$$-\sin k\left(x-\frac{l}{2}\right)\Big]\,h\left(x-\frac{l}{2}\right)\Big\}$$

式中 P 为任意常数。

上述结果与分段联立法所得结果完全相同，两种方法对比，本文的方法明显简单，无论跨数多少都可以直接写出结果，而用分段联立法计算，即使是上面这个很简单的算例也要经过冗长的推导才能得出结果。

对于其它端点条件，方程（13）的形式不变，只是 A_{li} 和振型函数有所不同，需重新推导，推导过程与此相同，在此不作进一步阐述。

4. 结束语

分段联立法是计算连续梁固有振动的基本方法，其优点是可使梁振动的频率方程和振型函数直接以解析式给出，但计算过程比较复杂。本文将中间支座约束反力看作作用于梁上的未知外力，将多跨梁简化为单跨梁，从而解决了由于分段带来的计算过程复杂的问题，同时，结果形式简单，统一，不受跨数，跨距的限制，便于实际应用。

本文是在等截面和特定的边界条件下导出的，因而有其局限性，应用时应予以注意。

参 考 文 献

[1] 张阿舟，用连续质量有限元素法求解动力系统的固有频率．固体力学学报，2(1985).

[2] 郭长城，建筑结构振动计算，中国建筑工业出版社(1982).

[3] 周叮，轴盘系统扭转振动的一个新解法，力学与实践，1(1989).

[4] P. Srinivasan. Mechanical vibration analysis. Tata McGraw-Hill Publishing Company limited (1982).

（本文于 1991 年 5 月 17 日收到）

交变力下有阻尼均匀杆纵向振动的分析和应用

李　光　布

（连云港化学矿业专科学校，江苏，222001）

提要　本文从实际出发，建立了均匀杆在纵向受拉，且受阻尼作用下的数学模型，得到了均匀杆共振频率。最后用胶带机实例加以验证．

关键词　交变力，均匀杆，纵向振动，胶带机

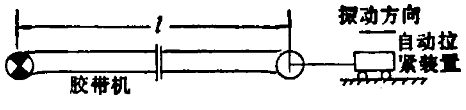

图 1　胶带机与自动拉紧装置简图

1. 前言

胶带运输机是现代工业中广泛使用的一种运输机械，自动拉紧装置是其中的一个设备，其关系可见图 1，它的作用就是在胶带运输机运行前和运行过程中、对胶带张力进行调整．由于设备本身缺陷和周围环境的原因，自动拉紧装置常会发生因失控而产生的振动，其表现为自动拉紧装置在一定范围内，作左右来回快速移动，如图 1 所示，有时来回振动次数可达 80 多次，整个胶带也随之做往复移动，尤其当拉紧装置移动频率接近胶带的自然频率时，这种振动将更加剧烈，这不但对自动拉紧装置、胶带，乃至整个系统和操作人员都将产生极大地危害，而且对生产也有很大影响，现场反映强烈．基于这种情况，对胶带纵向振动的分析是有实际意义的．

2. 数学模型的建立和求解

根据上述情况，在建立数学模型之前，需指出如下三个问题：

（1）胶带所受阻力在整个胶带上是均匀分布的，当自动拉紧装置发生振动时，它的方向是变化的，即向右振动，阻力方向应向左，反之，向左振动，阻力方向应向右，但阻力的幅值是不变

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

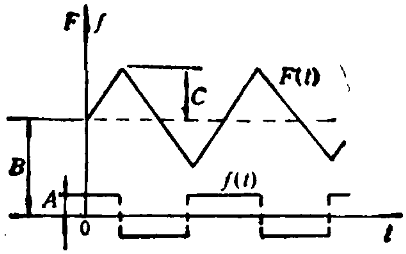

图2　拉紧装置及胶带受力图

的，因胶带自重和阻力子数都未变。

（2）胶带受拉紧装置作用的力也是变化的，即当向右振动时，拉力应线性增加，反之，向左振动，拉力线性减小。

（3）拉力和阻力的变化周期是一致的。

这样，拉紧装置振动时，胶带的振动模型为：设有一长为 l 的均匀杆，其一端固定，另一端受有交变拉力 F 的作用，这时，杆件的运行阻力 f 也随之变化（图 2），且 F 与 f 的方向和杆件的轴线一致，则杆件作纵向振动的数学模型可归结为下列定解问题：

$$\left.\begin{aligned} & a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=f(t) \\ & u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 \\ & \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{F(t)}{E}\quad u|_{x=0}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

式中 a 为杆中纵向波移动速度，且有 $a^2=E\cdot g/q$，E 为杆件刚度，q 为杆件的每米重量，

$$F(t)=B+8C\left(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\cdots\right)$$

$$f(t)=\frac{A}{\pi}\left(\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\cos 5\omega t+\cdots\right),$$

