

界面断裂力学简介与展望

王 自 强

(中国科学院力学研究所)



王自强, 1938 年生于上海。1963 年毕业于中国科学技术大学力学系。现任研究员、博士生导师, 中国科大客座教授。中国力学学会固体力学专业委员会副主任, 《力学学报》与《航空学报》编委, 国家科技进步奖特邀评审员。历任英国 Sheffield 大学高级研究员; 美国 Brown 大学访问教授; 法国 ENCP 大学访问教授。主要研究弹性稳定理论; 断裂力学; 晶体及多晶体塑性理论; 界面断裂力学; 细观力学基础。发表论文 60 多篇。

提要 界面断裂力学是目前国际力学界的前沿研究课题。本文对这门新兴分支学科的发展背景, 近期进展及未来展望作了简要介绍。主要分析了各向同性及各向异性弹性材料间的界面裂纹; 界面裂纹的力学模型; 界面裂纹的弹塑性场及界面裂纹的断裂观念。讨论了界面断裂力学未来热门课题。

关键词 界面, 断裂力学, 力学模型, 弹性, 塑性

经过力学家、物理学家和应用数学家的共同努力, 创造了一个婀娜多姿、气象万千的宏观连续介质力学的科学园地。在固体力学领域内, 它就包含了弹性力学、塑性力学、理性力学、断裂力学、缺陷力学、计算力学等二十多门分支学科。力学以它的完备的理论、广博精深的内容、系统而丰富的公式而备受科学家的青睐。

近年来, 力学家与金属物理学家、材料科学家合作, 开创了细观力学的新分支。在细观力学的分支领域内, 界面断裂力学又像一朵良苑奇葩, 独放异彩。

众所周知, 材料是有细观结构的。金属多晶体的晶界; 合金中不同晶体结构组分之间的相界面; 复合材料中增强纤维或颗粒与基体之间的界面; 不同材料粘接面, 都是界面力学的研究对象。

晶界的结构与性能对材料的强度和断裂等力学行为有着极重要的影响。近代先进材料, 诸如精密陶瓷, 高韧性复合材料、铝锂合金、纳米材料等研制及细观结构设计均与界面断裂力学的研究紧密结合。

高强韧新材料研制为界面断裂力学的发展提供了强大的动力。而界面断裂力学的发展又为高强韧先进材料的研制提供理论指导。

1. 弹性材料的界面裂纹

各向同性弹性材料之间的界面裂纹是研究得最早及最为广泛的课题。如图 1 所示, 两个不同的弹性材料, 沿着 x 轴理想的联接在一起。界面含有一条裂纹。Williams^[1] (1959) 首先分析了界面裂纹顶端的奇性场。利用了应力函数的分离变量形式, 求得了奇性指数和奇性场。

令人惊奇的是该奇性指数不是实数而是复数。从而导致裂纹顶端应力场的振荡奇性及裂纹

面互相嵌入。文献[2—4]分析了各种典型的界面裂纹问题,进一步证实了这种奇特的现象。

裂纹顶端的应力场可表示为:

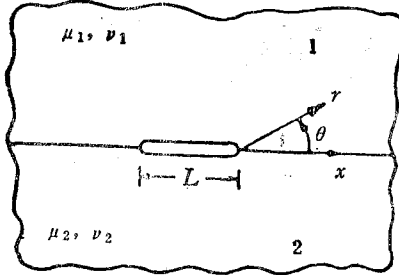


图1 界面裂纹

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{yy} + i\tau_{xy})_{\theta=0} &= Kr^{ie}/\sqrt{2\pi r} \\
 &= KL^{ie} \left\{ \cos\left(\epsilon \ln \frac{r}{L}\right) + i \sin\left(\epsilon \ln \frac{r}{L}\right) \right\} \\
 &\quad / \sqrt{2\pi r}
 \end{aligned} \quad (1)$$

