

由此可求得 v_0, ω_0 所应满足的关系:

$$T = \frac{v_0}{\mu g} + \frac{\omega_0 R - v_0}{2\mu g} + \frac{2}{\omega_0 R - v_0} \times \left[\frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} \right] - \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{4\mu g(\omega_0 R - v_0)} \quad (20)$$

如果在这一整个过程中, 圈操运动员在完成动作时, 使自己前进了距离 s_3 (图 4)。则相应的 $\Delta t'_3$ 应为

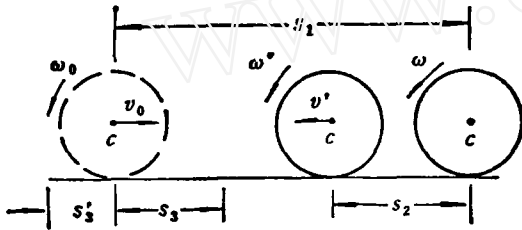


图 4

$$\Delta t'_3 = \frac{s_1 - s_2 - s_3}{v^*} - \frac{2}{\omega_0 R - v_0} \times \left[\frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} \right] - \frac{2s_3}{\omega_0 R - v_0} \quad (21)$$

因此, 应有

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = \frac{(\omega_0 R + v_0)^2}{4\mu g} - \frac{2s_3}{\omega_0 R - v_0} \quad (22)$$

如果在这一过程中, 圈操运动员后退了距离 s'_3 (图 4), 相应地就有

$$\Delta t'_3 = \frac{s + s'_3 - s_2}{v^*} - \frac{2}{\omega_0 R - v_0} \times \left[\frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{8\mu g} \right] + \frac{2s'_3}{\omega_0 R - v_0} \quad (23)$$

$$T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t'_3 = \frac{(\omega_0 R - v_0)^2}{4\mu g} + \frac{2s'_3}{\omega_0 R - v_0} \quad (24)$$

以上的(20),(22),(24)三式就是圈操运动员在原地或前进或后退完成动作的时间 T 与推出圆圈的 v_0 和 ω_0 所要满足的条件。这是马虎不得的。当然, 表演中若只有极小的误差, 可借助身体的倾斜或跨一小步来弥补, 但若相差太远, 则其整套动作就必然由失误而遭至失败了。

参 考 文 献

- [1] 朱照宣等, 理论力学, 北京大学出版社(1982), 65—66.
- [2] 石晓斌, 圆环为何滚回来, 物理通报, 1(1988), 3—4.
- [3] 李玉田等, 朝前运动的物体向后奔动的条件是什么, 大学物理, 9(1989), 15.

(本文于 1991 年 12 月 20 日收到修改稿)

积分形式下三维粘弹性体的单轴响应

华 筑 信

(河北大学, 保定, 071002)

摘要 三维粘弹性体的单轴响应多用微分形式给出^[1], 本文旨在通过积分方程导出, 其结论具有一般性。

关键词 粘弹性体, 单轴响应, 畸变

1. 一维粘弹性本构方程

粘弹性材料最重要的特征是其响应函数具有记忆, 是输入历史的泛函。若以应力为输入函数, 则有

力学与实践

$$\varepsilon(x, t) = \int_{-\infty}^t [\sigma(x, t, \tau)] \cdot$$

假定应力历史 $\sigma(x, t, \tau)$ 为连续, 关于线性系统(即为线性泛函), 由 Riesz 表示定理, 可表为 Stieltjes 积分

$$\varepsilon(x, t) = \int_{-\infty}^t J(x, t, \tau) d\sigma(x, \tau)$$

若不考虑材料老化, 即满足时间平移不变

性,则积分方程的核 $J(x, t, \tau)$ 在形式上只是响应延迟时间 $(t - \tau)$ 的函数,即

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) &= \int_{-\infty}^t J(x, t - \tau) \frac{\partial \sigma(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= J(x, t) \sigma_0(x) + \int_0^t J(x, t - \tau) \\ &\quad \times \frac{\partial \sigma(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1) \end{aligned}$$

其反演形式

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= \int_{-\infty}^t G(x, t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \\ &= G(x, t) \varepsilon_0(x) + \int_0^t G(x, t - \tau) \\ &\quad \times \frac{\partial \varepsilon(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1') \end{aligned}$$

关于(1)式,令

$$\sigma(t) = H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

为阶跃函数,即

$$\frac{d\sigma}{dt} = \delta(t)$$

为 Dirac 函数,则有

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = J(t)$$

同理,关于(1')中,令 $\varepsilon(t) = H(t)$, 有 $G(t) = \sigma(t)$

从而对一维 Voigt 模型^[2]

$$J(t) = s(t) = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) \right] \cdot H(t) \quad (2)$$

$$G(t) = \sigma(t) = EH(t) + \eta \delta(t)$$

对 Maxwell 模型

$$J(t) = s(t) = \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \right) H(t) \quad (3)$$

$$G(t) = E \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right) H(t)$$

对标准线性固体(三参数固体)模型

$$J(t) = \left\{ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_2}{\eta} t\right) \right] \right\} H(t) \quad (4)$$

