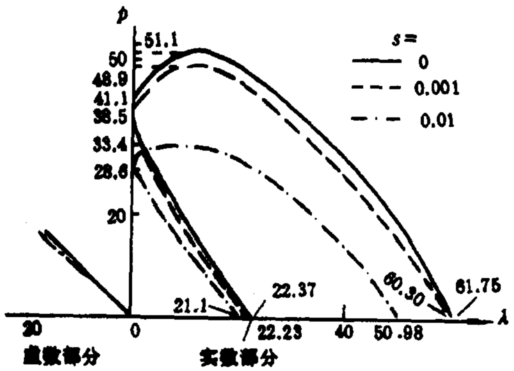

图 3 $\gamma=0, \theta=0$ 的特征曲线

从以上计算结果看出本文提出的解法是简便易行的，且收敛快，精度高.

参 考 文 献

[1] Leipholz H. Stability of elastic systems. Sijthoff and Noordhoff, Alphen an den Rijn, The Netherlands, 1980: 4—13

[2] Goldstein S. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1936, 32(40)

[3] 李家春，戴世强. 物理和工程中的渐近方法. 应用数学和力学讲座讲义，1985

[4] Park Y. P. *J. Sound and Vibration*, 1987, 2:113

[5] Higuchi K, Dowell E H. *J. Sound and Vibration*, 1989, 1:132

(本文于 1992 年 4 月 15 日收到第 1 稿，于 1992 年 12 月 2 日收到修改稿)

Coriolis 质量流量计及其原理分析

沈钧涛 诸乾康 钮珍南 贾培英

(北京大学力学系，100871)

提要 分析了质量流量计的工作原理，并讨论了有关频率和仪表系数的计算.

关键词 流量计，多相流，非牛顿流

流量计是工业生产、工程控制、科学实验和日常生活中常用的计量仪表. 根据 [1]，流量计可分为差压式流量计和线性流量计两类. 差压式流量计，如孔板、文丘里管、均速管等，这类流量计是以指定的某两点上的压差 Δp 作为测定流量的信号的，计算公式是

$$Q_V = K\sqrt{\Delta p}$$

Q_V 是体积流量，K 是仪表系数，它与雷诺数，流体的物理性质以及温度等许多因素有关. 线性流量计，如涡轮流量计、涡街流量计、转子流量计等，这类流量计的输出信号 δ 与体积流量 Q_V 之间有线性关系

$$Q_V = K\delta$$

系数 K 也与雷诺数，流体物理性质及温度等许多因素有关.

通常，流量计的仪表系数 K 是流量计厂家用特定的流体在标准条件下通过实验方法确定的，并且认为它是常数. 因此，这些流量计的使用将受到很大限制：用户只能用于为流量计厂家所指定的流体，并且也应当在标准条件下去测定流量，否则测量结果可能是不可靠的. 另外，由于把仪表系数取为常数，其量程比不可能很大.

用 Coriolis 力效应或陀螺效应设计成的质量流量计，可克服传统流量计的各种缺陷，因此已受到人们的高度重视，在文献 [2]、[3] 中对这种流量计已作过介绍. 这种流量计能可靠地，十分准确地测定任何可流介质 (包括多相流体、非牛顿流体、粥样胶体等) 的平均密度和质量流量，并且工作响应快，因而可在实时控制系统中发挥重要作用.

本文不准备讨论 Coriolis 质量流量计设计、调试、标定、安装和使用中要注意的许多技术问题，只着重对这种流量计作原理性分析，这些分析可直接用在定量计算和有关的结构设计中.

Coriolis 质量流量计的基本形式是一振动着的管道，此振动是用装在管道上的激振器激发和维持的，激振的驱动频率等于管道结构的最小固有频率. 当流体流经这种管道时，由于流体在管道横向有加速度，因而在这一方向上，管道将受到流体的反作用，使管道在原有振动的基础上得到一个附加振动. 这一附加振动的振幅与原有振动振幅之比与管道中的质量流量直接有关，因此利用这一性质可确定管道中的质量流.