式中 K 是复应力强度因子, ϵ 是振荡奇性指数。

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{(k_1\mu_2 + \mu_1)/(k_2\mu_1 + \mu_2)}{\dots} \right] \quad (2)$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, 应力场不仅表现出 $1/\sqrt{r}$ 的奇性而且不断改变正负号。这种振荡奇性渊源于两种不同材料联接在一起的位移连续性条件。这种界面上位移连续性条件与裂纹面边界力自由条件只在奇特的情况下同时得以满足, 这就是产生振荡奇性的内在原因。

裂纹面的张开位移为

$$\begin{aligned}
 (u_y + iu_x)_{\theta=\pi} - (u_y + iu_x)_{\theta=0} \\
 = (c_1 + c_2)Kr^{ie}/[2\sqrt{2\pi}(1 + 2\epsilon i)\cosh(\pi\epsilon)]
 \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $c_1 = (\kappa_1 + 1)/\mu_1$, $c_2 = (\kappa_2 + 1)/\mu_2$, 下标 1 和 2 是指材料 1 和材料 2。 μ 是剪切模量, $\kappa = 3 - 4\nu$ (平面应变) 或 $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ (平面应力), ν 是泊桑系数。

由公式(3)不难看出, 裂纹面的张开位移可以改变符号。对于无穷远处受均匀应力场作用的含长度为 L 的中心裂纹情况, 我们有

$$K = (\sigma_{yy}^{\infty} + i\tau_{xy}^{\infty})(1 + 2\epsilon i)L^{-ie}\sqrt{\pi L/2} \quad (4)$$

利用公式(3)、(4)不难对裂纹面互相嵌入区域(接触区)尺寸作一个初等估计。

我们来寻找使张开位移为零的最大距离 r_c 。我们有:

$$\operatorname{Re}\{Kr^{ie}/(1 + 2\epsilon i)\} = 0 \quad (5)$$

代入公式(4), 我们得,

$$\operatorname{Re}[e^{i\psi}(r/L)^{ie}] = \cos(\Psi - \epsilon \ln(L/r)) = 0,$$

式中 $\Psi = \operatorname{tg}^{-1}(\tau_{xy}^{\infty}/\sigma_{yy}^{\infty})$, 是外界载荷的相位角。设想 $\epsilon > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \Psi < \frac{\pi}{2}$, 则最大接触区

尺寸 r_c 可用下式估算

$$\begin{aligned}
 \Psi - \epsilon \ln(L/r_c) &= -\pi/2 \\
 r_c &= L \cdot \exp(-(\Psi + \pi/2)/\epsilon)
 \end{aligned} \quad (6)$$

正如 Hutchinson^[5] 等人(1987)所指出的那样, 对于大多数工程材料对(譬如 Ti/Al₂O₃, Cu/Al₂O₃, Au/MgO 等), ϵ 是很小的。 ϵ 的极大值是 0.175。令 $\epsilon = 0.175$ 。我们得

$$\frac{r_c}{L} \approx 1.25 * 10^{-4}, \quad \text{对 } \tau_{xy}^{\infty} = 0, \Psi = 0$$

$$\frac{r_c}{L} \approx 0.246, \quad \text{对 } \tau_{xy}^{\infty}/\sigma_{yy}^{\infty} = -4, \Psi = -1.325$$

由此看出, 对无穷远处均匀拉伸情况, 接触区尺寸非常之小。而对无穷远处, 承受剪应力为主

的情况,接触区相当大,不能随意的忽略。

界面裂纹的能量释放率为

$$G = (c_1 + c_2)K\bar{K}/16 \cos h^2(\pi\epsilon) \quad (7)$$

值得注意的是界面裂纹应力强度因子的量纲为 $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}\text{m}^{-1/2}$, 这种量纲既复杂又奇特, 在物理学中实为罕见。但令人庆幸的是能量释放率的量纲与均匀材料裂纹的能量释放率量纲一致。

