编者按 本栏从1982年至今已刊登了不少关于解释和确定平面应力状态主应力方向的文章。这一问题已得到解决。希望作者多写些有关固体力学各课程的改革和内容更新及材料力学实验课改革的论文，对这些方面的来稿审定后将优先刊登。

二向应力状态最大主应力方向的最简判别

王 瑞 章

（云南工学院基础部，650051，昆明）

照现行材料力学教材选图1，参数全取正，斜截面上应力公式为：

$$\sigma_\alpha = (\sigma_x + \sigma_y)/2 + (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \tag{1}$$

利用 $d\sigma\alpha/d\alpha = 0$ 求极值得：

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = -[2\tau_x/(\sigma_x - \sigma_y)] \tag{2}$$

利用三角函数关系，可得：

$$\sigma^{\max}_{\min} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_x^2} \tag{3}$$

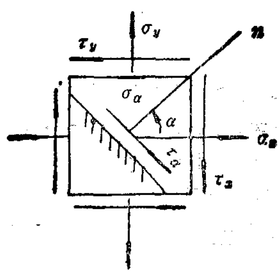

图 1

但是要确定由（2）式算出 α_0 和 $\alpha_0' = \alpha_0 + 90°$ 两个主平面上，究竟作用 $\sigma_{\max}$，还是作用 $\sigma_{\min}$ 较为困难，确定 $\sigma_{\max}$ 对应哪个主平面，有些教材不介绍，或提供有补充方法，或借助于应力圆法，以及各种判别法等等诸多解法[1]，并且某力学刊物近几年来连续刊载着对这个问题的不同解法[2]，但都较繁琐且不方便.实际上我们只要把（2）式右边分式的负号放到分子上，则得

$$\mathrm{tg}2\alpha_0 = (-\tau_x)/(\sigma_x - \sigma_y) \tag{4}$$

上式代入应力的代数值后，得到的正切函数值，只有4种情况（即4个象限）：

（1）$\mathrm{tg}2\alpha_0 =$ 正/正（I象限），$2\alpha_0 = \mathrm{arctg}|-2\tau_x|/|\sigma_x - \sigma_y|$；

（2）$\mathrm{tg}2\alpha_0 =$ 正/负（II 象限），$2\alpha_0 = 180° - \mathrm{arctg}|-2\tau_x|/|\sigma_x - \sigma_y|$；

（3）$\mathrm{tg}2\alpha_0 =$ 负/负（III 象限），$2\alpha_0 = 180° + \mathrm{arctg}|-2\tau_x|/|\sigma_x - \sigma_y|$；

（4）$\mathrm{tg}2\alpha_0 =$ 负/正（IV 象限），$2\alpha_0 = -\mathrm{arctg}|-2\tau_x|/|\sigma_x - \sigma_y|$。

以上4种情况中的任一种情况下，计算出 $2\alpha_0$，则 α_0 就是 $\sigma_{\max}$ 作用面的方向．而 $\alpha_0' = \alpha_0 + 90°$ 就是 $\sigma_{\min}$ 方向．

证明：由（4）式 $\mathrm{tg}2\alpha_0 = (-2\tau_x)/(\sigma_x - \sigma_y)$ 改写为

$$\frac{\sin 2\alpha_0}{\cos 2\alpha_0} = \frac{(-2\tau_x)/\text{正常数}}{(\sigma_x - \sigma_y)/\text{正常数}} = \frac{(-2\tau_x)/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}}{(\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}} \tag{a}$$

正切分子、分母除以正常数，$2\alpha_0$ 所在象限不变；如正切分子、分母乘以“负”号，则所在象限角度为 $2\alpha_0 \pm 180°$（图2），由（a）式得：

$$\left.\begin{aligned}\sin 2\alpha_0 &= (-2\tau_x)/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}\\ \cos 2\alpha_0 &= (\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

把（b）式代入斜截面正应力公式（1）得：

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}} - \frac{\tau_x \times (-2\tau_x)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

上结果与（3）式 $\sigma_{\max}$ 之表达式符合．即证明了由（4）式 $\mathrm{tg}2\alpha_0 = (-2\tau_x)/(\sigma_x - \sigma_y)$ 决定的 α_0 为 $\sigma_{\max}$ 的方向．

