论应力状态参数Γ的意义

黄 文 彬

（北京农业工程大学，100083）

在文[1]中，作者试图用一个应力状态参数Γ来全面描述各种应力场的特征，但从理论上可以证明只用一个参数是不够的。从现有的描述材料强度曲面的方法中，本文证明了参数Γ和 Lode 系数μ_σ是两个独立的参数，因此也不存在Γ和μ_σ谁更能全面地描述应力状态特征的问题，具体论述如下：

1. 在主应力空间描述材料强度曲面

对初始各向同性材料，材料的强度破坏准则(包括塑性破坏或脆性断裂)在主应力空间$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$上总可以表示成如下形式的曲面

$$f_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{1}$$

为了方便起见，更多的是采用柱坐标(r, θ, z)来表示。这就是通常塑性力学教材中在建立π平面时用柱坐标应力空间，z轴与$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$轴的夹角相等。$r$, θ, z与$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$之间有关系[2]

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \\ r &= \sqrt{2I_2'} \\ \theta &= \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}\right) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中I_1是应力第一不变量，I_2'是应力偏量第二不变量，这时在柱坐标下的强度破坏面可表示为形式

$$f_2(r, \theta, z) = 0 \tag{3}$$

Lode 系数的定义为

$$\mu_\sigma = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\theta \tag{4}$$

因此可以用μ_σ来代替参数θ。按[1]中对Γ的定义有

$$\Gamma = \frac{I_1}{\sigma_i} = \frac{I_1}{\sqrt{3I_2'}} = \sqrt{2}\,\frac{z}{r} \tag{5}$$

破坏曲面在子午面(r, z)上任一点M有关系(图1)

$$\frac{z}{r} = \mathrm{ctg}\varphi \tag{6}$$

因此我们也可以用Γ来代替φ角。注意到

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2}}\, r,$$

因此(3)式中的r, θ, z三个坐标参数，可以用另外三个参数μ_σ, Γ, σ_i来替换，这时强度破坏面还可表示为如下形式

$$f_3(\mu_\sigma, \Gamma, \sigma_i) = 0 \tag{7}$$

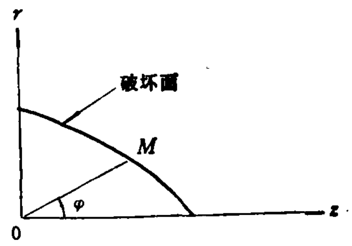

图 1

从曲面的几何图形中可以看出，θ和φ两个角度是互相独立的，因此对应的参数μ_σ和Γ是两个表示应力特征的独立参数。剩下的参数σ_i则不表示应力特征而是表示材料强度大小特征的参数。从上述分析看出，需要用两个独立的参数才能全面描述各种可能应力状态特征。只用一个Γ参数是不够的。例如当应力点都处在π平面上时，这时永远有$\Gamma = 0$，应力状态特征完全由μ_σ来刻划。

2. Γ大小与破坏准则之间的关系

对不同的μ_σ值在子午面(r,z)上的强度曲线一般不同，但总的形状大致如图1所示。(指$z>0$区间)。这时φ小时，r也减小，换句话说，即Γ增大时σ_i减小即容易破坏，这和文[1]的预计一致。具体定量关系，则要从(7)式中，由给定μ_σ，Γ值求出σ_i值，因此给出表达式(7)式是关键。目前有关$f_3 = 0$的理论模型有多种，但试验结果则不很多，在文[3]中对混凝土材料给出了$f_3 = 0$的形式，一般说来Γ对σ_i的影响比μ_σ对σ_i的影响明显。