界面裂纹顶端应力场的振荡奇性, 裂纹面的互相嵌入及应力强度因子量纲的复杂性在物理上都是值得质疑的, 这促使人们怀疑将界面看作是理想的几何面和裂纹面是理想的自由面是否合适, 并提出了各种模型, 力图消除这些问题。

2. 界面的力学模型

迄今为止, 已提出了 5 种模型。

接触区模型 M. Comninou^[6] (1977) 首先提出了接触区模型。认为裂纹面并不完全张开在裂纹顶端附近存在着一个裂纹面互相接触的区域。图 2 显示了这种接触区。在接触区上, 设想法向张开位移为零, 摩擦剪应力对充分光滑的裂纹面可以忽略不计。

采用位错连续分布的方法处理裂纹问题, 导出了一组奇性积分方程。对 $\beta = 0.4654$ 的情况, 得到了解答。这个解答表明, 真实裂纹顶端的应力场, 有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性而无振荡奇性。而且这种应力场奇性在裂纹延伸线上只表现为剪应力奇性, 正应力并无奇性而为有限值。而在裂纹面上, 接触区内, 法向应力 σ_θ 有奇异性而且是压应力, 这与接触区设想一致。

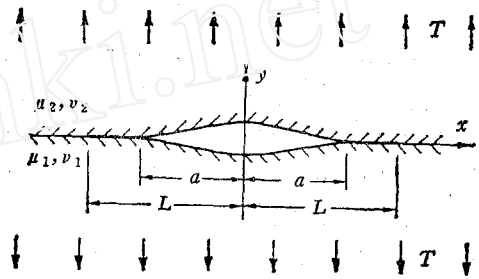


图 2 裂纹面接触区模型

M. Comninou (1977) 也研究了摩擦剪应力对界面裂纹顶端奇性场的影响。

非均匀层模型 F. Erdogan 及其合作者 (1988)^[7] 认为将界面看成理想的几何面, 界面的两侧材料的弹性常数发生跳跃间断是不符合实际情况的。由于界面的扩散和迁移(这种扩散、迁移又是热力学平衡所要求的), 从原子、分子角度来观察两种材料结合机制, 必须将界面看作是有微观结构的界面层。这个界面层的厚度可以从几个原子分子间距到微米量级。界面层的设想对两种材料之一或两者是高分子材料时, 特别合适。他们把界面层看作是厚度相同的非均匀材料层。这个层的弹性模量随着厚度连续变化。裂纹平行于界面层而处于层内任意位置。图 3 绘出了非

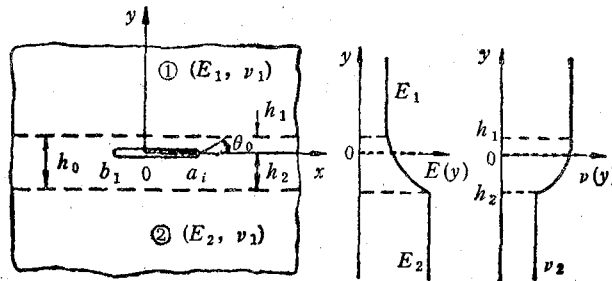


图 3 非均匀界面层模型

均匀界面层的示意图。

利用应力函数及傅里叶积分的方法,导出了带 Cauchy 核积分方程。所求得的答案表明,裂纹顶端有通常意义上的平方根奇性。

粘着层模型 与上面的模型相类似的, C. Atkinson^[6] (1977), 将界面看作是有一定厚度材料层, 这种材料层的力学性能既不同于材料 1 也不同于材料 2, 可以用粘弹性来描述。而 F. Erdogan 及其合作者(1978)则将粘着层用剪切、拉伸弹簧来模拟, 或者用连续介质力学的方法来模拟。