为便于分析，我们把管道看作是弹性曲杆. 弹性曲杆的平衡方程是[4]

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}s}+\boldsymbol{f}=0 \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}s}+\tau\times\boldsymbol{F}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

这里，$\boldsymbol{F}$ 是剪力，$\boldsymbol{M}$ 是弯矩，s 是沿曲杆轴线的弧长，τ 是曲杆轴线的单位切向量，$\boldsymbol{f}$ 是分布外力.

质量流量计的管道形式可采用直管的形式，也可采用 U 形管的形式，更复杂的管道形式有时也是可取的. 对应不同管道结构的质量流量计各有其优点和缺点. 本文针对如图 1 所示的二平行的 U 形管这种结构作一些简要分析. 激振器位于 U 形管的顶部，在激振器的驱动下，两平行的 U 形管将作音叉式的振动. 两个位移传感器左右对称地位于直管段和半圆形管段的连接处. 注意到对称性，我们只需讨论一根 U 形管的右半部的运动.

由于 U 形管轴线的曲率分段等于常数，且在变形前，其轴线是平面曲线 (挠率等于零)，在略去 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 在轴向的分量后，从方程组 (2) 可得到

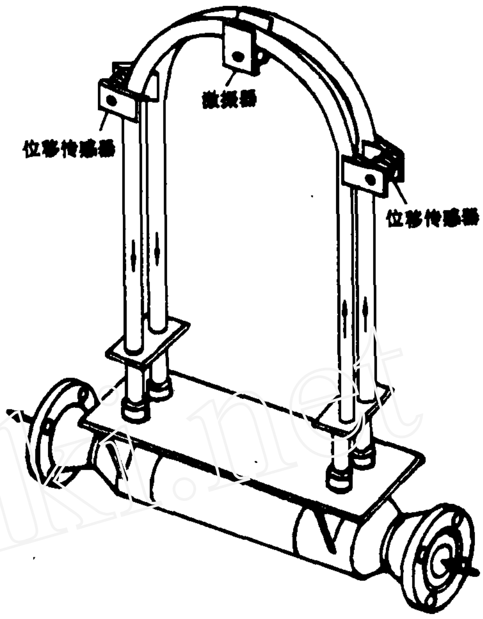

图 1

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}s}-kM_2=0 \\ &\frac{\mathrm{d}^2M_2}{\mathrm{d}s^2}+k^2M_2+f_3=0 \\ &\frac{\mathrm{d}M_3}{\mathrm{d}s}-f_2=0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 M_1、M_2 和 M_3 分别是弯矩 $\boldsymbol{M}$ 在管道轴向、主法线方向和副法线方向上的投影 (M_1 为扭矩)，f_2 和 f_3 则是分布力 $\boldsymbol{f}$ 在主法线方向和副法线方向上的投影，k 是 U 形管的曲率. U 形管上的点主要是沿着副法线方向作往复运动的，如把沿这一方向的位移记作 z，利用材料力学中的弹性关系，从方程组 (2) 可得到

$$EJ\left(\frac{\partial^4 z}{\partial s^4}+k^2\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)-f_3=0 \tag{3}$$

EJ 是抗弯刚度. 分布外力 f_3 由两部分组成：第一部分是单位长度管壁的惯性力 $-m_1\ddot{z}$，m_1 是单位长度管壁质量，$\ddot{z}$ 是管壁上点的加速度；第二部分是管道中的流体对单位长度管壁的作用力 $-\int_A \rho a\mathrm{d}A$，$a$ 是流体质点在 z 方向的加速度，ρ 是流体密度，积分沿管道横截面进行. 在一般情况下，计算加速度 a 是非常困难的，但当管道中的流体，包括流体中可能存在的颗粒或气泡，

