i+1} b_2] \end{aligned} \right\} (1)$$

式中

$$a_1 = x_{i-1} - x_i \quad a_2 = x_i - x_{i+1}$$

$$b_1 = y_i - y_{i-1} \quad b_2 = y_{i+1} - y_i$$

J.M.Duncan 提出, 开挖边界点处的应力可由节点周围四个单元应力插值得到. 对于图 1 所示的 i 节点应力可由①、②、③、④号单元的线性插值计算, 设插值函数为

$$\sigma = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (2)$$

记作

$$\sigma = [A]\{a\} \quad (3)$$

式中 $[A] = [1, x, y, xy]$, 待定系数 $\{a\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}^T$. 设①—④号单元中心点座标为 $(x_1, y_1) - (x_4, y_4)$, 中心点处应力值为 $\{\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1\} - \{\sigma_x^4, \sigma_y^4, \tau_{xy}^4\}$, 这时 i 节点处的任一应力分量场可求出

$$\sigma_k^i = [A][M]^{-1}\{\sigma_k\} \quad (k = x, y, xy) \quad (4)$$

式中

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4y_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[M]^{-1} = [M^*] / \det[M] \quad (6)$$

$[M^*]$ 为 $[M]$ 的伴随矩阵, $\det[M]$ 为 $[M]$ 的行列式值. $[M]^{-1}$ 存在的必要条件是 $\det[M] \neq 0$.

在岩石力学及地下工程的开挖计算中, 常常出现 $\det[M] = 0$ 的条件, 以至于用上述方法无法进行下去. 避开这一缺陷的作法是在单元划分时尽量不出现 $\det[M] = 0$ 的条件. 但这样作是消极的, 事先很难预料. 特别对于工程实际问题, 当单元数目较多时, 更是难以预料.

2. 直接积分法

力学与实践

在图 1 中, 开挖前, i 节点的平衡由周围 4 个单元的内力及外力决定, 对于第①个单元有

$$[K]^\circ \{\delta\}^\circ = \{F\}^\circ \quad (7)$$

对于 4 节点等参单元, 将式 (7) 写成分块形式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

对于 i 节点, 单元①的贡献为

$$\{F_i\}^\circ = \sum_{n=1}^4 [K_{in}^\circ] \{\delta_n\}^\circ$$

i 节点周围 4 个单元, 其外力为

$$\{R_i\} = \sum_{e=1}^4 \{F_i\}^e = \sum_{e=1}^4 \sum_{n=1}^4 [K_{in}^e] \{\delta_n\}^e$$

更一般的, 若 i 节点周围有 t 个 S 节点的单元, 则有

$$\{R_i\} = \sum_{e=1}^t \sum_{n=1}^S [K_{in}^e] \{\delta_n\}^e \quad (8)$$

式 (8) 的物理意义为, 在平衡状态下, i 节点的外力与内力相等. 当 i 节点没有外荷载时, 式 (8)

中 $\sum_{e=1}^t \sum_{n=1}^S [K_{in}^e] \{\delta_n\}^e = 0$. 开挖中, 这种平衡状态被破坏, 节点 i 在动态中达到新的平衡.

设 i 节点周围挖去 r 个单元, 则式 (8) 为

$$\{R_i\} = \sum_{e=1}^{t-r} \sum_{n=1}^S [K_{in}^e] \{\delta_n\}^e \quad (9)$$

这时, 外力项 $\{R_i\}$ 即为开挖时 i 节点的释放荷载等效节点力. 由有限元理论, 刚度矩阵分块元素

$$[K_{in}]^e = \int_{\Omega_e} [B_i]^T [D] [B_n] dV \quad (10)$$

若单元采用自然坐标, 采用高斯积分, 式 (10) 为

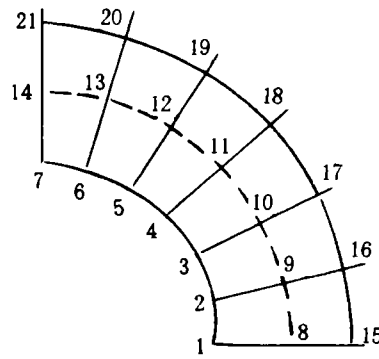
$$\begin{aligned} [K_{in}]^e &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i(\xi, \eta)]^T [D] [B_n(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [B_i(\xi, \eta)]^T [D] [B_n(\xi, \eta)] H_i H_j \det[J] \end{aligned} \quad (11)$$