此外, A.F. Mak 等提出无滑动区模型; G.B. Sinclair 提出了裂纹张开角模型; 限于篇幅, 这里不作介绍。

3. 各向异性弹性材料的界面裂纹

各向异性材料间的界面裂纹首先由 H. Gotoh (1967)^[9]、D.L. Clements (1971)^[10] 和 Wills (1971)^[11] 进行了研究。Clements 利用 Stroh's 的各向异性弹性理论公式, 提出了解决各向异性弹性材料间界面裂纹问题的一般方法。他引入 6 个分区全纯函数来满足界面上的应力矢量及位移的连续性。再根据裂纹面自由条件, 将问题归结为著名的 Hilbert 问题。这些工作强调了裂纹顶端应力场的振荡奇性。T.C. Ting^[12] (1986) 利用复势函数的渐近分析, 给出了界面楔形问题和裂纹问题奇性场的一般公式, 证实了界面裂纹问题振荡性消失的充要条件是 H 矩阵为实矩阵。J. Qu 和 J.L. Bassani (1989) 进一步证实了这个结论。

锁志刚 (Z. Suo)^[13] (1990) 的工作, 出色地表征了各向异性弹性材料间界面裂纹顶端奇性场的数学结构。利用 Lekhnitskii-Stroh 理论, 他证实了裂纹顶端场是两类奇性场的线性组合: 耦合的振荡奇性场及无振荡奇性场。

$$\sigma_{ij} = \frac{\operatorname{Re}\{K r^{i\theta}\}}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_{ij}^{(1)}(\theta) + \frac{\operatorname{Im}\{K r^{i\theta}\}}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_{ij}^{(2)}(\theta) + \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}} \bar{\sigma}_{ij}^{(3)}(\theta) \quad (8)$$

其中 K 是复应力强度因子, $K = K_1 + iK_2$, 无量纲角分布函数 $\bar{\sigma}_{ij}(\theta)$ 依赖两种材料的弹性常数。裂纹前方界面上的应力向量 $t = \{\sigma_{2i}\}$ 可以用特征向量来表示:

$$t = t_1 W_1 + t_2 W_2 + t_3 W_3$$

这里 t_1, t_2 是互相共轭的复数, t_3 是实数, 特征向量 $W_2 = \bar{W}_2$, W_3 是实向量。它们由下列特征方程求得:

$$\bar{H}W = e^{2\pi\theta} HW, \quad (9)$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, 我们有

$$t_1 \doteq \frac{K r^{i\theta}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad t_3 \doteq \frac{K_3}{\sqrt{2\pi r}}$$

应该强调指出, 一般说来,

$$t_1 \doteq \sigma_{yy} + i\tau_{xy}, \quad t_3 \doteq \tau_{yz}$$

裂纹面的张开位移为

$$\delta = (H + \bar{H}) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \frac{K r^{i\theta} W_1}{(1 + 2\epsilon i) \cosh \pi\theta} + \frac{\bar{K} r^{-i\theta} W_2}{(1 - 2\epsilon i) \cosh \pi\theta} + K_3 W_3 \right\} \quad (10)$$

能量释放率为

$$G = \frac{W_1^T (H + \bar{H}) W_1}{4 \cosh^2 \pi\theta} |K|^2 + \frac{1}{8} W_3^T (H + \bar{H}) W_3 K_3^2 \quad (11)$$

4. 界面裂纹弹塑性场的分析及裂端渐近场

以上讨论了弹性材料的界面裂纹。现在讨论弹性及弹塑性材料之间及两种不同的弹塑性材料之间的界面裂纹。

4.1 弹性材料与弹塑性材料间的界面裂纹

C.F. Shih 和 R.J. Asaro^[14,15](1988,1989) 对这个问题作了系统而精细的分析。首先考虑小范围屈服的情况。他们采用塑性形变理论及有限元法,对有限元网格进行精心的设计,使之能准确地反映非常接近裂端区域的应力场 ($r/a \approx 10^{-15}$)。

4.1.1 应力应变场结构 对于平面内的应变问题,裂纹前方弹性区内的界面上的应力场可表示为,

$$t = \sigma_{yy} + i\tau_{xy} = \frac{Q}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{L}\right)^{is} \quad (12)$$

