$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0' = \mathrm{tg}(2\alpha_0 \pm 180°) = \frac{2\tau_x}{-(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$= \frac{2\tau_x/\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}}{-(\sigma_x-\sigma_y)/\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}} \quad (c)$$

见图 2，由（c）式得：

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\alpha_0' &= 2\tau_x/\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}\\ \cos 2\alpha_0' &= -(\sigma_x-\sigma_y)/\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}\end{aligned}\right\} \quad (d)$$

把（d）式代入（1）式得：

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

$$\times \left[\frac{-(\sigma_x-\sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}}\right]$$

$$-\tau_x \times \frac{2\tau_x}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_x^2}}$$

$$= \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

即证明了，$\alpha_0' = \alpha_0 + 90°$ 为 $\sigma_{\min}$ 方向。

参 考 文 献

［1］ 刘鸿文，材料力学，高教出版社（1982）．

［2］ 力学与实践，1988(4)，1989(2)，1990(2)．

计算平面应力状态主应力方位角的方法

刘 人 豪

（湖 北 工 学 院）

计算平面应力状态主应力的方位角是材料力学教学中的难点之一。我在教学中采取的计算方法比较简单，请同行们参考并指正。

设 σ_1 与 x 轴的正向夹角为 α_0^*，由主应力方位角公式

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1)$$

求出两个方位角 α_0' 及 α_0''，$2\alpha_0'$ 为（1）式的第一个根，必然满足下列关系

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha_0' \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

化简得 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha_0' \leqslant \frac{\pi}{4}$ 即 $|\alpha_0'| \leqslant 45°$

计算规则

若 $\sigma_x > \sigma_y$，则 $\alpha_0^* = \alpha_0'$

若 $\sigma_x < \sigma_y$，则 $\alpha_0^* = \alpha_0'' + \frac{\pi}{2}$

若 $\sigma_x = \sigma_y$，则 $|\alpha_0^*| = 45°$，其符号与 τ_{xy} 相反或者由图 1 所示剪应力情况下 σ_1 沿对角线 AB 方向。

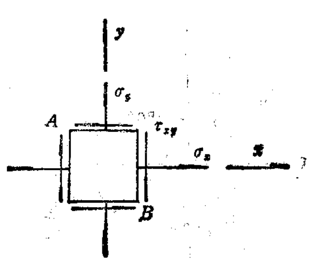

图 1

证明

若 $\sigma_x = \sigma_y$，$\tau_{xy} > 0$（图 1），将 $\sigma_x = \sigma_y$ 代入（1）式，得 $\mathrm{tg}\,2\alpha_0 \to -\infty$，求出 $2\alpha_0' = -90°$，$\alpha_0^* = \alpha_0' = -45°$ 其符号与 τ_{xy} 相反。

将平面应力状态斜截面应力公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

对 α 二次导数，得到

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d^2\alpha} = -2(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha + 4\tau_{xy}\sin 2\alpha \quad (3)$$

由（1）式得到

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\cos 2\alpha_0$$

代入（3）式，化简得

$$f'' = \cos 2\alpha_0\left[\frac{2(\sigma_x-\sigma_y)^2+8\tau_{xy}^2}{\sigma_y-\sigma_x}\right] \quad (4)$$

因 $\sigma_x = \sigma_y$ 时，$|\alpha_0'| = 45°$，故当 $\sigma_x \neq \sigma_y$ 时，考虑（2）式，得到 $|\alpha_0'| < 45°$，故

$$\cos 2\alpha_0' > 0 \quad (5)$$

若 $\sigma_x > \sigma_y$，将（5）式代入（4）式，得到 $f'' < 0$，σ_α 为极大值，则 $\alpha_0^* = \alpha_0'$。

若 $\sigma_x < \sigma_y$，将（5）式代入（4）式，得到 $f'' > 0$，σ_α 为极小值，所以 $\alpha_0^* \neq \alpha_0'$，则

$$\alpha_0^* = \alpha_0'' = \alpha_0' + \frac{\pi}{2}.$$