因此（1）式的定解问题为

$$\left.\begin{aligned} & a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{A}{\pi}\left(\cos\omega t-\frac{1}{3}\cos 3\omega t+\frac{1}{5}\cos 5\omega t+\cdots\right) \\ & u|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\quad u|_{x=0}=0 \\ & \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{B}{E}+\frac{8c}{E}\left(\sin\omega t-\frac{1}{9}\sin 3\omega t+\frac{1}{25}\sin 5\omega t-\cdots\right) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

用积分变换法求这个定解问题的解，由于 x 的变化范围是 $0<x<l$，所以只能取关于 t 的拉氏变换，以 $U(x,P)$ 表示函数 $u(x,t)$ 关于 t 的拉氏变换，在方程（2）两边变换，得

$$\begin{cases} a^2\dfrac{dU(x,P)}{dx^2}-P^2U(x,P)=\dfrac{A}{\pi}\left(\dfrac{P}{P^2+\omega^2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{P}{P^2+9\omega^2}+\cdots\right) & (3) \\ \dfrac{dU(x,P)}{dx}\Big|_{x=l}=\dfrac{B}{EP}+\dfrac{8c}{E}\left(\dfrac{\omega}{P^2+\omega^2}-\dfrac{1}{9}\dfrac{3\omega}{P^2+9\omega^2}+\cdots\right) & (4) \\ U(x,P)|_{x=0}=0 & (5) \end{cases}$$

在满足条件（4）和（5）的情况下，方程（3）的解为

$$U(x,P)=\frac{\mathrm{sh}\frac{P}{a}X}{\mathrm{ch}\frac{P}{a}l}\left\{\frac{e^{\frac{Pl}{a}}}{P^2}\cdot\frac{A}{\pi}\cdot\left(\frac{P}{P^2+\omega^2}-\frac{1}{3}\frac{P}{P^2+9\omega^2}+\cdots\right)-\frac{a}{P}\left[\frac{B}{EP}+\frac{8c\omega}{E}\left(\frac{1}{P^2+\omega^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{P^2+9\omega^2}+\cdots\right)\right]\right\}+\frac{e^{\frac{Px}{a}}-1}{P^2}\cdot\frac{A}{\pi}\left(\frac{P}{P^2+\omega^2}-\frac{1}{3}\frac{P}{P^2+9\omega^2}+\cdots\right) \quad (6)$$

对（6）式中各项分别进行积分反变换，得

$$u(x,t)=L^{-1}[U(x,P)]$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{A}{(2m-1)\pi}\left[\left(\sin(2m-1)\omega\times\left(t+\frac{l}{a}\right)\cdot\sin\frac{2m-1}{a}\omega x\right)\Big/\right.\right.$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left((2m-1)^2\omega^2 \cdot \cos\frac{2m-1}{a}\omega l\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(16l^2 \cdot \sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x\right.$$

$$\left.\cdot \sin\frac{(2k-1)a\pi}{2l}t\right)\Big/\Big((2k-1)\pi$$

$$\left.\left.\cdot\left[4l^2(2m-1)^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2\right]\Big)\right]\right\}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{8Bl}{(2k-1)^2\pi^2E}\right.$$

$$\left.\cdot \sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x \cdot \cos\frac{(2k-1)a\pi}{2l}t\right]+$$

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{8ac\omega}{(2m-1)E}\right.$$

$$\left[\left(\sin(2m-1)\omega t \cdot \sin\frac{2m-1}{a}\omega x\right)\Big/\right.$$

$$\left((2m-1)^2\omega^2 \cdot \cos\frac{2m-1}{a}\omega l\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(16l^2 \cdot \sin\frac{(2k-1)\pi}{2l}x\right.$$

$$\left.\cdot \sin\frac{(2k-1)a\pi}{2l}t\right)\Big/\Big((2k-1)\pi$$

$$\left.\left.\left[4l^2 \cdot (2m-1)^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2\right]\Big)\right]\right\}$$

$$+\frac{A}{\pi\omega^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\left[\cos(2m-1)\omega t\right.$$

$$\left.-\cos(2m-1)\omega\left(\frac{x}{a}+t\right)\right]$$

上式就是均匀杆受交变力作用，杆上各点的位移表达式。从上式不难发现，当

$$4l^2(2m-1)^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2=0$$

即

$$\omega=\frac{2k-1}{2m-1}\cdot\frac{a\pi}{2l}\quad\binom{k}{m}=1, 2, 3\cdots) \tag{7}$$

$u(x,t)\to\infty$，即要产生共振现象，共振频率为

$$\omega_{gz}=\frac{2k-1}{2m-1}\cdot\frac{\pi}{2l}\sqrt{\frac{Eg}{q}} \tag{8}$$

表 1 即是各共振点(频率)的分布值。须注意的是，当 m 较大时，即运动阻力中 $(2m-1)$ 以谐波的幅值越来越小，故对实际振动的影响不大，可取 $m=1$ 及 $m=2$ 即可。

