

图 2

2(a))的合弯矩 \bar{M}_α , 是 $M_{(y)}$ 和 $M_{(z)}$ 的矢量和, 所以用平行四边形法则可以求出每一点的合弯矩 \bar{M}_α , 各 \bar{M}_α 顶点连线是过 $M_{(z)}$ 垂直于 yoz 平面和过 $M_{(y)}$ 垂直于 zox 平面的两个平面的交线, 这交线一定是一条空间直线 DE , 该直线在 $yozy$ 平面上的投影就是线段

$D'E'$, A 点两弯矩的合弯矩是 OD' , B 点两弯矩的合弯矩是 OE' , 线段 $D'E'$ 上各点到原点 o 的距离分别表示 AB 段各点处的 \bar{M}_α , 由三角形原理可知, 最大值就是线段 $D'E'$ 两端点中的一个。如果按合弯矩矢量投影的大小展开则是一个平面上的凹曲线(图 2(b))。

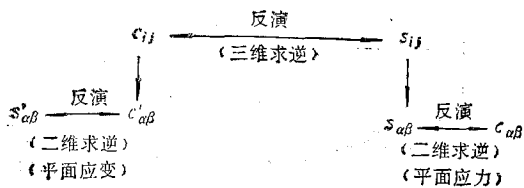
正交各向异性材料应力应变关系的表述形式

谭 继 锦

(安 徽 工 学 院)

现行复合材料力学教材中, 所建立的正交各向异性材料的三维应力-应变关系, 在由空间问题简化到平面问题时, 不能取到在表达形式上与空间问题及平面应力和平面应变相类似的刚度系数和柔度系数; 在说明由正交各向异性还原到各向同性, 且仍保持空间问题和平面问题的刚度系数和柔度系数在形式上的类似性上尚有不足。我们采用一种统一的刚度系数来表述它。

下图表示刚度系数和柔度系数的关系以及它们的缩并关系:



图中表示的演变关系清楚地表明了由刚度系数 c_{ij} 简化成平面应变的刚度系数 $c_{\alpha\beta}$, 再反演出它的柔度系数 $s_{\alpha\beta}$ 。由柔度系数 s_{ij} 取出平面应力的柔度系数 $s_{\alpha\beta}$, 再反演出它的刚度系数 $c_{\alpha\beta}$ 。两条路线演化的原因在

于平面应力和平面应变问题所对应的应力和应变为零项的不同。

对于正交各向异性材料, 可以用工程常数来表示它的柔度系数

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{32} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中: E_i 为沿 i 方向的弹性模量。

$\nu_{ij} = -\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i}$ 为沿 i 方向应力沿 j 方向产生横向应变的泊松比。且

$$\frac{\nu_{ii}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

G_{23}, G_{31}, G_{12} 依次为 2-3, 3-1, 1-2 平面的剪切模量。

E'_i, ν'_{ij} 表示刚度系数, 由(1)式反演出

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E'_1 & \nu'_{21}E'_1 & \nu'_{31}E'_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \nu'_{12}E'_2 & E'_2 & \nu'_{32}E'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \nu'_{13}E'_3 & \nu'_{23}E'_3 & E'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 1-\nu'_{12}\nu'_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G'_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G'_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G'_{12} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中

$$E'_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{13}\nu_{31}}, \quad E'_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{23}\nu_{32}}$$

$$E'_3 = \frac{(1-\nu_{12}\nu_{21})E_3}{(1-\nu_{23}\nu_{32})(1-\nu_{13}\nu_{31})}$$

$$\nu'_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{31}\nu_{32}}{1-\nu_{13}\nu_{31}}, \quad \nu'_{21} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{1-\nu_{23}\nu_{32}}$$

$$\nu'_{31} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1-\nu_{23}\nu_{32}}, \quad \nu'_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$

$$\nu'_{32} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{1-\nu_{13}\nu_{31}}, \quad \nu'_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{1-\nu_{21}\nu_{12}}$$

$$1 - \nu'_{12}\nu'_{21}$$

$$= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{31}\nu_{12} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{(1 - \nu_{23}\nu_{32})(1 - \nu_{13}\nu_{31})}$$

$$G'_{23} = G_{23}, \quad G'_{31} = G_{31}, \quad G'_{12} = G_{12}$$

由应变-应力关系(1)式取出平面应力部分

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

且

$$\epsilon_3 = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2$$

由(3)式反演出平面应力的应力-应变关系

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

由应力-应变关系(2)式取出平面应变部分

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E'_1}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} & \frac{\nu'_{21}E'_1}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} & 0 \\ \frac{\nu'_{12}E'_2}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} & \frac{E'_2}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G'_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

且

$$\sigma_3 = \frac{\nu'_{13}E'_3}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}}\epsilon_1 + \frac{\nu'_{23}E'_3}{1-\nu'_{12}\nu'_{21}}\epsilon_2$$

由(5)式反演出平面应变的应变-应力关系

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E'_1} & -\frac{\nu'_{21}}{E'_2} & 0 \\ -\frac{\nu'_{12}}{E'_1} & \frac{1}{E'_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G'_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

以上诸式的应力应变关系的刚度系数((2)、(4)、(5)式)和应变应力关系的柔度系数(1)、(3)、(6)式)保持在形式上的类似性, 而且可以还原到各向同性材料的柔度系数和刚度系数。