

垂直陀螺有安装误差时的万向支架误差

陈正明 丁世华
(南京建筑工程学院, 210009)

提要 本文对由于陀螺安装在航行体上出现误差时的万向支架误差与没有安装误差时的万向支架误差进行比较, 从而说明安装误差对测量航行体姿态角的影响。
关键词 方向余弦矩阵, 垂直陀螺, 欧拉角, 万向支架误差

$$\begin{aligned}
 (\xi, \eta, \zeta) &\xrightarrow[\xi, \xi_1]{\beta} (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \xrightarrow[\xi, \xi_2]{\alpha} (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) \\
 &\xrightarrow[\eta, \eta_c]{\gamma} (x_c, y_c, z_c)
 \end{aligned}$$

1. 引言

自由陀螺转子轴具有定轴性, 若将陀螺安装在航行体内, 将转子轴 H 的方向与固定坐标系 (ξ, η, ζ) 中的某一坐标轴重合, 则 H 成为固定坐标系中某一轴在航行体中的具体体现。航行体的姿态角可以通过这一特性进行测量。但是在测量时由于陀螺仪的测量轴与航行体的定义轴不能完全重合, 测量结果与实际有误差, 这种纯粹由万向支架的运动学特性所引起的陀螺仪的指示误差称为万向支架误差^[1]。

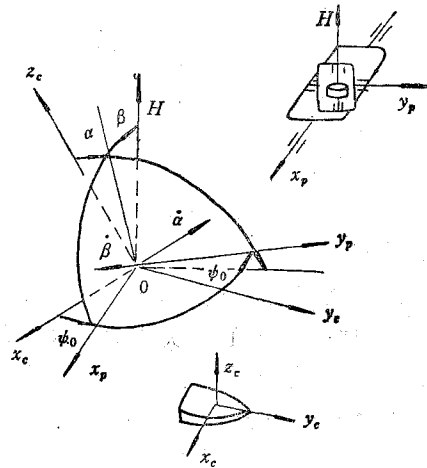


图2 陀螺仪的测量轴

本文以垂直陀螺为例, 当该陀螺开始安装在航行体上时就出现了误差, 说明这种安装误差对万向支架误差的影响。

2. 垂直陀螺有安装误差时的万向支架误差公式

2.1 航行体的标准姿态角与定义轴

设航行体坐标系 (x_c, y_c, z_c) 相对于固定坐标系 (ξ, η, ζ) (ζ 为地垂线) 的欧拉角 ψ (航向角)、 θ (纵倾角)、 γ (横滚角) 按以下转动次序确定 (图1)。

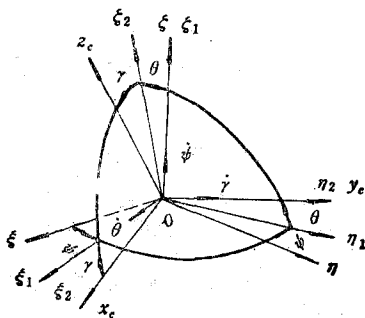


图1 航行体的标准姿态角与定义轴

则由上面的坐标变换得到

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \theta \sin \gamma \\ \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma \\ -\cos \theta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \theta \sin \psi \sin \theta \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \\ \cos \psi \cos \theta - \cos \psi \sin \theta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma \\ \sin \theta \cos \theta \cos \gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (1)$$

上式右边的三维方阵为 (x_c, y_c, z_c) 与 (ξ, η, ζ) 间的方向余弦矩阵。

2.2 垂直陀螺仪的万向支架误差垂直陀螺仪可以测量航行体的纵倾角 θ 及横滚角 γ 。

2.2.1 当垂直陀螺仪的外环轴沿航行体横轴安装, α, β 分别为外环相对航行体和内环相对外环的转角。该陀螺仪的外环轴在安装时与

航行体横轴在水平面内有 ϕ_0 误差, 由图 2 得转子轴 H 与航行体坐标 (x_c, y_c, z_c) 的关系

$$H = \begin{bmatrix} -\sin \beta \cos \phi_0 - \cos \beta \sin \alpha \sin \phi_0 \\ -\sin \beta \sin \phi_0 + \cos \beta \sin \alpha \cos \phi_0 \\ \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \quad (2)$$

这种情况下, H 轴是 ζ 轴在航行体中的具体体现, 因此上式中的方向余弦与式(1)中的方向余弦矩阵中的第三行各元素应一一相等, 得到

$$-\sin \beta \cos \phi_0 - \cos \beta \sin \alpha \sin \phi_0 = -\cos \theta \sin \gamma \quad (3)$$

$$-\sin \beta \sin \phi_0 + \cos \beta \sin \alpha \cos \phi_0 = \sin \theta \quad (4)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \cos \theta \cos \gamma \quad (5)$$

