应用研究

轴对称理想不可压缩流体和 stokes 流的广义解析函数解

徐新生　　王敏中

（北京大学力学系）

提要　本文利用轴对称共轭调和函数和广义解析函数的概念，推导出轴对称理想不可压流体和 stokes 流以广义解析函数表示的完备解.

关键词　理想流体，stokes 流，广义解析函数

1. 引言

对理想不可压流体和 stokes 流的讨论归结为微分方程组的边值问题，它们分别为

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{V}&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{V}&=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu\nabla^2\boldsymbol{V}-\nabla p&=0\\ \nabla\cdot\boldsymbol{V}&=0\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{V},p$ 和 μ 分别表示速度向量，压力和动力粘性系数. 在(1)和(2)的求解问题中，平面理想流体和 stokes 流的研究[4,5]已较为广泛. 它们的一个突出特点是它们的解能用平面复变解析函数所表示，分别为

平面理想流体：

$$V(t)=V_x(x,y)+iV_y(x,y)=\overline{\varphi'(t)}\tag{3}$$

平面 stokes 流

$$\left.\begin{aligned}V(t)&=V_x(x,y)+iV_y(x,y)\\&=\varphi(t)-2x\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}\\ p(x,y)&=-2\mu(\varphi'(t)+\overline{\varphi'(t)})\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 是复变量 $t=x+iy$ 的解析函数.

我们知道对于轴对称问题，以上相应问题就不能简单表示成解析函数表示式，所以平面问题的一些解法及解析函数很好的性质不能在轴对称中得到运用. 然而本文引用广义解析函数的概念，导出以广义解析函数表示的轴对称理想不可压流体和 stokes 流简单形式的完备解. 由于广义解析函数与解析函数有类似的性质，所以用这些形式解轴对称问题为流体力学的研究提供了重要的途径. 此外一个很有趣的结果将会给出.

2. 广义解析函数

文献[1,2]中，定义轴对称共轭调和函数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^*)&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi^*}{\partial z}&=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

其中 r,θ,z 为圆柱坐标. 满足(5)的 $\varphi(r,z)$ 和 $\varphi^*(r,z)$ 有很好的性质[2]，重要的是我们可以把上式看成广义柯西-黎曼条件，$F(t)=\varphi(r,z)+i\varphi^*(r,z)$ 就是复变量 $t=z+ir$ 的广义解析函数[6].

3. 轴对称不可压理想流体

在理想不可压流体中，轴对称方程组(1)归结为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}V_r-\frac{\partial}{\partial r}V_z&=0\\ \frac{\partial}{\partial r}(rV_r)+\frac{\partial}{\partial z}(rV_z)&=0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

其中 $V_z(r,z)$ 和 $V_r(r,z)$ 为圆柱坐标系下的速度分量. 引进流函数 $\varphi^*(r,z)$ 和速度势函数 $\varphi(r,z)$，从(6)可知

$$\left.\begin{aligned}V_r&=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=-\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}\\ V_z&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\varphi^*)\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

从(7)式可以看出 φ^* 和 φ 正是满足广义柯西-黎曼条件(5)的一对轴对称共轭调和函数. 由

上节知 $\Phi(t)=\varphi(r,z)+i\varphi^*(r,z)$ 是复变量 $t=z+ir$ 的广义解析函数。从而得到复速度

$$V(t)=V_z+iV_r=\frac{\partial\varphi}{\partial z}-i\frac{\partial\varphi^*}{\partial z}=\overline{\Phi'(t)} \tag{8}$$

4. 轴对称 stokes 流

由[3]知轴对称 stokes 流完备解，Papkovich-Neuber 解

$$\left.\begin{aligned}
V_r(r,z)&=P_r^*-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(P_0+rP_r^*+zP_z)\\
V_z(r,z)&=P_z-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(P_0+rP_r^*+zP_z)\\
p(r,z)&=-\mu\left(\frac{\partial P_r^*}{\partial r}+\frac{1}{r}P_r^*+\frac{\partial P_z}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$\nabla^2P_z=\nabla^2P_0=\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)P_r^*=0 \tag{10}$$

一般说来 $P_z(r,z)$ 与 $P_r^*(r,z)$ 是不满足(5)的，然而令

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=\frac{\partial P_z}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rP_r^*)\\
A_2&=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_z}{\partial r}+\frac{\partial P_r^*}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}
A_3&=\frac{1}{r}\int_{(r_0,z_0)}^{(r,z)}rA_2dr+rA_1dz\\
A_4&=\int_{(r_0,z_0)}^{(r,z)}-A_1dr+\frac{\partial}{\partial r}(rA_2)dz
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

并取

$$\varphi(r,z)=\int_{(r_0,z_0)}^{(r,z)}-A_3dr+A_4dz \tag{13}$$

其中 (r_0,z_0) 是区域内固定点。从(11)—(13)知

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{14}$$

且有

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(P_r^*+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\right]&=\frac{\partial}{\partial z}\left(P_z+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(P_r^*+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)&=-\frac{\partial}{\partial r}\left(P_z+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

让

$$\left.\begin{aligned}
A&=P_z+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\\
A^*&=P_r^*+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\\
A_0&=P_0+2\varphi-2r\frac{\partial\varphi}{\partial r}+2z\frac{\partial\varphi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