由于设想是小范围屈服,因此上述公式是适用的。同时可以认为塑性区内的应力场将受弹性应力场的控制。因此,塑性区内的应力场可表示为

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 f_{ij}^* \left(\frac{r\sigma_0}{Q\bar{Q}}, \theta, \phi + \epsilon \ln \frac{r}{L} \right) \quad (13)$$

式中 ϕ 是复数 $Q = KL^{is}$ 的相位角, L 是裂纹长度或试样的特征几何尺寸。引入表征奇异性强度对相位角影响的参数 ξ

$$\xi = \phi + \epsilon \ln \left(\frac{r}{L} \times \frac{Q\bar{Q}}{r\sigma_0^2} \right) = \phi + \epsilon \ln \left(\frac{Q\bar{Q}}{L\sigma_0^2} \right)$$

这样公式(13)可改写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 f_{ij} \left(\frac{r\sigma_0}{Q\bar{Q}}, \theta, \xi \right) \quad (14)$$

公式(14)表明,塑性区内的应力场,除了依赖极坐标 (r, θ) 之外,还依赖于参数 ξ 。

4.1.2 应力场的演化 图4显示了随着外载的增加(中心裂纹板,无穷远处受均匀载荷作用)弹塑性材料内应力场的演化过程。弹塑性材料的应力应变关系为

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = & \frac{1+\nu}{E} S_{ij} + \frac{1-2\nu}{3E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \\ & + \frac{3}{2} \alpha \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)^{n-1} S_{ij} / E \quad (15) \end{aligned}$$

式中 S_{ij} 是应力偏量, n 是幂硬化指数。

当外载很小时,塑性区尺寸非常之小,而图4显示的是弹性区内的应力场,表现出振荡性。当 $\sigma^\infty/\sigma_0 = 2.0 \times 10^{-4}$ 时,应力场的振荡性基本消失,但在 $r/a = 10^{-9}$ 处,应力场呈现局部波动。当 $\sigma^\infty/\sigma_0 = 6.0 \times 10^{-3}$ 时,应力场的振荡性完全消失。这说明塑性区内,应力场是单调变化,无任何振荡迹象。