对振动来说是完全跟随时，情形将非常简单，这时管道中流体的速度可表示为

$$V = \dot{z}b + Vz$$

式中 b 是副法线方向上单位向量， $\dot{z}$ 是管壁速度， U 则是流体相对管壁的流速. 将上式求随体导数[5]，并利用微分几何中的 Serret -Frenet 公式可得到

$$a = \ddot{z} + 2U\frac{\partial \dot{z}}{\partial s} \tag{4}$$

因此，

$$-\int \rho a \mathrm{d}A = -m_2\ddot{z} - 2Q\frac{\partial \dot{s}}{\partial s} \tag{5}$$

m_2 是单位长度管道中流体的质量， Q 则是管道中流体的质量流量：

$$Q = \int \rho U \mathrm{d}A \tag{6}$$

可以指出，(4) 式中的 $\frac{\partial \dot{z}}{\partial s}$ 可理解为管壁因振动引起的角速度分布，因此 (4) 式中的 $2U\frac{\partial \dot{z}}{\partial s}$ 是管道中流体质点的 Coriolis 加速度.

现在，方程 (3) 可写成

$$\frac{\partial^4 z}{\partial s^4} + k^2\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{m}{EJ}\ddot{z} + \frac{2Q}{EJ}\frac{\partial \dot{z}}{\partial s} = 0 \tag{7}$$

式中 $m = m_1 + m_2$，它是盛有流体时管道的线密度. 如把 z 分解成管道中无流动时的位移 (由激振引起)z_0 和由于管道中有流量而产生的位移 z_1 这两个部分，同时注意到 z_1 比 z_0 要小得多，则有

$$\frac{\partial^4 z_0}{\partial s^4} + k^2\frac{\partial^2 z_0}{\partial s^2} + \frac{m}{EJ}\ddot{z}_0 = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial^4 z_1}{\partial s^4} + k^2\frac{\partial^2 z_1}{\partial s^2} + \frac{m}{EJ}\ddot{z}_1 + \frac{2Q}{EJ}\frac{\partial \dot{z}_0}{\partial s} = 0 \tag{9}$$

先考虑方程 (8)，不失一般性，可令

$$z_0 = Z_0 \sin\omega t$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}^4 z_0}{\mathrm{d}s^4} + k^2\frac{\mathrm{d}^2 z_0}{\mathrm{d}s^2} - \frac{m\omega^2}{EJ}z_0 = 0 \tag{10}$$

对这一方程来说，首先是一个本征值问题. 这一方程解的一般形式是

$$Z_0 = A_1 \mathrm{sh}\alpha s + A_2 \mathrm{ch}\alpha s + A_3 \sin\beta s + A_4 \cos\beta s \tag{11}$$

A_1, A_2, A_3, A_4 是积分常数， α 和 β 则为

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(-k^2 + \sqrt{\frac{4m\omega^2}{EJ} + k^4})}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(k^2 + \sqrt{\frac{4m\omega^2}{EJ} + k^4})}$$

为确定本征值 $c = m\frac{\omega^2}{EJ}$，从而得到自振频率 ω，应利用有关的约束条件：在固定端，位移、转角和扭角为零；在装有位移传感器或激振器处，位移、转角，弯矩 M_2 和扭角 ϕ 应连续而剪力 F_3 和扭矩 M_1 的间断值由当地的动量定理和动量矩定理决定，扭角 ϕ 、扭矩 M_1 和剪力 F_3 与位移 z 的关系可从方程组 (2) 和 (1) 得到：

$$\phi = -(H\nu)(kz + cs + D)$$

$$M_1 = -EJ(k\frac{\partial z}{\partial s} + C)$$

$$F_3 = -EJ[\frac{\partial^3 z}{\partial s^3} + k(k\frac{\partial z}{\partial s} + C)]$$

这里的 ν 是泊桑比， C 和 D 为积分常数. 在具体计算时还需要利用对称性条件.

