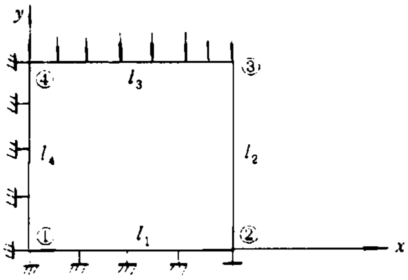

图

参 考 文 献

[1] Hughers T J R, Ferncz M. Large-scale vectorized implicit calculations in solid mechanics on a CRAY x-MP148 utilizing EBE preconditioned conjugate gradients. *Comput Methods in Appl. Mech. and Engng*, 1987(61): 215–248

[2] Ortiz M, Pinsky P M, Tayler R L. Uncondtionally stable EBE algorithms for dynamic problems. *Comput Methods in Appl. Mech. and Engng*, 1983(36): 223–239

[3] Hughers T J R. An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solid mechanics. *Comput Methods in Appl Mech and Engng*, 1983(36): 241–254

[4] Wong S W, Smith I M. PCG methods in transient FE analysis part: Second order problems international journal for numerical methods in engineering.

[5] 张春生. 工业汽轮机转子热弹塑性分析. 浙江大学硕士学位论文, 1992, 3

(本文于 1992 年 11 月 2 日收到)

岩石材料单轴压缩损伤变量与纯剪切损伤变量间的关系

杨 更 社

(西安矿业学院, 西安 710054)

提要 本文以岩石材料损伤应变能释放率为基础, 利用不同的岩石屈服准则, 探讨了岩石材料单轴压缩损伤变量与纯剪切损伤变量间的关系. 借助于岩石材料单轴压缩或纯剪切中任一试验, 即可求得两种受力状态下的损伤变量.

关键词 岩石, 损伤变量, 单轴压缩, 纯剪切

目前, 损伤力学理论在岩石力学中得到了一定程度的应用, 而损伤变量的确定是损伤力学的关键所在, 特别对于岩石材料, 则更为重要.

损伤变量 D 是材料受损程度的度量. 根据 Lemaitre 的等效应变假设 [1], 受损材料的应变性能可用无损材料的本构方程来表示, 只要将应力换成有效应力即可. 对于各向同性的岩石材料, 在单轴受力状态下, 无损材料的本构方程为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{1}$$

岩石材料受损后, 则为

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{\widetilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{\widetilde{E}} \tag{2}$$

式中,

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D_1} \tag{3}$$

$$\widetilde{E} = E(1-D_1) \tag{4}$$

所以

$$D_1 = 1 - \frac{\widetilde{E}}{E} \tag{5}$$

在 (1)-(5) 式中, σ, ε 为 Cauchy 应力和应变; $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\varepsilon}$ 为有效应力和有效应变; E 为无损材料的弹性模量; $\widetilde{E}$ 为有损材料的弹性模量; D_1 为岩石单轴受力损伤变量.

将 Lemaitre 的等效应变假设用于岩石的纯剪切情况, 根据剪切虎克定律, 材料在无损状态下的本构方程为

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \tag{6}$$

受损状态下的本构方程为

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\widetilde{\gamma} = \frac{\widetilde{\tau}}{G} = \frac{\tau}{\widetilde{G}} \tag{7}$$

在 (7) 式中
$$\widetilde{\tau} = \frac{\tau}{1 - D_2} \tag{8}$$

$$\widetilde{G} = G(1 - D_2) \tag{9}$$

所以

$$D_2 = 1 - \frac{\widetilde{G}}{G} \tag{10}$$

在 (6)-(10) 式中，τ, γ 为 Cauchy 剪应力和剪应变；$\widetilde{\tau}, \widetilde{\gamma}$ 为有效剪应力和剪应变；G 为无损材料的剪切弹模；$\widetilde{G}$ 为有损材料的剪切弹模；D_2 为剪应力状态下的损伤变量.

对岩石材料，本文暂且假设在屈服之前满足广义虎克定律，由于材料的初始损伤和后续损伤的发展相比较是较小的，所以本文忽略岩石的初始损伤，当强度达屈服极限时，损伤开始产生. 在等温线弹性各向同性损伤的情况下，损伤应变能释放率为

$$Y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E(1 - D)^2}\left[\frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu)\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}\right)^2\right] \tag{11}$$

式中，σ_m 为平均应力；σ_{eq} 为等价应力 $\left(\sigma_{eq} = \left[\frac{3}{2}\sigma_D^2\right]^{1/2}\right)$；$\sigma_D$ 为应力偏量不变量；E, ν 为岩石的弹模和泊松比；D 为损伤变量.