其它模型参数同理可得。

2. 各向同性三维粘弹性本构关系

记 σ_{ij} 为应力张量, ε_{ij} 为应变张量,各向

异性线粘弹性本构方程为^[3]

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^t J_{ijkl}(x, t - \tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau$$

或

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x, t) &= \int_{-\infty}^t G_{ijkl}(x, t - \tau) \\ &\quad \times \frac{\partial \varepsilon_{kl}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

对各向同性体,4阶张量蠕变函数为:

$$\begin{aligned} J_{ijkl}(x, t) &= \frac{1}{3} [J_2(x, t) - J_1(x, t)] \delta_{ij} \delta_{kl} \\ &\quad + \frac{1}{2} J_1(x, t) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned}$$

记应力球张量为:

$$s \delta_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kl} \delta_{ij}$$

应力偏量为 $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - s \delta_{ij}$, 记应变球张量为

$$c \delta_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{kl} \delta_{ij}$$

应变偏张量为 $\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - c \delta_{ij}$, 易得关于主轴系的蠕变型本构方程。

$$e(x, t) = \int_{-\infty}^t J_2(x, t - \tau) \frac{\partial s(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}(x, t) = \int_{-\infty}^t J_1(x, t - \tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (6)$$

称 $J_1(x, t)$ 为剪切蠕变柔量, $J_2(x, t)$ 为各向同性压缩蠕变柔量。

(5)、(6)中,令 $S(t) = H(t)$, 有 $J_2(t) = e(t)$; 令分量 $\varepsilon_{ij}(t) = H(t)$, 有 $J_1(t) = \varepsilon_{ij}(t)$ 。

显然, (5)、(6)式反演可得松弛型本构方程。

3. 三维状态下的单轴响应

$$\text{令 } \sigma_{11} = \sigma_0 H(t), \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{21} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$$

即

$$S = \frac{\sigma_0}{3} H(t),$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_0}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_0}{3} \end{bmatrix}$$

对应的应变张量仍有:

$$e = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\varepsilon_{11} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \frac{2}{3}\varepsilon_{22} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \frac{2}{3}\varepsilon_{33} - \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \end{bmatrix}$$

代入方程(5),(6)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ & - \int_{-\infty}^t J_2(t-\tau) \frac{d\left(\frac{\sigma_0}{3} H(\tau)\right)}{d\tau} d\tau \\ & - \frac{\sigma_0}{3} \int_{-\infty}^t J_2(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \frac{\sigma_0}{3} J_2(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \varepsilon_{22} - \frac{1}{3} \varepsilon_{33} \\ & - \int_{-\infty}^t J_1(t-\tau) \frac{d\left[-\frac{\sigma_0}{3} H(\tau)\right]}{d\tau} d\tau \\ & = -\frac{\sigma_0}{3} J_1(t) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3} \varepsilon_{22} - \frac{1}{3} \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \varepsilon_{33} = -\frac{\sigma_0}{3} J_1(t)$$

$$\frac{2}{3} \varepsilon_{33} - \frac{1}{3} \varepsilon_{11} - \frac{1}{3} \varepsilon_{22} = -\frac{\sigma_0}{3} J_1(t)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0$$

整理

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} \\ & \varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22} = \sigma_0 J_2(t) \\ & \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} = \sigma_0 J_1(t) \\ & \varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0 \end{aligned}$$

从而单轴响应

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{3} [J_2(t) + 2J_1(t)] \quad (7)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_0}{3} [J_2(t) - J_1(t)] \quad (8)$$

4. 讨论

(1) Hooke 固体模型

其本构方程为 (Lame 方程)

力学与实践

$$s = 3ke \quad \text{或} \quad e = \frac{1}{3k} s$$

$$e_{ij} = 2Ge_{ij} \quad \text{或} \quad e_{ij} = \frac{1}{2G} s_{ij}$$

即

$$J_1(t) = \frac{1}{2G}, \quad J_2(t) = \frac{1}{3k}$$

从而单轴响应

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_0}{3} [J_2(t) + 2J_1(t)] \\ &= \frac{\sigma_0}{3} \left(\frac{1}{3k} + 2 \cdot \frac{1}{2G} \right) = \frac{3k+G}{9kG} \sigma_0 \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_0}{3} [J_2(t) - J_1(t)] \\ &= \frac{\sigma_0}{3} \left(\frac{1}{3k} - \frac{1}{2G} \right) = \frac{2G-3k}{18kG} \sigma_0 \quad (10) \end{aligned}$$

记 E, ν 为 Young 模量及 Poisson 比, 由弹性理论^[4] 有

$$E = \frac{9kG}{3k+G}, \quad \nu = \frac{3k-2G}{2(3k+2G)},$$

从而

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{E}, \quad \varepsilon_{22} = -\nu \frac{\sigma_0}{E},$$