式中, H_i, H_j 为高斯积分加权系数, m 为积分点数.

显然, 这种方法通过节点的动态平衡给出了一个直接积分计算等效节点力的公式, 避开了可能出现问题的应力插值计算.

3. 工程算例

一圆形巷道在均匀应力场作用下进行二次开挖, 网格划分及开挖区域如图 2 所示. 计算参数为: $\sigma_x = \sigma_y = 10.0\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 0$, $E = 10^4\text{MPa}$, $\mu = 0.25$. 用两种方法分别模拟开挖计算等效节点力, 其结果和方向见表 1 及图 2(b),(c).



(a) 计算网格局部

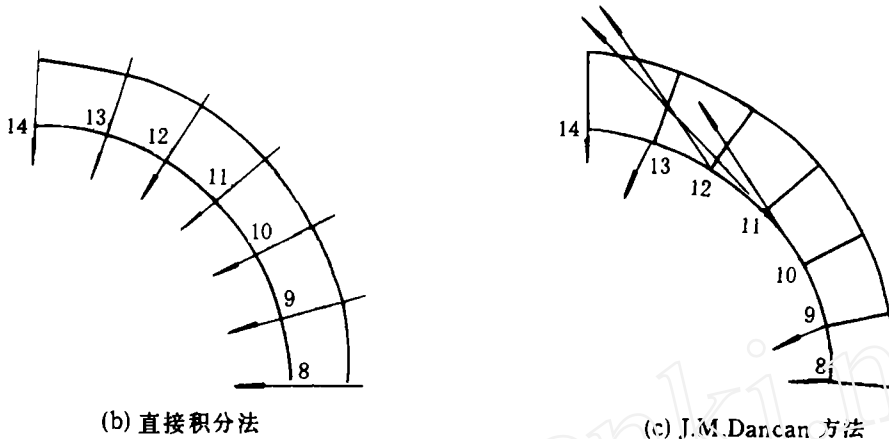


图 2 计算网格局部及等效节点力方向

表 1 等效结点力结果比较

(单位 kN)

节点号	8	9	10	11	12	13	14	
J.M.Duncan 方法	x	-173.2	-569.2	-182902	-646088	-140281	-230.0	0.0
	y	0.0	-230.1	1401781.0	645913	182699	-569.2	-171.2
直接积分法	x	-236.6	-457.1	-409.7	-334.5	-236.5	-122.4	0.0
	y	0.0	-122.5	-236.6	-334.5	-409.8	-457.1	-236.6

对计算结果进行分析, 可清楚看出两种方法的差别. 按 J.M.Duncan 法计算, 在开挖边界线与 x 轴成 $\pi/4$ 的线上及其邻近处出现了超常的等效荷载. 在这一等效荷载的计算下不会得到正确的结果, 按直接积分法计算, 开挖边界线上各点的等效荷载都很正常, 方向均指向巷道中心.

参 考 文 献

- [1] Stagg K G & Zienkiewicz O C. Rock Mechanics in Engineering Practice. London, 1975
- [2] 于学馥等著. 地下工程围岩稳定分析. 北京: 煤炭工业出版社, 1983 年 12 月
- [3] 谢贻权等. 弹塑性力学有限元法. 北京: 机械工业出版社, 1981 年 5 月

(本文于 1992 年 11 月 29 日收到第一稿, 1993 年 3 月 31 日收到修改稿)