

\*) 于午面上这对应于图 2 的 BC 曲线。从图 2 中看出在 AB 段, 当  $\varphi$  角增大(对应的  $|\Gamma|$  增大),  $\sigma_i$  也增大。但在进入 BC 段后,  $|\Gamma|$  增大  $\sigma_i$  反而要减小。这是因为在三向受压时,  $\Gamma = -\infty$ , 而  $\sigma_i = 0$ 。但这种情况用  $\sigma_i$  大小来作为强度破坏准则不太合适, 如改用  $|I_1|$  作为强度准则, 这时  $|\Gamma|$  增大  $|I_1|$  也增大。从这里看出对于强度准则如只使用一个参数同样也不能全面适用于各种应力状态。

### 参 考 文 献

- [1] 李余德, 应力状态参数  $\Gamma$ , 力学与实践, 12, 4(1990), 40.
- [2] 王仁、黄文彬, 塑性力学引论, 北京大学出版社(1982), 66.
- [3] Chen, W. F., Hau, D. J., Plasticity for structural engineer, Springer (1988).

(本文于 1990 年 8 月 4 日收到)

## 用弹性理论求解片状弹簧承受拉伸和扭转时的变形

林 建 兴

(浙江大学力学系, 310027, 杭州)

机械、仪器、仪表中, 片状弹簧或拉丝应用甚广。本文用弹性理论求解片状弹簧承受拉伸和扭转时的变形。作为力学理论在工程中的应用实例, 可供有关专业的师生和工程技术人员参考。

### 1. 矩形截面杆的自由扭转

图 1 表示一矩形截面, 其边长为  $b$  和  $h$ 。用  $\alpha$  表示杆件受扭时相距为 1 单位长度的两截面之间的相对扭转角。由弹性理论解得矩形截面杆自由扭转的主要结果如下

位移分量

$$u = -\alpha zy \quad v = \alpha zx \quad w = \alpha \varphi(x, y) \quad (1)$$

剪应力分量

$$\tau_{xz} = G\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \quad \tau_{yz} = G\alpha \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (2)$$

扭转函数

$$\varphi(x, y) = xy + \sum_m c_m \sin \lambda_m x \sinh \lambda_m y \quad (3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} c_m &= \frac{8b^2}{m^3 \pi^3 ch \frac{m\pi h}{2b}} \cdot (-1)^{\frac{m+1}{2}} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \\ \lambda_m &= \frac{m\pi}{b} \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

扭矩

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dx dy \\ &= G\alpha \iint_A \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy \end{aligned}$$

若记

$$I_0 = \iint_A \left( x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dy \quad (5)$$

力学与实践

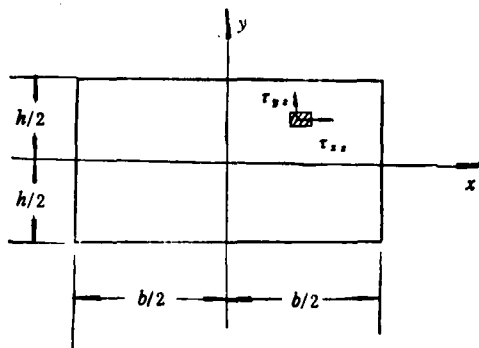


图 1

即得

$$\alpha = \frac{M_x}{GI_0} \quad (6)$$

### 2. 片状弹簧承受拉伸和扭转时的变形

由于片状弹簧的截面尺寸  $b \gg h$ , 受扭时变形较大, 将引起纵向纤维的长度改变。设扭转前纵向纤维的微分线段  $ds = dx$ , 扭转变形后它将发生倾斜并伸长至  $ds_1$ , 不难看出

$$ds_1 = \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 + \left( dx + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right)^2}$$

相应的线应变为

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{ds_1 - ds}{ds} \\ &= \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} - 1 \end{aligned}$$

将(1)式代入上式, 并化简得

$$\epsilon_x = \frac{1}{2} \alpha^2 (x^2 + y^2) \quad (a)$$

在仪器、仪表中的片状弹簧常受到预拉紧力的作用，若以  $\varepsilon_0$  表示相应的初应变，则纵向纤维的总应变为

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \alpha^2 (x^2 + y^2) \quad (b)$$