将式(4)乘以 $\cos \phi_0$, 减去式(3)乘以 $\sin \phi_0$ 的结果再除以式(5)得到

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \phi_0 \cos \theta \sin \gamma + \cos \phi_0 \sin \theta}{\cos \theta \cos \gamma} \quad (6)$$

这时 α 角是 θ 角的测量角, 因此纵倾万向支架误差为

$$\Delta \theta = |\theta - \alpha|$$

再将式(3)乘以 $\cos \phi_0$ 与式(4)乘以 $\sin \phi_0$ 相加, 得到

$$\sin \beta = \cos \phi_0 \sin \gamma \cos \theta - \sin \phi_0 \sin \theta \quad (7)$$

这时 β 角是 γ 角的测量角, 因此横滚万向支架误差为

$$\Delta \gamma = |\gamma - \beta|$$

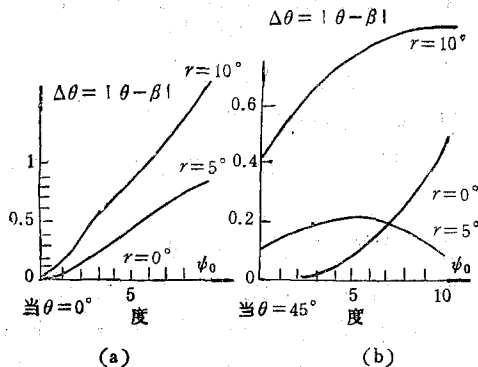


图 3 垂直陀螺仪的外环轴沿航行体横轴安装时纵倾万向支架误差 $\Delta \theta$

为便于分析, 分别按纵倾角 $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$ 两种情况, 首先计算纵倾万向支架误差 $\Delta \theta$ 的变化, 计算结果见图 3(a), (b); 再计算横滚万向支架误差 $\Delta \gamma$, 计算结果见图 4(a), (b).

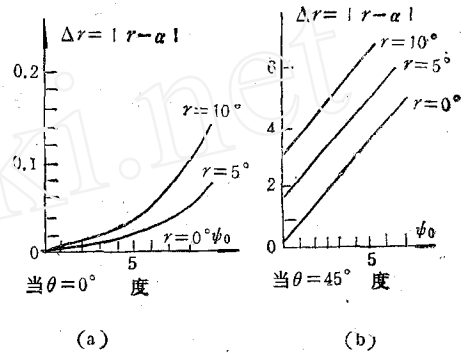


图 4 垂直陀螺仪的外环轴沿航行体横轴安装时横滚万向支架误差 $\Delta \gamma$

对图 3、图 4 曲线分析如下:

(1) 当 $\phi_0 = 0$, 即安装没有误差时

若 $\theta = 0^\circ$, $\Delta \theta = 0^\circ$ (图 3(a)); $\Delta \gamma = 0^\circ$

(图 4(a))

$\theta = 45^\circ$, $\gamma = 0^\circ$ 时, $\Delta \theta = 0$ (图 3(b)),

$\Delta \gamma = 0$ (图 4(b))

上述情况, 皆没有纵倾和横滚万向支架误差。

若 $\theta = 45^\circ$ 时, 随着 γ 角增加, $\Delta \theta$ 亦增加(图 4(b)), $\Delta \gamma$ 亦增加(图 4(b)), 而后者比前者增加要大得多。

(2) 当有安装误差 ϕ_0 时

若有纵倾角 θ 时, ϕ_0 对 $\Delta \gamma$ 影响较大, 例如当 $\theta = 45^\circ$, $\phi_0 = 5^\circ$ 时(图 4(b)), 其中 $\gamma = 0^\circ$, $\Delta \gamma = 3.533^\circ$; $\gamma = 5^\circ$, $\Delta \gamma = 5.013^\circ$; $\gamma = 10^\circ$, $\Delta \gamma = 6.52^\circ$ 。可见安装误差造成的横滚万向支架误差较大, 在工程中应给予足够的重视。