4.1.3 应力场的径向分布和周向分布 图5表示了应力场沿径向分布的特征。从该图上不难

力学与实践

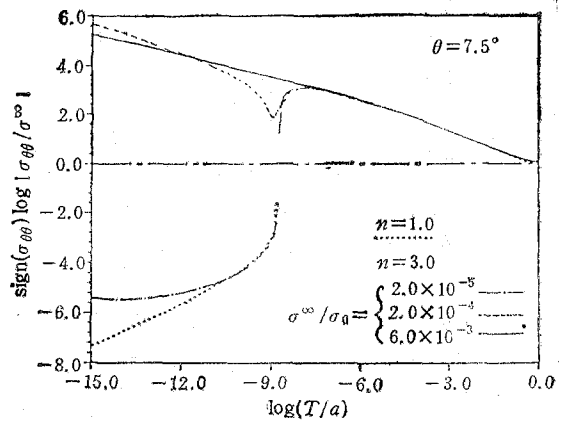


图4 应力场演化过程。弹塑性材料与刚性体之间的界面裂纹

看出,裂端应力场表现出与 HRR 奇性场相似的特征。而且在裂纹顶端区域 σ_r 等于 σ_θ , 也就是 $S_r = 0$ (裂纹前方,界面上)。

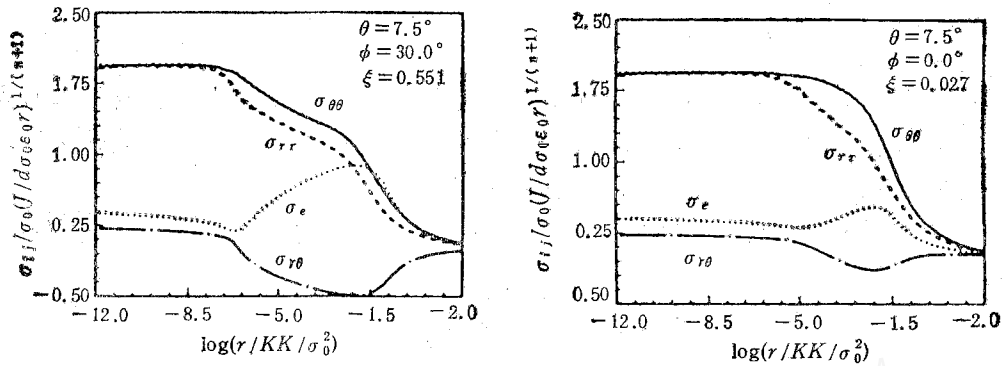


图5 弹性材料与弹性材料之间界面裂纹顶端应力场径向分布. $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, E_2 = 5E_1, n_1 = 5$

图6画出了应力场的周向分布。图中无量纲应力为 $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} / \left[\sigma_0 \left(\frac{J}{\alpha \sigma_0 \epsilon_0 r} \right)^{1/(n+1)} \right]$ 。应力场的周向分布与均匀材料复合受载裂纹顶端的应力场周向分布十分相似。另外一个特点是,在裂纹延伸线上($\theta = 0$ 处), $\sigma_r = \sigma_\theta$ 。

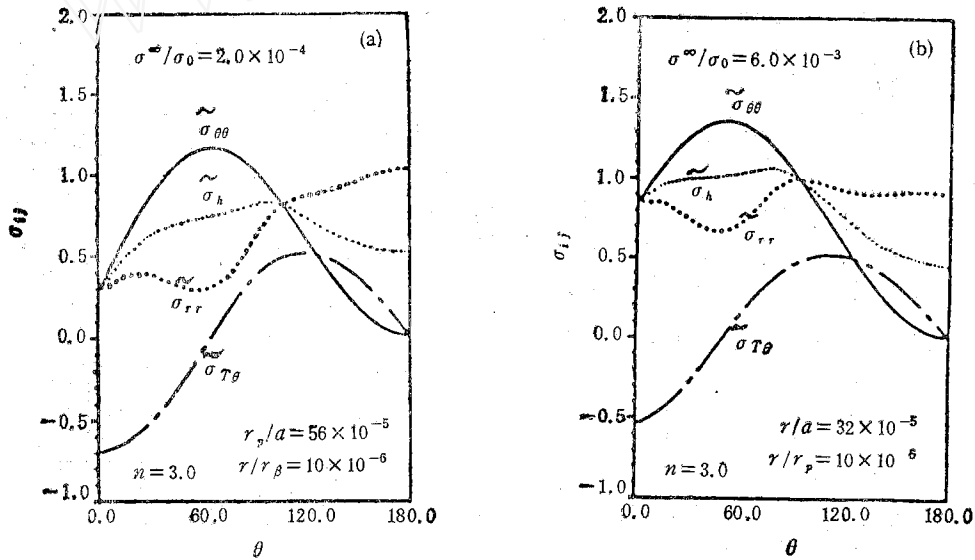


图6 应力场周向分布

对于无穷远处,受均匀拉伸和均匀剪切复合作用的界面裂纹,应力场的分布特征与上面相似。

4.2 界面裂纹顶端的渐近场

文献[16]对弹塑性材料与弹性材料间的界面裂纹顶端的渐近场进行了严格分析。文中指出在界面两侧,弹塑性材料与弹性材料切线模量之比 $(E_t)_1 / (E_t)_2$ 趋于零(当 $r \rightarrow 0$ 时)。因此,从渐近意义上看,弹塑性材料与弹性材料间的界面裂纹与弹塑性材料与刚性材料间的界面裂纹是等价的。由此,可以导出

$$u_r^+(r, 0) = u_\theta^+(r, 0) = 0 \quad (16)$$

引入应力函数

$$\phi = r^{s+2}F(\theta) \quad (17)$$

条件(16)可表示为, $\theta = 0^+$ 处

$$\left. \begin{aligned} F'' - s(s+2)F &= 0 \\ F''' + [4(1+s)(1+ns) - s(s+2)]F' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