设纵向纤维之间无挤压，由虎克定律求得法应力

$$\sigma = E\varepsilon = E\varepsilon_0 + \frac{E\alpha^2}{2} (x^2 + y^2) \quad (c)$$

由于片状弹簧受扭时，其横截面发生翘曲，截面上的法向应力于截面翘曲后将不再平行于  $x$  轴，它在三个坐标轴方向的分量分别用  $p_x$ 、 $p_y$  和  $p_z$  表示（见图 2），容易看出

$$p_x = -\sigma \frac{\partial w}{\partial x} \quad p_y = -\sigma \frac{\partial w}{\partial y} \quad p_z \approx \sigma \quad (d)$$

进而可求得轴向力

$$P = \iint_A p_x dA = \iint_A \sigma \frac{\partial w}{\partial x} dA \quad (e)$$

和由于截面上法向应力的倾斜而产生对  $x$  轴的附加力矩

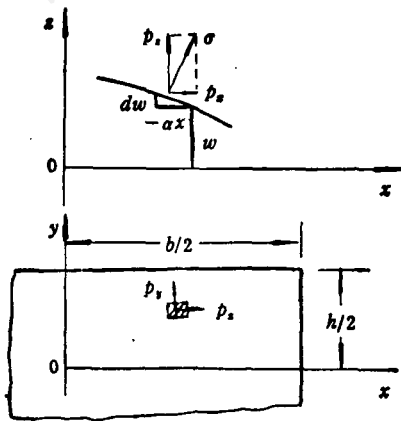


图 2

$$M_x = \iint_A (x p_y - y p_x) dA = \iint_A \sigma \left( y \frac{\partial w}{\partial x} - x \frac{\partial w}{\partial y} \right) dA \quad (f)$$

将(c)式代入(f)式，完成积分得

$$P = E \left[ \varepsilon_0 A + \frac{\alpha^2}{2} (I_x + I_y) \right] \quad (g)$$

式中  $A$  为弹簧片的横截面积，

$$I_x = \iint_A y^2 dA \quad \text{和} \quad I_y = \iint_A x^2 dA$$

分别为横截面对  $x$  轴和  $y$  轴的惯性矩。对于矩形截面，

$$A = bh, \quad I_x = \frac{1}{12} bh^3, \quad I_y = \frac{1}{12} hb^3.$$

把这些结果代入(g)式即得

$$P = Ebh \left[ \varepsilon_0 + \frac{\alpha^2}{24} (b^2 + h^2) \right]$$

注意到  $h \ll b$ ，可将上式化为

$$P = Ebh \left[ \varepsilon_0 + \frac{\alpha^2 b^2}{24} \right] \quad (7)$$

将(1)式和(c)式代入(f)式得

$$M_x = E\alpha\varepsilon_0 \iint_A \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA + \frac{E\alpha^2}{2} \iint_A (x^2 + y^2) \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA \quad (h)$$

上式等号右边的第一个积分

$$\iint_A \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA = \iint_A (x^2 + y^2) dA - \iint_A \left( x^2 + y^2 \right) \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dA = I_x + I_y - I_0$$

对于  $b \gg h$  的矩形截面，

$$I_x + I_y - I_0 = \frac{1}{12} hb^3 + \frac{1}{12} bh^3 - \frac{1}{3} bh^3 = -\frac{1}{12} hb^3,$$

代入上式即得

$$\iint_A \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA = \frac{1}{12} hb^3 \quad (i)$$

将(3)式代入(h)式等号右边的第二个积分，并略去次要项得

$$\begin{aligned} & \iint_A (x^2 + y^2) \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA \\ &= -\iint_A x^2 \left( x^2 + \sum_m c_m \lambda_m x \sin \lambda_m x \operatorname{ch} \lambda_m y \right) dA \\ &= -\int_{-b/2}^{b/2} \int_{-b/2}^{b/2} x^4 dx dy - \sum_m c_m \lambda_m \int_{-b/2}^{b/2} \\ & \quad \times \operatorname{ch} \lambda_m y dy \int_{-b/2}^{b/2} x^3 \sin \lambda_m x dx \end{aligned}$$