岩石材料在单轴压缩受力状态下

$$\sigma_1 = -\sigma, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$
$$\sigma_m = -\frac{1}{3}\sigma, \quad \sigma_D^2 = \frac{2}{3}\sigma^2, \quad \sigma_{eq} = \sigma$$

所以

$$Y = \sigma^2 \Big/ 2E(1 - D_1)^2 \tag{12}$$

式中 D_1 为单轴压缩损伤变量.

在纯剪切受力状态下

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$
$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_D^2 = 2\tau^2, \quad \sigma_{eq} = \sqrt{3}\tau$$

所以
$$Y = (1 + \nu)\tau^2 \Big/ E(1 - D_2)^2 \tag{13}$$

式中 D_2 为剪切应力状态下的损伤变量.

对同一种材料，若忽略其初始损伤，在不同的受力状态下，损伤的门槛值不同，所以损伤变量 D 不同，但损伤应变能释放率是一个热力学量，从能量的观点出发，开始产生损伤时的应变能释放率应为常量 [2]. 所以，由 (12) 、(13) 式知

$$\frac{\sigma_R^2}{2E(1 - D_1)^2} = \frac{(1 + \nu)\tau_R^2}{E(1 - D_2)^2}$$

即

$$\frac{(1 - D_1)^2}{(1 - D_2)^2} = \frac{1}{2(1 + \nu)}\frac{\sigma_R^2}{\tau_R^2} \tag{14}$$

式中 σ_R, τ_R 分别为岩石材料的单轴压缩和纯剪切屈服极限.

单轴压缩受力状态下，初始屈服时

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 = -\sigma_R, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \\ &I_1 = 3\sigma_m = -\sigma_R, \quad J_2 = \frac{1}{3}\sigma_R^2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

纯剪切受力状态下，初始屈服时

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1 = \tau_R, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_R \\ &\sigma_m = 0, \quad J_2 = \tau_R^2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

① Tresca 屈服准则：

$$\tau_{\max} = c = 常数 \tag{17}$$

将 (15),(16) 的应力状态代入 (17) 式有

$$\sigma_R = -2\tau_R$$

所以，由 (14) 式有
$$\frac{1 - D_1}{1 - D_2} = \sqrt{\frac{2}{(1 + \nu)}} \tag{18}$$

② Mises 屈服准则：

$$J_2 = c = 常数 \tag{19}$$

将 (15),(16) 应力状态代入 (19) 有

$$\sigma_R = \sqrt{3}\tau_R$$

所以有

$$\frac{1 - D_1}{1 - D_2} = \sqrt{\frac{3}{2(1 + \nu)}} \tag{20}$$

③ 莫尔 - 库仑屈服准则：

$$\sigma_1(1 + \sin\varphi) - \sigma_3(1 - \sin\varphi) = 2c \cdot \cos\varphi \tag{21}$$

其中 c, φ 为岩石的黏结力和内摩擦角，将 (15) 、(16) 应力状态代入 (21) 式有

$$\sigma_R = \frac{2\tau_R}{1 + \sin\varphi}$$

所以由 (14) 式得

$$\frac{1 - D_1}{1 - D_2} = \frac{2}{1 + \sin\varphi}\sqrt{\frac{1}{2(1 + \nu)}} \tag{22}$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

④ 德鲁克 - 普拉格屈服准则：

$$\alpha I_1 + J_2^{1/2} - k = 0 \tag{23}$$

式中 $\alpha = \dfrac{\sin\varphi}{\sqrt{9+3\sin^2\varphi}}$，$k = \dfrac{3c\cdot\cos\varphi}{\sqrt{9+3\sin^2\varphi}}$

将 (15) 、 (16) 应力状态代入 (23) 式有

$$\sigma_R = \frac{\sqrt{3}\tau_R}{1-\sqrt{3}\alpha}$$

由 (14) 式得 $\dfrac{1-D_1}{1-D_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\alpha}\sqrt{\dfrac{1}{2(1+\nu)}}$ (24)

⑤ 对于岩石材料，二次屈服函数有更好的适用性.

$$F = \beta\sigma_m^2 + \alpha\sigma_m - k + \boldsymbol{\sigma}_+^2 = 0 \tag{25}$$

β, α, k 为模型参数，$\overline{\boldsymbol{\sigma}}_+ = \sqrt{J_2}/g(\theta_\sigma), g(\theta_\sigma)$ 采用 Gudedus 和 Arygris 公式[3]

$$g(\theta_\sigma) = \frac{2k}{(1+k)-(1-k)\sin 3\theta_\sigma}$$

$$k = \frac{3-\sin\varphi}{3+\sin\varphi}$$

对于岩石单轴压缩受力状态，$\theta_\sigma = \pi/6, g(\theta_\sigma) = 1$，纯剪切受力状态，$\theta_\sigma = 0, g(\theta_\sigma) = (3-\sin\varphi)/3$.