公式(18)的第1式,即是 $\sigma_r = \sigma_\theta$ 。第2式中的 n 是弹塑性材料的幂硬化系数。

利用(18)式及裂纹面自由条件,文献[16]求得了特征值 $s = -1/(1+n)$, 及特征函数。从而得到了裂端弹塑性渐近场。所得结果与前面的有限元结果相似。

5. 界面裂纹的断裂观念

由于界面两侧材料的弹性性质不同,因此,大量的界面断裂问题本质上是非对称的复合型断裂。在断裂前,裂纹前方的界面上,既作用有法向正应力,也作用有切向剪应力,而在裂纹面上既有张开位移又有滑开位移。这样二维几何的界面断裂,一般说来包含着张开型和滑开型应力强度因子。这是界面断裂的一个重要特征。

均匀各向同性材料的断裂问题,可以区分为纯 I 型断裂和纯 II 型断裂。而界面裂纹的断裂问题,只当振荡奇性指数为零的时候,才有可能区分为纯 I 型和纯 II 型。一般情况下,两者总是耦合在一起。载荷的对称性及几何的对称性无法抵消材料性质的非对称性。

另一方面,如公式(1)所示,界面裂纹顶端的应力场表现出振荡奇性,其特征只能用复应力强度因子来表示, $K = K_1 + iK_2$ 。但是复应力强度因子 K 的实部与虚部,并无明确的力学意义。下述极限并不存在:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r}(\sigma_y + i\tau_{xy})_{\theta=0}$$

K_1 和 K_2 一般情况下,应定义为

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} r^{-i\varepsilon}(\sigma_y)_{\theta=0} \\ K_2 &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} r^{-i\varepsilon}(\tau_{xy})_{\theta=0} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

5.1. 若干典型问题的复应力强度因子

(1) 如图 1 所示,无限大平面,含长度为 $2a(L)$ 的界面中心裂纹,上下半平面为不同的弹性材料。界面裂纹顶端的复应力强度因子 K 为

$$K_1 + iK_2 = (\sigma_y^\infty + i\tau_{xy}^\infty)(1 + 2i\varepsilon)(2a)^{-i\varepsilon} \sqrt{\pi a}$$

(2) 同一个裂纹问题,但只在裂纹面上受均布压应力作用,

$$K_1 + iK_2 = T \sqrt{\pi a}(1 + 2i\varepsilon)(2a)^{-i\varepsilon}$$

(3) 半无限大界面裂纹,裂纹面上受点载荷作用

$$K_1 + iK_2 = \frac{P + iQ}{\sqrt{\pi a}} \cos h\pi\varepsilon \cdot (2a)^{-i\varepsilon}$$

5.2. 界面裂纹的断裂韧性

为了简化起见,我们只讨论 $\varepsilon = 0$ 的情况。此时 K_1 和 K_2 分别表征纯 I 型和纯 II 型应力强度因子。

大量实验表明,界面裂纹的断裂韧性是相位角 $\phi = \tan^{-1}(K_2/K_1)$ 的函数。

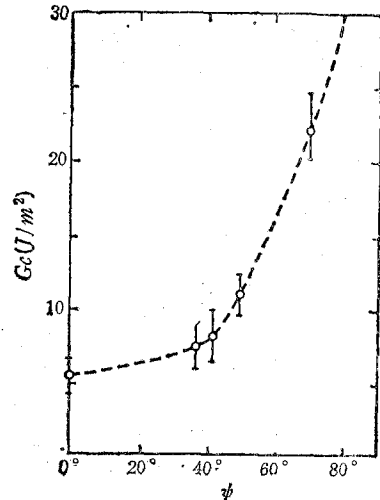


图 7 界面裂纹的断裂韧性曲线

H.C. Cao 和 A.G. Evans^[18] 提供了一组典型的实验数据(关于环氧树脂与玻璃之间的界面裂纹)。这组数据是利用不同的试样几何做出来的。从图 7 不难看出,断裂韧性明显地依赖于相位角 ϕ , 也就是依赖于应力强度因子的混合比 K_2/K_1 。随着 K_2/K_1 比值的增加,断裂韧性可以成倍的增加。