如（4）式分子分母分别乘“负”号，除以“正”常数得

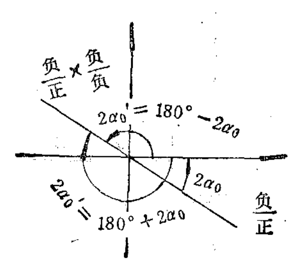

图 2

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0' = \mathrm{tg}(2\alpha_0 \pm 180°) = \frac{2\tau_x}{-(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$= \frac{2\tau_x/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}}{-(\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}} \quad \text{(c)}$$

见图 2，由（c）式得：

$$\left.\begin{aligned} \sin 2\alpha_0' &= 2\tau_x/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \\ \cos 2\alpha_0' &= -(\sigma_x - \sigma_y)/\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(d)}$$

把（d）式代入（1）式得：

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \left[\frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}}\right] - \tau_x \times \frac{2\tau_x}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}}$$

$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}$$

即证明了，$\alpha_0' = \alpha_0 + 90°$ 为 $\sigma_{\min}$ 方向。

参 考 文 献

［1］ 刘鸿文，材料力学，高教出版社(1982).

［2］ 力学与实践，1988(4)，1989(2)，1990(2).

计算平面应力状态主应力方位角的方法

刘 人 豪

(湖 北 工 学 院)

计算平面应力状态主应力的方位角是材料力学教学中的难点之一。我在教学中采取的计算方法比较简单，请同行们参考并指正。

设 σ_1 与 x 轴的正向夹角为 α_0^*，由主应力方位角公式

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (1)$$

求出两个方位角 α_0' 及 α_0''，$2\alpha_0'$ 为(1)式的第一个根，必然满足下列关系

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\alpha_0' \leqslant \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

化简得 $-\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha_0' \leqslant \frac{\pi}{4}$ 即 $|\alpha_0'| \leqslant 45°$

计算规则

若 $\sigma_x > \sigma_y$，则 $\alpha_0^* = \alpha_0'$

若 $\sigma_x < \sigma_y$，则 $\alpha_0^* = \alpha_0'' + \frac{\pi}{2}$

若 $\sigma_x = \sigma_y$，则 $|\alpha_0^*| = 45°$，其符号与 τ_{xy} 相反或者由图 1 所示剪应力情况下 σ_1 沿对角线 AB 方向。

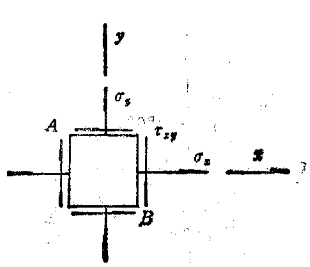

图 1

证明

若 $\sigma_x = \sigma_y$，$\tau_{xy} > 0$（图 1），将 $\sigma_x = \sigma_y$ 代入(1)式，得 $\mathrm{tg}\,2\alpha_0 \to -\infty$，求出 $2\alpha_0' = -90°$，$\alpha_0^* = \alpha_0' = -45°$ 其符号与 τ_{xy} 相反。

将平面应力状态斜截面应力公式

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

对 α 二次导数，得到

$$\frac{d^2\sigma_\alpha}{d^2\alpha} = -2(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + 4\tau_{xy}\sin 2\alpha \quad (3)$$

由(1)式得到

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\cos 2\alpha_0$$

代入(3)式，化简得

$$f'' = \cos 2\alpha_0\left[\frac{2(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 8\tau_{xy}^2}{\sigma_y - \sigma_x}\right] \quad (4)$$

因 $\sigma_x = \sigma_y$ 时，$|\alpha_0'| = 45°$，故当 $\sigma_x \neq \sigma_y$ 时，考虑(2)式，得到 $|\alpha_0'| < 45°$，故

$$\cos 2\alpha_0' > 0 \quad (5)$$

若 $\sigma_x > \sigma_y$，将(5)式代入(4)式，得到 $f'' < 0$，σ_α 为极大值，则 $\alpha_0^* = \alpha_0'$。

若 $\sigma_x < \sigma_y$，将(5)式代入(4)式，得到 $f'' > 0$，σ_α 为极小值，所以 $\alpha_0^* \neq \alpha_0'$，则

$$\alpha_0^* = \alpha_0'' = \alpha_0' + \frac{\pi}{2}.$$