若有纵倾角 θ 时, ϕ_0 对 $\Delta \theta$ 亦有影响(图 3(b)), 但没有上述情况严重。

若纵倾角等于零, ϕ_0 对 $\Delta \gamma$ 影响不大, 对 $\Delta \theta$ 略有影响。

2.2.2 当垂直陀螺仪的外环轴沿航行体纵轴安装时, 如果没有安装误差, 这时是没有万向支架误差的^[1]。

如果在水平面上, 陀螺仪外环轴与航行体

纵轴有 ϕ_0 安装误差时, 由图 5 可以得到陀螺仪的转子轴 H 与航行体坐标 (x_c, y_c, z_c) 之间的关系

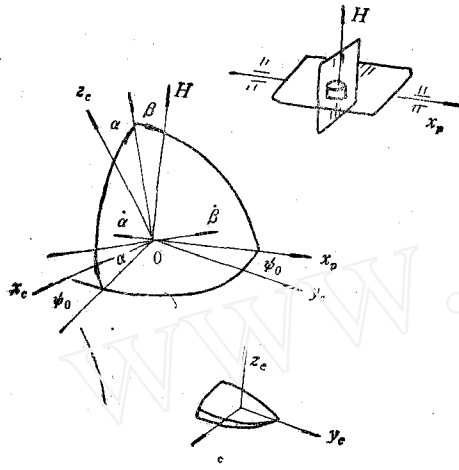


图 5 陀螺仪的测量轴

$$H = \begin{bmatrix} -\sin \phi_0 \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \cos \phi_0 \\ \sin \beta \cos \phi_0 - \cos \beta \sin \alpha \sin \phi_0 \cos \beta \cos \alpha \\ \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (8)$$

上式中方向余弦与式(1)中的方向余弦矩阵中第三行各元素应一一相等, 得到

$$-\sin \phi_0 \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \cos \phi_0 = -\cos \theta \sin \gamma \quad (9)$$

$$\sin \beta \cos \phi_0 - \cos \beta \sin \alpha \sin \phi_0 = \sin \theta \quad (10)$$

$$\cos \beta \cos \alpha = \cos \theta \cos \gamma \quad (11)$$

由式(9)乘以 $\sin \phi_0$ 减去式(10)乘以 $\cos \phi_0$ 得到

$$\sin \beta = \cos \phi_0 \sin \theta + \sin \phi_0 \cos \theta \sin \gamma \quad (12)$$

β 角是纵倾角 θ 的测量角, 因此纵倾万向支架误差为

$$\Delta \theta = |\theta - \beta|$$

再将式(10)移项, 得到

$$\cos \phi_0 \sin \beta - \sin \theta = \cos \beta \sin \alpha \sin \phi_0$$

将上式除以式(11), 并将式(12)的 $\sin \beta$ 代入化简, 得到

$$\tan \alpha = \frac{\cos \phi_0 \cos \theta \sin \gamma - \sin \phi_0 \sin \theta}{\cos \theta \cos \gamma} \quad (13)$$

α 角是横滚角 γ 的测量角, 因此横滚万向支架误差为

$$\Delta \gamma = |\gamma - \alpha|$$

类似 2.2.1 节中的分析方法, 分别按纵倾角 $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$ 两种情况, 首先计算 $\Delta \theta$ 的变化, 其结果分别用图 6 表示; 再计算 $\Delta \gamma$ 的变化, 其结果分别用图 7(a)(b) 表示。

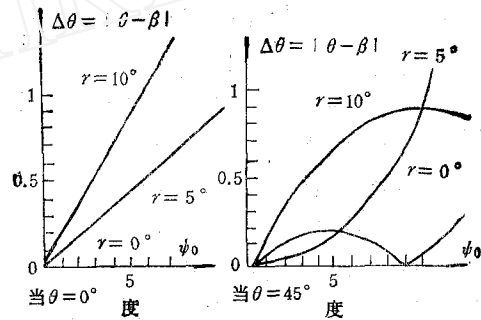


图 6 垂直陀螺仪的外环轴沿航行体纵轴安装时纵倾万向支架误差

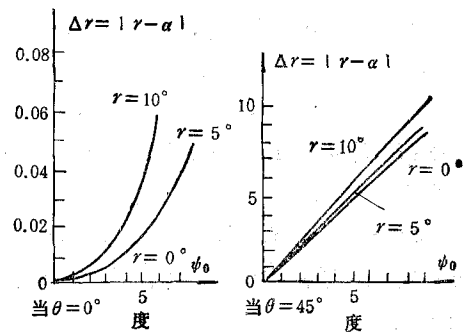


图 7 垂直陀螺仪的外环轴沿航行体纵轴安装时横滚万向支架误差

对图 6、7 曲线分析如下:

(1) 当 $\phi_0 = 0$, 即没有安装误差时
这时没有万向支架误差, 即测量角 α 和 β 与定义角 γ 和 θ 分别相等。

(2) 当有安装误差 ϕ_0 时

当有纵倾角时, 无论 γ 角多大, ϕ_0 对 $\Delta \gamma$ 影响都较大, 例如当 $\theta = 45^\circ$, $\phi_0 = 5^\circ$ 时(图 7(b)), 其中 $\gamma = 0^\circ$, $\Delta \gamma = 4.98^\circ$, $\gamma = 5^\circ$, $\Delta \gamma = 5.019^\circ$, $\gamma = 10^\circ$, $\Delta \gamma = 5.0189^\circ$ 。可见安装