通过大量的实验观察,人们发现,断裂韧性随着 K_2 增加而增加的原因可能是与裂纹面的粗糙度有关。这种粗糙度可以来自界面弥散结构内部的小刻面,也可以来自断口的粗糙度。

A. G. Evans 和 J.W. Hutchinson^[19] 对这个问题作了一个细观力学的模型分析。他们引入了一个粗糙度参数 R 。该参数主要依赖于 Ew^2/l 。这里 w, l 分别是小刻面的高度与间距。 G_0 是材料固有的断裂韧性。他们测量了粗糙度,利用他们模型求得

$$G_c(\phi) = G_0[1 + \tan^2\phi],$$

这个结果与实验大致吻合。

6. 结 束 语

在未来的 5—10 年内,下列课题可能是界面断裂力学的热门课题:

- (1) 界面细观结构与力学模型;
- (2) 界面裂纹顶端的弹塑性奇性场;
- (3) 界面裂纹的断裂准则与断裂理论;
- (4) 界面裂纹的断裂观念与增韧理论。

迄今为止的力学模型均是连续介质模型,未考虑界面的细观结构。材料科学家对晶界、相界、相界的研究正在深入,吸收这方面的成果提出新的力学模型,无疑会大大推动界面力学的发展。

界面裂纹顶端弹性奇性场的研究业已成熟,而弹塑性奇性场的研究只是迈出了第一步,进一步系统深入研究无疑是值得的。

界面裂纹问题已有大量的文献发表,而关于断裂准则及断裂理论研究依然是零碎的,极不完整。界面裂纹的断裂表现出更多的复杂性与更丰富的多样性。因此,有关的断裂准则及断裂理论研究将会呈现百花齐放的景象。

参 考 文 献

- [1] Williams, M.L., Bull. Seismol. Soc. Am., 49 (1959), 199—204.
- [2] Rice, J.R. and Sih, G.C., J. Appl. Mech., 32(1965), 418—423.
- [3] Erdogan, F., J. Appl. Mech., 32(1965), 403—410.
- [4] England, A. H., J. Appl. Mech., 32(1965), 400—402.
- [5] Hutchinson, J. W., Mear, M. and Rice, J. R., J. Appl. Mech., 54(1987), 828—832.
- [6] Comninou, M., J. Appl. Mech., 44(1977), 631—636.
- [7] Deale, F. and Erdogan, F., J. Appl. Mech., 55(1988), 317—324.
- [8] Atkinson, C., Int. J. Fracture, 13(1977), 807.
- [9] Gotoh, M., Int. J. Frac. Mech., 3(1967), 253—260.
- [10] Clements, D.L., Int. J. Eng. Sci., 9(1971), 257—265.
- [11] Wills, J. R., J. Mech. Phys. Solids, 19(1971) 353—368.
- [12] Ting, T. C. T. I. J. Solids and structures, 22(1986), 965—983.
- [13] Suo, Z., Proc. R. Soc. Lond. A427(1990), 331—358.
- [14] Shih, C.F. and Asaro, R. J., J. Appl. Mech., 55(1988), 299.
- [15] Shih, C.F. and Asaro, R. J., J. Appl. Mech., 56(1989), 763.
- [16] Wang, T. C., Eng. Fracture Mech., 37(1990), 527—538.
- [17] Wang, T. C., Shih, C.F. and Suo, Z., Int. J. Solids and structure, to appear.
- [18] Cao, H. C. and Evans, A. G., Mech. Materials, in Press (1989).
- [19] Evans, A. G. and Hutchinson, J.W., to be published in Acta Metall.