表 1

ω_{gz}	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$m=1$	$\frac{a\pi}{2l}$	$\frac{3\pi a}{2l}$	$\frac{5\pi a}{2l}$
$m=2$	$\frac{a\pi}{6l}$	$\frac{3\pi a}{6l}$	$\frac{5\pi a}{6l}$
$m=3$	$\frac{a\pi}{10l}$	$\frac{3\pi a}{10l}$	$\frac{5\pi a}{10l}$

3. 实例验证

在验证之前，首先需了解胶带输送机的胶带是否可以看作均匀杆。从胶带的结构即可看出它是各断面均质的，而因悬垂度，因较小(一般小于 75 mm，而运输机长有几百米)，故可认为是直的，这不会影响到它的精确度。由此可见，用(8)式来求解胶带的振动频率是完全可行的。

下面是广东某矿山主胶带输送机的实测数据

胶带输送机总长 $l=470$m;

胶带型号 GX-1000;

胶带宽度 $B=1200$mm;

胶带每米重量 $q=30$kg/m;

胶带刚度 $E=7.21\times10^6$kg.

因自动拉紧装置的振动和测试是在输送机主机起动前发生的，故弹性波在胶带中传播速度为

$$a=\sqrt{E\cdot\frac{g}{q}}=\sqrt{7.21\times10^6\times\frac{9.8}{30}}$$

$$=1535\text{m/s}$$

表 2

ω_{gz}	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$m=1$	5.13	15.38	25.63
$m=2$	1.71	5.13	8.55
$m=3$	1.03	3.08	5.13

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

将已知数据代入表 1 中,可得表 2。

又根据实测,拉紧装置发生振动时,拉紧装置的振动周期 $T_0 \doteq 1'$。

$$\omega = \frac{\pi}{T_0} \doteq 3.14$$

又由表 2 可见,$\omega_{gs}|_{n=3}^{k=2} = 3.08$。其值与工作频率 $\omega = 3.14$ 相差仅为 2%,故可以推知,这时产生的振动力会较大。这个结论与实测情况完全吻合。

参 考 文 献

[1] 南京工学院数学教研组编,数学物理方程与特殊函数,北京:人民教育出版社(1979.4).

[2] 李光布,胶带输送机自动拉紧装置的计算原理及振动分析,淮南矿业学院硕士论文(1988.6).

(本文于 1990 年 11 月 12 日收到)

非均质变截面弹性直杆纵向自由振动的差分解法

黎 明 安　　王 忠 民

(陕西机械学院,710048)

提要 本文研究了最一般情况下的弹性模量、横截面面积和单位杆长质量是截面位置的函数的弹性直杆的纵向自由振动问题,对于函数的具体形式无任何限制条件。提出了一种较简便而又能保证一定精度的差分解法,并给出了算例,和精确解比较、证明这种方法是可靠的。

关键词 位移列阵,传递矩阵,差分解

1. 前言

关于非均质变截面弹性直杆的纵向自由振动问题,已有一些文章进行了讨论,文献[1,2]对弹性模量,截面面积和单位杆长质量均按指数变化规律的弹性直杆进行了讨论,文献[1]的解的形式较复杂,文献[3]需要用 Bessel 函数表述。文献[2]的讨论也只是限于函数是指数形式且提及了函数的变化是缓慢的情况。众所周知的李兹法是近似计算固有频率的常用方法,但计算精度取决于事先假设的振型函数,对于高阶频率的计算往往得不到满意的效果。本文从一般形式的微分方程入手,经差分处理将振动微分方程巧秒地表述成两个代数方程,由边界条件的代入得到频率方程。实例说明了本文提出的计算处理方法弥补了已有的方法的不足。通过计算低阶和高阶的固有频率和振型,证明了这种方法是可靠的。

2. 纵向振动的微分方程

对于长为 l 非均质变截面弹性直杆,其弹性模量,截面面积和单位杆长质量均随直杆的轴线发生变化,其纵向振动微分方程是:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \qquad (1)$$

式中:t 为时间,x 为直杆轴向坐标,u 为杆振动时对静止位置的偏离,$E(x)$ 为 x 处杆的弹性模量,$A(x)$ 为 x 处杆的横截面面积,$\mu(x)$ 为 x 处杆单位长度的质量。

设(1)式的解为

$$u(x,t) = U(x)\cdot\sin(\omega t + \phi) \qquad (2)$$

式中 $U(x)$ 为杆纵向振型函数,ω 为杆的纵向振动频率,ϕ 为相位常数。

引进无因次变量

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \qquad (3)$$

将(2)代入方程(1)并考虑到(3),便得

$$\frac{d}{d\xi}\left[E(\xi)A(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi}\right] + \mu(\xi)l^2\omega^2 U(\xi) = 0 \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1) \qquad (4)$$

设 $E(\xi)$,$A(\xi)$,$\mu(\xi)$ 为 ξ 的任意函数,即设

$$E(\xi) = E_0F_1(\xi),\ A(\xi) = A_0F_2(\xi),$$
$$\mu(\xi) = \mu_0F_3(\xi)$$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net