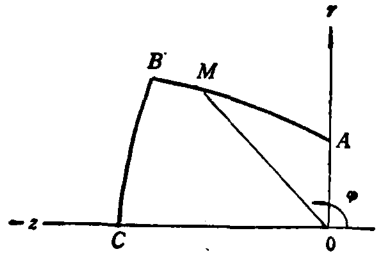

图 2

在$z<0$区间(这时$\Gamma<0$)情况有些不同，在靠近三向压缩区附近，强度曲面的形状象个帽子。在(r,

π) 子午面上这对应于图 2 的 BC 曲线。从图 2 中看出在 AB 段，当 φ 角增大(对应的 $|\Gamma|$ 增大)，σ_i 也增大。但在进入 BC 段后，$|\Gamma|$ 增大 σ_i 反而要减小。这是因为在三向受压时，$\Gamma = -\infty$，而 $\sigma_i = 0$。但这种情况用 σ_i 大小来作为强度破坏准则不太合适，如改用 $|I_1|$ 作为强度准则，这时 $|\Gamma|$ 增大 $|I_1|$ 也增大。从这里看出对于强度准则如只使用一个参数同样也不能全面适用于各种应力状态。

参 考 文 献

[1] 李余德，应力状态参数 Γ，力学与实践，12,4(1990)，40.

[2] 王仁、黄文彬，塑性力学引论，北京大学出版社(1982)，66.

[3] Chen, W. F., Hau, D. J., Plasticity for structured engineer, Springer (1988).

(本文于 1990 年 8 月 4 日收到)

用弹性理论求解片状弹簧承受拉伸和扭转时的变形

林 建 兴

(浙江大学力学系，310027，杭州)

机械、仪器、仪表中，片状弹簧或拉丝应用甚广。本文用弹性理论求解片状弹簧承受拉伸和扭转时的变形。作为力学理论在工程中的应用实例，可供有关专业的师生和工程技术人员参考。

1. 矩形截面杆的自由扭转

图 1 表示一矩形截面，其边长为 b 和 h。用 α 表示杆件受扭时相距为 1 单位长度的两截面之间的相对扭转角。由弹性理论解得矩形截面杆自由扭转的主要结果如下

位移分量

$$u = -\alpha zy \quad v = \alpha zx \quad w = \alpha\varphi(x,y) \tag{1}$$

剪应力分量

$$\tau_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right) \qquad \tau_{yz} = G\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right) \tag{2}$$

扭转函数

$$\varphi(x,y) = xy + \sum_m c_m \sin\lambda_m x \,\mathrm{sh}\lambda_m y \tag{3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} c_m &= \frac{8b^2}{m^3\pi^3\mathrm{ch}\dfrac{m\pi h}{2b}}\cdot(-1)^{\frac{m+1}{2}} \quad (m = 1, 3, 5, \cdots) \\ \lambda_m &= \frac{m\pi}{b} \quad (m = 1, 3, 5, \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

扭矩

$$\begin{aligned} M_t &= \iint_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})dxdy \\ &= G\alpha\iint_A\left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy \end{aligned}$$

若记

$$I_t = \iint_A\left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dxdy \tag{5}$$

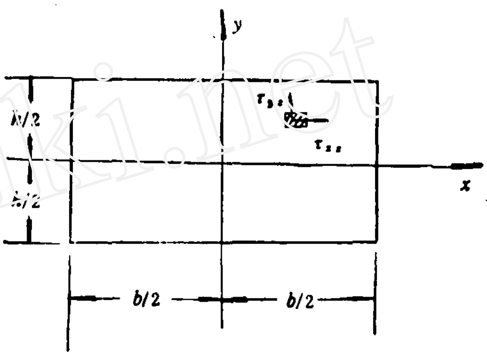

图 1

即得

$$\alpha = \frac{M_t}{GI_t} \tag{6}$$

2. 片状弹簧承受拉伸和扭转时的变形

由于片状弹簧的截面尺寸 $b \gg h$，受扭时变形较大，将引起纵向纤维的长度改变。设扭转前纵向纤维的微分线段 $ds = dz$，扭转变形后它将发生倾斜并伸长至 ds_1，不难看出

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)^2}$$

相应的线应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{ds_1 - ds}{ds} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} - 1 \end{aligned}$$

将(1)式代入上式，并化简得

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}\alpha^2(x^2 + y^2) \tag{a}$$