

(2) 当 $t > t_0$ 时, 梁中先行开裂

$$\xi = \frac{1}{2} \phi_c = \frac{1}{2} (1 + t)^2 + \frac{b-1}{2(1+t)} t^3 \quad (16)$$

3. 算例

某采场采深 400m, $q_0 = 10\text{MN/m}^2$, 顶板岩层厚 $m_1 = 4.0\text{m}$, $q_1 = 100\text{KN/m}^2$, $EI = 5000\text{MN} \cdot \text{m}^2$, $[R_1] = 2\text{MPa}$, 弹性基础刚度 $K = 700\text{MPa}$, $t = 0.11$. 经计算判断, $t > t_0$, 即梁中先行开裂, 修正系数 ξ 按(16)式计算得 0.629, 极限跨度 a^* 为 31.90m, 与(1)式计算结果相比, 前者大 6.6m.

4. 结论

分析结果表明, 由于在外力作用下弹性基础产生压缩变形效应, 与两端理想嵌固梁相比, 两端弹性嵌固支承梁的两支承端弯矩绝对值减小, 中部弯矩增大, 梁的极限跨度相应增大. 而且, 基础变形效应还影响顶板岩层达到极限跨

度时的起始开裂位置. 利用文中公式可以较准确地预计矿山开采中顶板岩层的初次垮落步距, 为安全开采提供可靠依据.

文中提出的方法对于类似支承条件下结构极限跨度的预计具有参考意义.

参 考 文 献

- [1] 宋振骥、蒋宇静, 采场常见顶板事故的统计分析, 煤炭科学技术 (1986.2)2—6.
- [2] 蒋宇静, 论直接顶岩层初次来压阶段的控制方法, 山东矿业学院学报, 7, 4(1988), 58—63.
- [3] Peng, Syd S., Chiang H. S., Longwall Mining, New York (1984) 36—41.
- [4] 钱鸣高编著, 采场矿山压力与控制, 煤炭工业出版社 (1983), 65—67.
- [5] 蒋宇静, 论弹性基础变形效应对老顶活动规律的影响, 西安矿业学院学报, 9, 1(1989), 25—35.
- [6] 中国船舶工业总公司第九设计研究院, 弹性地基梁及矩形板计算, 国防工业出版社 (1980), 290.

(本文 1989年 5月 2日收到)

复合材料的 III 型动态断裂力学分析

蒋国宾 冯广占 李祖强

(成都科技大学)

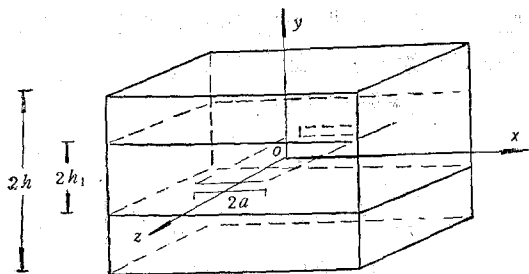


图 1

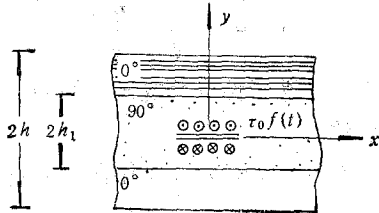


图 2

提要 本文综合利用 Laplace 变换和 Fourier 变换, 从理论上分析了含有贯穿裂纹的层合复合材料在动载荷作用下裂纹尖端的 III 型动态应力强度因子. 并以冲击载荷为算例, 考查了外层的厚度、拉、剪模量的变化对裂纹尖端应力强度因子的影响, 为改善复合材料的断裂动力学性能提供了参考依据.

关键词 复合材料, 断裂动力学, 应力强度因子

1. 数学模型与求解

图 1 所示为正交铺设层合复合材料, 图 2 为其 xy 方向的剖面图. 中间是厚度为 $2h_1$ 的 90° 层, 假设它在 xy 面内是均质各向同性的. 上下 0° 层在 xy 面内是正交各向异性的, 弹性主轴平行于 x 轴和 y 轴. 材料的总厚度为 $2h$. 设 90° 层中的固有缺陷或初始裂纹可抽象为一个长度为 $2a$ 的中心裂纹.