确定频率 ω 以后，即可从 (11) 式得到振型 $Z_0(s)$. 进一步求解方程 (10) 时可令 $z_1 = Z_1 \cos\omega t$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}^4 z_1}{\mathrm{d}s^4} + k^2\frac{\mathrm{d}^2 z_1}{\mathrm{d}s^2} - \frac{\omega^2 m}{EJ}z_1 + \frac{2Q\omega}{EJ}\frac{\mathrm{d}z_0}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{12}$$

显然， Z_1 正比于 $Q\omega$，因此可令

$$Z_1 = Q\omega Y$$

Y 可用数值方法从 (12) 和相应的固定端条件、装有传感器、激振器处的连接条件和反对称条件求得.

现在，当管道中有流体经过时，管道的振动规律可表示为

$$z = Z_0(s)\sin\omega t + Q\omega Y(s)\cos\omega t$$

$$= D\sin(\omega t + \varphi)$$

式中，

$$D = \sqrt{Z_0^2 + Q^2\omega^2 Y^2}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{Q\omega Y}{Z_0}$$

φ 为相移. 如把位移传感器处的 φ, Z_0 和 Y 分别记作 φ^*, Z_0^* 和 Y^*, 并注意到 φ 很小，从上式可得到

$$\left.\begin{aligned} Q &= KT \\ T &= \varphi^*/\omega \\ K &= \frac{Z_0^*}{Y^*} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

这里 T 是时间延迟， K 是仪表系数. (13) 式表明，只要仪表系数 K 确定以后，通过时间延迟 T, 将很容易得到管道中的体积流量. 用实验的办法测定 T 是很容易的.

为了对质量流量计有更本质更深层的认识，我们对有关计算和设计中的二个关键问题作一些简单说明.

(1) 关于管道的固有频率. 这里所说的是最小固有频率或第一频率. 在结构参数给定以后，它与管道中的流体密度有单值的对应关系，因此可通过它去确定流体的密度. 对二相流来说，还可进一步得出各相的浓度. 应当注意的是，为了使流量计对 50 周交电有较好的抗干扰能力，频率 $\omega/2\pi$ 须避开 50 的整数倍. 另外，在多相流情形中，如果频率很高，离散相对振动来说可能不跟随或跟随性很坏[6], 在这种情形下，精确计量将发生问题. 现在已见到一类直管形式的质量流量计，这种流量计结构简单，阻力也小，但固有频率很高，将这种流量计用在非均匀流时可能会遇到麻烦.

(2) 关于仪表系数 K. 质量流量计设计中，必须确保系数 K 与管道中流体的密度无关，否则，这种流量计将无法应用到管道中流体密度会发生变化的情形，特别是对石油、化工、水煤浆、纸浆等领域中许多非均匀的多相流来说，这种流量计将一无用处. 对等截面管道， (13) 式中的系数 K 的确是与流体密度无关的，但当管道上装有激振器，位移传感器等附件以后，系数 K 与附件质量，附件的结构形式 (包括托架) 以及管道中的流体密度间将有比较复杂的关系. 设计质量流量计的一项重要任务是，在给定激振器和位移传感器质量以后，选择合适的附件结构形式，或附件结构形式给定以后确定激振器和位移传感器的质量，以保证系数 K 是一个与管道中流体密度无关的常数. 这一任务可通过计算的办法去完成. 我们根据计算设计成的质量流量计，在水、液氯等比重差别比较大的不同流体中做过实测，结果是相当满意的.

参 考 文 献

[1] R. W. 米勒. 流量测量工程手册. 北京：机械工业出版社，1990.

[2] 董俊杰. 一种新型的流量计——复合向心回转式流量计，《化工自动化及仪表》， 1986, 13(6):50－54 .

[3] 马文驹，王中廷. 科里奥利质量流量计自动化仪表，1987, 8(9):24－26.

[4] 武际可，黄永刚. 弹性曲杆的稳定性问题. 力学学报，1987, 19(5):445－454.

[5] 吴望一. 流体力学，北京：北京大学出版社， 1984.

[6] 沈钧涛，陈十一. 球形粒子在流体中的跟随性. 空气动力学学报， 1989, 7(1): 50－54 .

(本文于 1992 年 1 月 29 日收到第 1 稿， 1992 年 11 月 25 日收到修改稿)