正多边形截面形心主轴非唯一性的更一般证法

薛 福 林

（哈尔滨工业大学，150006）

文[1]中给出了正多边形截面形心主轴非唯一性的一个证明方法，这种方法必须利用等腰三角形的惯性矩和惯性积的公式，结果只能用于正多边形。

本文给出一个不利用等腰三角形惯性矩和惯性积公式的更一般的证法，结果也可推广到更广泛的图形上去。

方法如下：

以正 n 边形形心为原点建立直角坐标系 oyz。转轴后的坐标系为 $oy'z'$（图 1）。

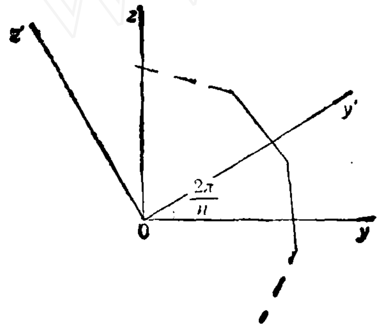

图 1

由转轴公式及正 n 边形的旋转对称性，有

$$I_{y'} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos\frac{4\pi}{n} - I_{yz}\sin\frac{4\pi}{n} = I_y$$

即

$$\frac{I_y - I_z}{2}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right) + I_{yz}\sin\frac{4\pi}{n} = 0 \qquad (1)$$

和

$$I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2}\sin\frac{4\pi}{n} + I_{yz}\cos\frac{4\pi}{n} = I_{yz}$$

即

$$\frac{I_y - I_z}{2}\sin\frac{4\pi}{n} - I_{yz}\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right) = 0 \qquad (2)$$

由(1) × $\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right)$ + (2) × $\sin\frac{4\pi}{n}$，得

$$\frac{I_y - I_z}{2}\left[\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{4\pi}{n}\right] = 0$$

整理得

$$(I_y - I_z)\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right) = 0$$

因为 $n \geq 3$ 则

$$1 - \cos\frac{4\pi}{n} > 0,$$

所以 $I_y = I_z$，代入(2)，得

$$I_{yz} = 0$$

再由坐标轴 y 方向的任意性，即得证正多边形形心主轴的非唯一性，即其任何一对互相垂直的形心轴皆为形心主轴。

在用本法的推证过程中，只用到了转轴公式和图形的旋转对称性，因此本法的结果可推广到具有曲边的旋转对称图形上去。例如图 2 的旋转对称图形也具有形心主轴的非唯一性*。

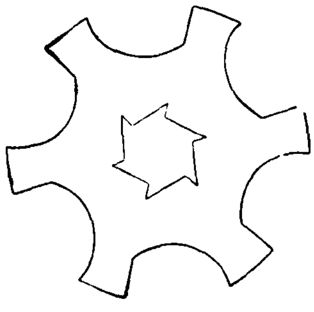

图 2

参 考 文 献

[1] 王汝昌，关于正多边形截面的形心主轴，力学与实践，13,3(1991).

* 《力学与实践》编者后记：上文图 2 中内部挖去的面积也不限于 60°-旋转对称性，例如，可改为挖去一个正五边形，又如在余下的面积中再挖去四个其中心对称分布的相同正方形，边的方向可任意。这类结论在机械设计动平衡中是熟知的。本刊今后不再进行有关这个问题的讨论。