将(4)式代入上式并完成积分得

$$\iint_A (x^2 + y^2) \left( y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA = \frac{1}{80} hb^5 \quad (j)$$

将(i)和(j)式的结果代入(h)式可得

$$M_x = \frac{1}{12} E\alpha\varepsilon_0 hb^3 + \frac{1}{160} E\alpha^2 hb^5 \quad (8)$$

从(7)和(8)式中消去  $\varepsilon_0$  即得

$$M_x = \frac{b^2 P}{12} \alpha + \frac{Ehb^5}{360} \alpha^2 \quad (9)$$

再将  $I_0 = \frac{1}{3} bh^3$  代入(6)式，求得片状弹簧横截面上

的剪应力对  $x$  轴的力矩为  $M_x = \frac{1}{3} Gabh^3$  (10)

(下转第 60 页)

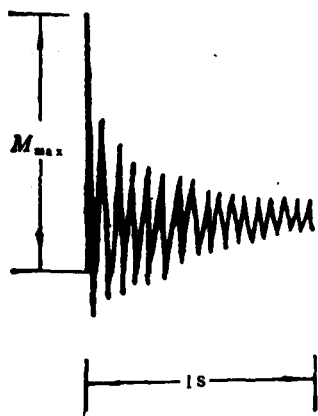


图 2

基本一致,其 TAF 等于 2.34, 图 2 表示 4—5 轴段的扭矩波形图,其第一波峰明显突起,这是与  $P_1$  对应的高频分量被激起所致。因尖峰发生时间相当短,阻尼对第一波峰的影响很小,但以后的高频波几乎都被衰减了,只剩下基频波。从而在波形图中形成了第一波峰远高于其它波峰的情况,其 TAF 值等于 4。在实测中可以见到这类波形<sup>[3]</sup>。

从该例可以看到高频振动发生的内因是系统的结构分布使得正则振型矩阵中出现了与高频对应的差值  $(A_{11}^{(1)} - A_{11}^{(2)})$  比基频对应的差值  $(A_{11}^{(1)} - A_{11}^{(2)})$  大得多的情况,从而使 4—5 轴段的与  $P_1$  对应的振动明显激起。外因是系统承受了初速度,而在轧机系统中,初速度的形成是与接手中的原始间隙及钢锭咬入时轧辊和

(上接第 70 页)

综合(9)和(10)式的结果,求得片状弹簧横截面上的总扭矩

$$M_s = M_r + M = \frac{Gbh^3}{3} \alpha + \frac{b^2P}{12} \alpha + \frac{Ehb^3}{360} \alpha^3 \quad (11)$$

若以  $\varphi$  表示弹簧片两端面的相对扭转角,  $l$  表示其长

钢锭的速度差  $\Delta V$  等因素有关<sup>[2]</sup>。图 3 表明,当间隙不同程度打开时,各轴段的 TAF 值随间隙的变化情况。

从上面的论述可以看到限制高频振动应从

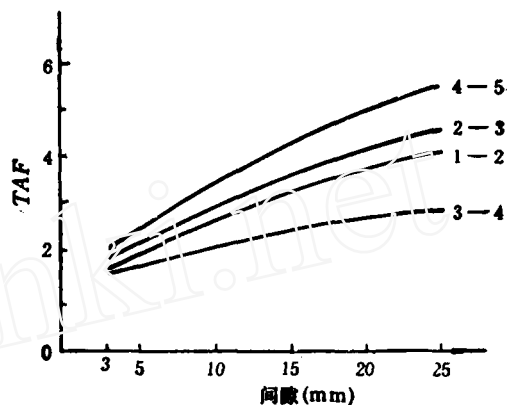


图 3

两方面进行,一是改变系统结构,另一是控制初条件的形成。在本文算例中,要设法减少  $K_s$  和控制接手中原始间隙及速度差  $\Delta V$ 。

#### 参 考 文 献

- [1] 铁摩辛柯, S., 工程中的振动问题, 人民铁道出版社 (1978).
- [2] 李真, 直串型初轧机主传动系统扭振的程序设计, 重型机械, 12(1986).
- [3] Guy Monaco, Dynamics of Rolling Mills, Mathematical Models and Experimental Results, Iron and Steel Engr, December(1977).

(本文于 1990 年 8 月 12 日收到)