误差造成的横滚支架误差亦较大,在工程中应给予足够的重视。

(3) 在图 6(b) 中,当 $\theta = 45^\circ$, $\gamma = 5^\circ$ 时,纵倾万向支架误差 $\Delta\theta$ 曲线,不是随着 ϕ_0 的增长相应一直呈上升趋势,这是由于函数 $\Delta\theta = |\theta - \beta|$ 存在极大值,当 ϕ_0 大于某一数值后, $\Delta\theta$ 反而下降。将 $\Delta\theta$ 对 ϕ_0 求导

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\theta}{d\phi_0} &= \left| \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right| \\ &= \left| 0 - \frac{d}{d\phi_0} \arcsin(\cos\phi_0 \sin\theta) \right. \\ &\quad \left. + \sin\phi_0 \cos\theta \sin\gamma \right| \\ &= \left| \frac{-\sin\phi_0 \sin\theta + \cos\phi_0 \cos\theta \sin\gamma}{1 - [\arcsin(\cos\phi_0 \sin\theta) + \sin\phi_0 \cos\theta \cdot \sin\gamma]^2} \right| \end{aligned}$$

令 $\frac{d\Delta\theta}{d\phi_0} = 0$, 得到 $\operatorname{tg}\phi_0 = \frac{\sin\gamma}{\operatorname{tg}\theta}$ 。当 $\theta = 45^\circ$,

$\gamma = 5^\circ$ 时, $\phi_0 = 4.98^\circ$, 此时 $\Delta\theta_{\max} = 0.218^\circ$ 。当 $\theta = 45^\circ$, $\gamma = 10^\circ$ 时, $\phi_0 = 9.85^\circ$ 此时 $\Delta\theta_{\max} = 0.864^\circ$ 。图 3(b) 中亦有类似情况。

3. 结束语

通过本文对垂直陀螺仪的两种安装方式分析可见: 航行体运动过程中, 若纵倾角 θ 等于零, 当安装误差小于 5° 时, 万向支架误差 $\Delta\theta$ 、 $\Delta\gamma$ 的数值皆在 1° 以内。若纵倾角 θ 较大时(如航行体上爬、下潜角较大时), 当安装误差较大, 需考虑安装误差对万向支架误差的影响, 尤其是对 $\Delta\gamma$ 的影响, 否则陀螺仪就会敏感错误信号, 造成对航行体姿态角测量和控制的错误。

参 考 文 献

- [1] 刘延柱, 陀螺力学, 科学出版社(1986), 21.
 - [2] 张春华等, 惯性技术, 科学出版社(1987).
- (本文于 1990 年 9 月 5 日收到)

非线性弹性支承转子系统动力特性分析

钱 家 德

(武汉纺织工学院, 430073)

摘要 本文把非线性弹性支承简化为带变刚度、变阻尼元件的 Kelvin 模型, 并用于结构传递矩阵法分析配有这类支承的转子系统的动力特性。

关键词 动力特性, 转子系统, 弹性支承, 非线性

1. 前言

由于在延长轴承寿命、提高转子稳定性、减小振动和噪声等方面的显著效果, 弹性支承在高速气流纺杯、纺纱锭子等转子系统中的应用越来越受重视。其油膜卷簧和橡胶支承等形式的弹支, 不但具有应力应变非线性关系, 而且其刚度和阻尼的大小还与振动频率密切相关。橡胶支承动刚度大小可达其静刚度的两倍以上^[1]。这类转子系统往往在低于第 3 阶临界转速的范围工作, 其弹支的刚度和阻尼对其动力特性的影响尤其显著。用线性弹簧简化这类弹

支则过于粗糙, 且其结构较复杂, 有别于一般单转子系统。为简化分析, 提高计算精度, 本文探讨了下面介绍的方法。

2. 简化模型

以图 1 所示高速气流纺杯转子系统为例, 把它看作由一非零速转子 A 和一零速转子——弹支套管 B 构成的复合转子系统。转子 A 带有尾圈 1 和纺杯 2, 用滚珠轴承 3 和 4 与套管 B 联结(简化为铰接)。套管 B 由橡胶支承 5 和 6 与机架联结。橡胶支承简化为带变刚度元件(刚度系数 K) 和变阻尼元件(粘性阻尼系数 C),

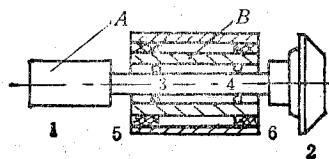


图 1