对于图 2 所示的 III 型动载荷作用下的位移场和应力场可以表示为

$$\left. \begin{aligned} (u_x)_i &= (u_y)_i = 0; (u_z)_i = w_i(x, y, t) \\ (\tau_{xz})_i &= c_{i5} \frac{\partial w_i}{\partial x}; (\tau_{yz})_i = c_{i4} \frac{\partial w_i}{\partial y} \\ (i &= 1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

下标 1 代表 90° 层的值, 其刚度系数 $c_{15} = c_{14} = \mu_1$; 下标 2 代表 0° 层的值, 其刚度系数 $c_{25} = c_{25}, c_{24} = c_{44}$.

在小变形的前提下, 运动方程可以写成

$$c_{i4} \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + c_{i5} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = \rho_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \quad (2)$$

设 $\rho_1 = \rho_2$

在图 2 所示的载荷作用下, 边界条件及连续条件为: (由于结构和载荷的对称情况, 只取第一象限内的 $\frac{1}{4}$ 部分求解)

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{yz})_1(x, 0, t) &= -\tau_1 i(t) \quad (0 \leq x < a) \\ w_1(x, 0, t) &= 0 \quad (x \geq a) \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$w_1(x, h_1, t) = w_2(x, h_1, t) \quad (3b)$$

$$(\tau_{yz})_1(x, h, t) = (\tau_{yz})_2(x, h_1, t) \quad (3c)$$

设具有零初始条件

$$\left. \begin{aligned} w_i(x, y, 0) &= 0 \\ \frac{\partial w_i}{\partial t} \Big|_{(x, y, 0)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

那么, 在条件(3)、(4)下求解运动方程(2), 即可考查复合材料裂纹尖端的应力状态。

首先, 对方程(2)及边界条件(3)作时间 t 的 Laplace 变换, 再对 x 作 Fourier 变换

$$F(\rho) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\rho t} dt$$

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos(s, x) dx$$

可以取得 Laplace 域内满足运动方程的解。

$$\left. \begin{aligned} w_1^* &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} [A^{(1)}(s, p) e^{-p_1 y} \\ &\quad + A^{(2)}(s, p) e^{p_2 y}] \cos(s, x) ds \\ w_2^* &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} B^{(1)}(s, p) e^{-a y} \cos(s, x) ds \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

力学与实践

其中“*”代表 Laplace 域内的值, 而

$$\left. \begin{aligned} p_{21} &= (s^2 + c_{21}^2 P^2)^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= [(s^2 c_{44} + \rho P^2) / c_{55}]^{\frac{1}{2}} \\ c_{21} &= (\rho / \mu_1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$A^{(1)}(s, P), A^{(2)}(s, P), B^{(1)}(s, P)$ 为待定函数。

将(5)代入边界条件及连续条件后, 可以确定

$$\left. \begin{aligned} A^{(1)}(s, P) &= \left[1 + \frac{\mu_1 p_{21} - c_{44} \alpha e^{-2p_{21} h_1}}{c_{44} \alpha + \mu_1 p_{21}} \right]^{-1} A(s, P) \\ A^{(2)}(s, P) &= \frac{-c_{44} \alpha + \mu_1 p_{21} e^{-2p_{21} h_1}}{c_{44} \alpha + \mu_1 p_{21}} A(s, P) \\ B^{(1)}(s, P) &= \frac{2 \mu_1 p_{21}}{\mu_1 p_{21} + c_{44} \alpha} e^{-(\gamma_{21} - a) h_1} A(s, P) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$A(s, P)$ 满足下列对偶积分方程

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{+\infty} A(s, P) \cos(sx) ds &= 0 \quad x \geq a \\ \int_0^{+\infty} SF_{III}(s, P) A(s, P) \cos(s, x) ds &= -\frac{\pi \tau_1 f^*(P)}{2 \mu_1} \quad x > a \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} F_{III}(s, P) &= \frac{p_{21}}{s} \\ &\times \left[\frac{c_{44} \alpha + \mu_1 p_{21} - (\mu_1 \gamma_{21} - c_{44} \alpha) e^{-2p_{21} h_1}}{c_{44} \alpha + \mu_1 p_{21} + (\mu_1 \gamma_{21} - c_{44} \alpha) e^{-2p_{21} h_1}} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