即为弹性理论下的单轴响应。

(2) Newton 流体

其本构方程为

$$s = 3ke, \quad e_{ij} = 2\mu \dot{e}_{ij}$$

其中 k 为体积压缩模量, μ 为粘性系数, 令

$$s_{ij} = H(t),$$

则有

$$e_{ij} = \frac{s}{2\mu}$$

(初始条件 $e_{ij}(0_-) = 0$).

$$\text{从而} \quad J_2(t) = \frac{1}{3k}, \quad J_1(t) = \frac{t}{2\mu}.$$

单轴响应:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{3} \left(\frac{1}{3k} + 2 \cdot \frac{t}{2\mu} \right) = \left(\frac{1}{9k} + \frac{t}{3\mu} \right) \sigma_0 \quad (11)$$

对不可压缩流体, 即 $k \rightarrow \infty$, 从而有

$$\varepsilon_{11} = \frac{t}{3\mu} \sigma_0.$$

显然系数 3μ 即为粘滞引力系数即 trouton 系

数^④。

(3) 粘弹性体

(i) 当剪切变形相当大时, 此时对应的体积变化总是有限的, 有理由忽略体积变化, 即 $J_2(t) = 0$, 从而单轴响应:

$$\varepsilon_{11} = \frac{2}{3} \sigma_0 J_1(t), \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\varepsilon_{11}}{2}.$$

可见单轴响应与畸变规律一致。

若畸变服从 Voigt 规律(注意到 Hooke 体与 Newton 体的畸变系数为 $2G$ 及 2μ), 即

$$J_1(t) = \frac{1}{2G} \left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\mu} t\right) \right]$$

从而单轴响应为

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{3G} \left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\mu} t\right) \right] H(t) \quad (12)$$

比较(12), (2)可见与一维状态响应规律相同。

若畸变服从 Maxwell 规律,

$$J_1(t) = \left(\frac{1}{2G} + \frac{t}{2\mu} \right) H(t)$$

则单轴响应

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{3} \left(\frac{1}{G} + \frac{t}{\mu} \right) H(t) \quad (13)$$

比较(13), (3), 可见与一维状态响应规律相同。

(ii) 一种更为接近实际的假定为: 体积膨胀为弹性的, 即 $s = 3k\varepsilon$ 。从而

$$J_2(t) = \frac{1}{3k},$$

单轴响应为:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_0}{3} \left[\frac{1}{3k} + 2J_1(t) \right]$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_0}{3} \left[\frac{1}{3k} - J_1(t) \right]$$

若畸变服从 Voigt 规律,

$$J_1(t) = \frac{1}{2G} \left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\mu} t\right) \right] H(t).$$

单轴响应为

$$\varepsilon_{11} = \left\{ \frac{1}{9k} + \frac{1}{3G} \left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\mu} t\right) \right] \right\} \sigma_0 H(t) \quad (14)$$

$$\varepsilon_{22} = \left\{ \frac{1}{9k} - \frac{1}{6G} \left[1 - \exp\left(-\frac{G}{\mu} t\right) \right] \right\} \sigma_0 H(t)$$

比较(14), (4)式, 可见此时单轴响应不同于一维 Voigt 模型的响应规律, 而是服从三参数固体, 即标准线性固体的一维状态下的单轴响应规律。

若畸变服从 Maxwell 规律

$$J_1(t) = \left(\frac{1}{2G} + \frac{t}{2\mu} \right) H(t)$$

单轴响应:

$$\varepsilon_{11} = \left(\frac{1}{9k} + \frac{1}{3G} + \frac{t}{3\mu} \right) \sigma_0 H(t) \quad (15)$$

$$\varepsilon_{22} = \left(\frac{1}{9k} - \frac{1}{6G} - \frac{t}{6\mu} \right) \sigma_0 H(t)$$

比较(15), (3), 可见与一维 Maxwell 模型响应规律相同。

上述讨论可见, 三维粘弹性的单轴响应(7), (8)是以蠕变特征予以表述, 力学意义清晰, 结论具有一般性。

参 考 文 献

- [1] Flügge, W., Viscoelasticity (second Edition), 165-170.
- [2] 同上, 22-23.
- [3] Fung, Y.C., Foundations of Solid mechanics, 413-423.
- [4] 同上, 128-131.
- [5] 陈文芳, 非牛顿流体力学, 科学出版社, 42-82.

(本文于 1991 年 6 月 11 日收到)

(上接第 14 页)

的深入研究与推广应用将会给计算力学与工程分析带来新的潜力与活力。

参 考 文 献

- [1] 曹志远, 张佑启, 半解析数值方法, 国防工业出版社(1991).
- [2] 李家金等编, 解析与数值结合法的理论及其工程应用, 湖南大学出版社(1990).
- [3] Leung, Y.T., Cheung, Y.K., 7-th Austr. Conf. on Mech. & Mater., Perth (1980), 217-221.
- [4] Chali, A. et. al., Structural Analysis, Chapman and Hall, London(1978).
- [5] Irons, B.M., J. Aero. Soc., 67(1963), 526-530.