从(15)和(16)知 $A(r,z)$ 与 $A^*(r,z)$ 满足(5)且

$$\nabla^2A_0=0 \tag{17}$$

将(16)代回(9)和(10)就有

$$\left.\begin{aligned}
V_r&=A^*-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(A_0+rA^*+zA)\\
V_z&=A-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(A_0+rA^*+zA)\\
p&=-\mu\left(\frac{\partial A^*}{\partial r}+\frac{1}{r}A^*+\frac{\partial A}{\partial z}\right)\\
\nabla^2A_0&=\nabla^2A=\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)A^*=0
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

再令

$$\left.\begin{aligned}
B&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_0}{\partial z}+r\frac{\partial A^*}{\partial z}-z\frac{\partial A}{\partial z}\right)\\
B^*&=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial A_0}{\partial r}-r\frac{\partial A^*}{\partial r}+z\frac{\partial A}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

不难验证 $B(r,z)$ 和 $B^*(r,z)$ 不仅满足(5)，而且

$$\nabla^2B=\left(\nabla^2-\frac{1}{r^2}\right)B^*=0 \tag{20}$$

将(19)和(20)代入(18)得到另一种解的形式

$$\left.\begin{aligned}
V_r&=A^*+2z\frac{\partial A^*}{\partial z}+B^*\\
V_z&=A+2z\frac{\partial A}{\partial z}-B\\
p&=-2\mu\frac{\partial A}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

让

$$\left.\begin{array}{l}\Phi(t)=A(r,z)+iA^*(r,z)\\ \Psi(t)=-B(r,z)-iB^*(r,z)\end{array}\right\}\quad(22)$$

可知 $\Phi(t)$ 和 $\Psi(t)$ 都是复变量 $t=z+ir$ 的广义解析函数。定义复速度

$$V(t)=V_z(r,z)+iV_r(r,z)\quad(23)$$

从(21)—(23)能够得到以广义解析函数表示的复速度和压力的完备解

$$\left.\begin{array}{l}V(t)=\Phi(t)-2z\overline{\Phi'(t)}+\overline{\Psi(t)}\\ p(r,z)=-2\mu(\Phi'(t)+\overline{\Phi'(t)})\end{array}\right\}\quad(24)$$

从(8)和(24)可以看出，轴对称理想流体和stokes 流偏微分方程的边值问题转化成了广义解析函数的边值问题。利用广义解析函数很好的结果，如广义柯西定理和公式和广义罗朗级数等，可以类似平面问题的解法为求解流体力学精确解和近似计算提供了一条途径。

更有趣的结果可以根据(3)与(8)和(4)与(24)的比较看出：平面的理想流体和stokes 流的解与它们的轴对称形式解有完全一样的函数表达式，只是区别于前者是被解析函数表示，而后者是以广义解析函数表示。这从某种程度上说明了平面和轴对称问题的一种关系，无疑为其他学科同类问题的研究也提供一定的帮助。

参考文献

[1] Wang, M. Z. *J. Elasticity*, 19 (1988), 85—92.
[2] Wang M. Z. and Xu, X. S. *Appl. Math. Modelling*, 14 (1990), 275—279.
[3] Xu X. S. and Wang, M. Z. General complete solutions of the equations of spatial and axisymmetric stokes flow, Q. J. Mech. *Appl. Math.* (in press).
[4] Wang M. Z. and Yan, G. S. ICTAM, Grenoble, France (1988), 21—27.
[5] 吴望一，流体力学，北京大学出版社(1983).
[6] Bexya, И.Н. 广义解析函数，人民教育出版社(1960).

（本文于 1990 年 6 月 24 日收到）

利用低雷诺数形式的 k-ε 模型预测管道中的复杂湍流场

陈　刚　张月林　高树滋
（华 东 工 学 院）

提要 本文利用低雷诺数形式的 k-ε 湍流模式对先突缩再突扩的轴对称管内的复杂湍流场进行了理论预测，获得了平均速度、流函数、湍动能、湍流耗散率和平均压力场的分布曲线、对理论计算结果的特征进行了分析.

关键词 计算流体力学，k-ε 模式，湍流模式，管道流动

1. 引言

运用湍流的模式理论作数值模拟是湍流流动的理论预测方法中最有效的手段之一。在计算有回流区的湍流流动时，应用最广泛的模式是两方程模式。它具有较高的精度，通用性较强等优点。同时它对计算机容量和计算速度的要求都不是很高。

苏联学者 Kolmogorov 在 1942 年首次提出了两方程模式的概念。取不同的控制变量可得到不同形式的两方程模型，如 k-kl 模型；k-W 模型和 k-ε 模型等。其中 k-ε 模型首先由 Harlow 和 Nakayama[1] 提出。由于它优于其它的两方程模型[2]，从而得到了更为广泛的应用。

为了考虑低雷诺数影响，本文应用 Jones 和 Launder[3] 提出的低雷诺数形式的 k-ε 湍流模式，采用 S. V. Patankar 和 D. B. Spalding 等学者发展起来的 SIMPLE 方法，研究了一种典型的管道内复杂湍流场——先突缩再突扩的轴对称管内湍流场的流动特征。过去关于管道内流的研究主要限于突扩管内的流动情