对于形如(8)的对偶积分方程, Copson 作了较详细解答。本文直接引用其研究成果解方程(8), 可得

$$\Phi_{III}^*(\xi, P) + \int_0^1 \Phi_{III}^*(\eta, P) k_{III}^*(\xi, \eta, P) d\eta = \sqrt{\xi} \quad (10)$$

其中 $k_{III}^*(\xi, \eta, P)$ 为方程的核

$$\begin{aligned} k_{III}^*(\xi, \eta, P) &= (\xi \cdot \eta)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \int_0^{+\infty} s \left(F_{III} \left(\frac{s}{a}, P \right) - 1 \right) J_1(s\xi) J_0(s\eta) ds \end{aligned} \quad (11)$$

$\Phi_{III}^*(r, P)$ 表征了裂纹尖端应力场的奇异性,那么,在 Laplace 域内,裂纹尖端的应力强度因子可以写成

$$K_{III}^*(P) = \tau_0 \sqrt{a} f^*(P) \Phi_{III}^*(1, P) \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{令} \quad r &= [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}; \\ \theta &= \tan^{-1}[y/(x-a)] \end{aligned} \quad (13)$$

那么,可得裂纹尖端的应力场

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xx})_I^* &= -\frac{k_{III}^*(P)}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta_1}{2} + O(r_1^0) \\ (\tau_{yz})_I^* &= \frac{k_{III}^*(P)}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta_1}{2} + O(r_1^0) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

利用 Laplace 反演,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(P) e^{Pt} dP \quad (15)$$

可得,在时间域内,裂纹尖端的动态 III 型应力强度因子

$$K_{III}(t) = \frac{\tau_0 \sqrt{a}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Phi_{III}^*(1, P) f^*(P) e^{Pt} dP \quad (16)$$

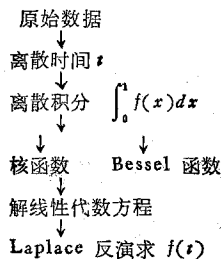
2. 算例与讨论

前面已从理论上推导了裂纹尖端的 III 型动态应力强度因子 $K_{III}(t)$ 。下面将以冲击载荷为例加以讨论。

$$\text{设 } f(t) = H(t) \text{ 那么 } f^*(P) = \frac{1}{P} \quad (1)$$

对裂纹尖端 $K_{III}(t)$ 的计算归结为求解 $\Phi_{III}^*(1, P)$, 即归结为求解 Fredholm 第二类积分方程。

本文利用数值方法编制了计算 III 型动态断裂强度因子的通用程序,框图如下

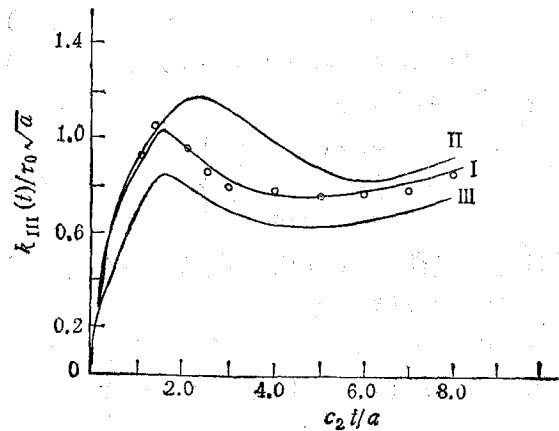


利用此离散程序,以文[1]中的材料为例利用本文推导结果计算了 $K_{III}(t)$ 与[1]比较,如

图 3 所示,吻合很好。其中曲线 I 是[1]结果,“0”为本文计算结果,由此肯定了利用积分变换解决正交各向异性复合材料的断裂动态应力强度因子是可行的,并且进一步肯定了本文的数值离散过程是正确的。

在图 3 中,以曲线 I 的材料性能为基础,仅改变中间层厚度 h_1 , 得到曲线 II, III, 比较图 3 中的 I、II、III 曲线,验证了文献[3]的实验结论。即裂纹尖端的应力强度因子的量随中间层厚度的增加而增加,而对于自由的中间层,情况则相反,进一步说明复合材料可以进一步发掘其潜力。