① 抛线线型屈服准则：

$$F = \frac{1}{a}\sigma_m + \frac{d}{a} + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_+^2 = 0 \tag{26}$$

a, d 为模型参数.

将 (15) 、 (16) 应力状态分别代入 (26) 式，得

$$\tau_R^2 = \frac{(3-\sin\varphi)^2}{27}\sigma_R\left(\sigma_R - \frac{1}{a}\right) \tag{27}$$

将 (27) 式代入 (14) 式，有

$$\frac{1-D_1}{1-D_2} = \frac{3}{3-\sin\varphi}\sqrt{\frac{3a\sigma_R}{2(1+\nu)(a\sigma_R-1)}} \tag{28}$$

② 椭圆型屈服准则：

$$F = \frac{b^2}{a^2}(\sigma_m+d)^2 - b^2 + \overline{\boldsymbol{\sigma}}_+^2 = 0 \tag{29}$$

a, b, d 为模型参数.

将 (15) 、 (16) 应力状态分别代入 (29) 式

$$\tau_R^2 = \frac{(3-\sin\varphi)^2}{27}\sigma_R\left[\sigma_R + \frac{1}{3}\sigma_R \mathrm{tg}^2\overline{\boldsymbol{\varphi}} - 1\right]$$

所以，由 (14) 式得

$$\frac{1-D_1}{1-D_2} = \frac{3}{3-\sin\varphi}\sqrt{\frac{3\sigma_R}{2(1+\nu)(\sigma_R + \frac{1}{3}\sigma_R\mathrm{tg}^2\overline{\boldsymbol{\varphi}} - 1)}} \tag{30}$$

其中 $\mathrm{tg}\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \dfrac{b}{a}$.

③ 双曲线型屈服准则：

$$F = \frac{(-\sigma_m+d)^2}{a^2} - \frac{\overline{\boldsymbol{\sigma}}_+^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{31}$$

a, b, d 为模型参数.

将 (15) 、 (16) 应力状态代入 (31) 式有

$$\tau_R^2 = \frac{(3-\sin\varphi)^2}{27}\left[\sigma_R^2(3-\mathrm{tg}^2\overline{\boldsymbol{\varphi}}) - 2\overline{c}\mathrm{tg}\overline{\boldsymbol{\varphi}}\sigma_R\right]$$

由 (14) 式知

$$\frac{1-D_1}{1-D_2} = \frac{3}{3-\sin\varphi}\sqrt{\frac{3\sigma_R}{2(1+\nu)\left[\sigma_R(3-\mathrm{tg}^2\overline{\boldsymbol{\varphi}}) - 2\overline{c}\mathrm{tg}\overline{\boldsymbol{\varphi}}\right]}} \tag{32}$$

其中

$$\boldsymbol{c} = \frac{6c\cos\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}, \quad \mathrm{tg}\overline{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{6\sin\varphi}{\sqrt{3}(3-\sin\varphi)}$$

c, φ 为岩石的黏结力和内摩擦角.

可以看出，对于 Tresca 和 Mises 准则，D_1 和 D_2 的关系仅与岩石材料的泊松比 ν 有关；对于莫尔 - 库仑和德鲁克 - 普拉格准则，D_1 和 D_2 的关系不仅与泊松比 ν 有关，还与岩石材料的黏结力 c，内摩擦角 φ 有关；对于二次屈服准则，D_1 和 D_2 的关系不仅与 ν, c, φ 有关，还与岩石本身的单轴抗压强度 σ_R 反模型参数有关.

本文得到谢定义教授、刘怀恒教授的指导，在此致谢.

参 考 文 献

[1] Lemaitre J. How to Use damage mechanics. *Nuclear Engng & Design*, 1984, 80: 233–245

[2] 施明泽等. 推荐一种测定材料损伤因子和应变能释放率的方法. 浙江大学学报， 1988, 22(5): 33-34

[3] 王芝银. 确定岩土二次屈服函数中有关参数的一种方法. 力学与实践， 1991, 13(2): 55–57

(1992 年 11 月 17 日收到第一稿，
1993 年 5 月 23 日收到修改稿)

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net