图 4、5 以表 1 中一织石墨-环氧的性能参数为基本参数,分别考查了外层厚度的变化及拉、剪模量的变化对裂纹尖端应力强度因子的影响。当某个参数变化时,其他参数保持不变。可见, $k_{III}(t)$ 是 b (外层厚度)、 G 的单调递减函数。这些结论为改善含有裂纹的复合材料的断裂动力学性能提供了一定的依据。



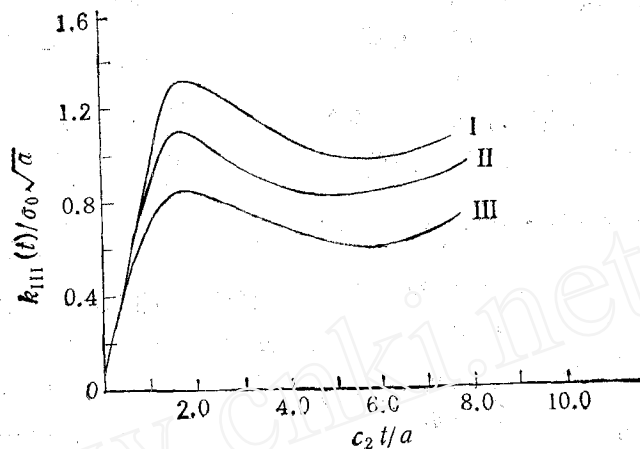
$\mu_2 = 8.5 \text{ GPa} \quad \mu_1 = 0.85 \text{ GPa}$
 I $h_1 = 1.0 \text{ cm} \quad \text{II } h_1 = 2.0 \text{ cm}$
 III $h_1 = 0.5 \text{ cm}$

图 3

本文仅计算了冲击载荷作用下的应力强度因子,还可以更深入地讨论不同形式的动载荷 $f(t)$ 对断裂性能的影响,而 $f(t)$ 只须满足 Laplace 变换及反演的收敛性条件。

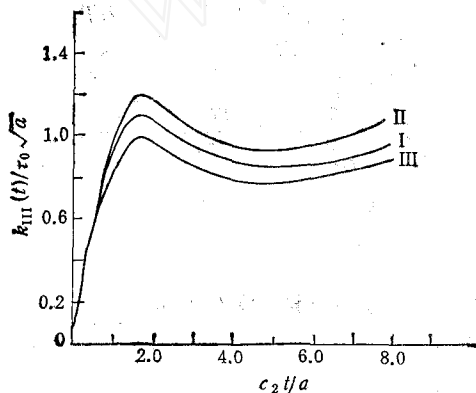
表 1

材料	性能	E_L (GPa)	E_T (GPa)	G_{LT} (GPa)	ν_{LT}	G_{L^*} (GPa)	G_{T^*} (GPa)	h_1 (cm)	h (cm)	a (cm)
石墨-环氧		1.38	11.7	4.55	0.29	2.12	1.24	1	2	1



I $G = 2.12\text{GPa}$ II $G = 0.98\text{GPa}$ III $G = 3.35\text{GPa}$

图 4



I $b = 1.0\text{cm}$ II $b = 0.3\text{cm}$ III $b = 1.5\text{cm}$

图 5

参 考 文 献

- [1] Sih, G.C., Mech. of Composite, 6(1977).
- [2] Chen, Y.N., Dynamics fracture Mechanics, 4 (1977)
- [3] 陈石卿译,断裂动力学,国防工业出版社(1982).
- [4] A.C. 艾林根, 弹性动力学, 第二卷石油工业出版社 (1984).
- [5] 冯广占等, GRP 斜拉桥稳定分析,第四届全国复合材料会议论文集.
- [6] 蒋国宾等, GRP 斜拉桥的断裂韧性研究,第五届全国断裂会议论文.

(本文于 1989 年 7 月 1 日收到)

万有 D'Alembert 原理的统一形式

陈 立 群

(鞍山钢铁学院)

提要 本文给出万有 D'Alembert 原理的统一形式, 包含了现有的各种形式.

关键词 万有 D'Alembert 原理

万有 D'Alembert 原理是建立高阶运动方程的重要基础之一, 由不同形式的万有 D'Alembert 原理可导出各类高阶运动微分方程. 这