学术讨论

陀螺力矩为哥氏惯性力矩质疑

刘　延　柱

（上 海 交 通 大 学）

绕对称轴高速旋转的转子当旋转轴在空间中改变方位时所表现出的抗阻力矩，通常称为陀螺力矩．国内外不少陀螺力学著作[1-6]，包括笔者在内[7]，都将陀螺力矩解释为刚体各组成质点的哥氏惯性力的主矩．有些书中以薄圆盘转子为例进行验证．本文对此提出疑问．

讨论一般情况下任意刚体绕定点 O 的转动．设刚体相对以 O 为原点的转动坐标系的相对角速度为 $\bar{\Omega}$，坐标系在惯性空间中的转动角速度为 $\bar{\omega}$，刚体中任意质点 P_i 相对 O 点的矢径为 $\bar{r}_i$，质量为 m_i．为避免推导过于繁琐，设 $\bar{\omega}$ 相对惯性空间，$\bar{\Omega}$ 相对动系均保持方向和模不变，则 P_i 的惯性力 $\bar{F}_i^*$ 为

$$\bar{F}_i^* = -m_i[\bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)+\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)+2\bar{\omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)]$$

计算全部质点的惯性力对 O 点的主矩

$$\bar{M}^* = \sum_i \bar{r}_i\times\bar{F}_i^*,$$

利用恒等式

$$\bar{r}_i\times[\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)] = \bar{\omega}\times[\bar{r}_i\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)]$$

$$\bar{r}_i\times[\bar{\omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)] = \bar{\omega}\times[\bar{r}_i\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)] + (\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)$$

导出

$$\begin{aligned}\bar{M}^* &= -\sum_i m_i\{(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)\times[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\times\bar{r}_i] + \bar{r}_i\times[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)]\}\\ &\quad -\sum_i m_i\bar{\omega}\times\{\bar{r}_i\times[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\times\bar{r}_i]\}\\ &= -\frac{\tilde{d}\bar{H}}{dt} - \bar{\omega}\times\bar{H} \qquad (1)\end{aligned}$$

其中波浪号表示相对转动坐标系的导数，$\bar{H}$ 和 $\bar{J}$ 为刚体对 O 点的动量矩和惯量张量，

$$\bar{H} = \sum_i m_i\bar{r}_i\times[(\bar{\Omega}+\bar{\omega})\times\bar{r}_i] = \bar{J}\cdot(\bar{\Omega}+\bar{\omega}),$$

$$\bar{J} = \sum_i m_i(r_i^2\bar{E}-\bar{r}_i\bar{r}_i)$$

根据推导过程，式(1)中的陀螺力矩项 $-\bar{\omega}\times\bar{H}$ 乃是由哥氏惯性力矩中的

$$-\sum_i m_i\bar{\omega}\times[\bar{r}_i\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)]$$

部分以及牵连惯性力矩

$$-\sum_i m_i\bar{\omega}\times[\bar{r}_i\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)]$$

所组成，而相对惯性力矩

$$-\sum_i m_i\bar{r}_i\times[\bar{\Omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)]$$

与哥氏惯性力矩的剩余部分

$$-\sum_i m_i\{\bar{r}_i\times[\bar{\omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)]+(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)\times(\bar{\omega}\times\bar{r}_i)\}$$

共同组成 $-\tilde{d}\bar{H}/dt$ 项．再单独计算哥氏惯性力对 O 点的主矩 $\bar{M}_c^*$

$$\begin{aligned}\bar{M}_c^* &= -\sum_i \bar{r}_i\times[2m_i\bar{\omega}\times(\bar{\Omega}\times\bar{r}_i)]\\ &= -\sum_i 2m_i(\bar{\omega}\cdot\bar{r}_i)(\bar{r}_i\times\bar{\Omega}) \qquad (2)\end{aligned}$$

一般情况下从 $\bar{M}_c^*$ 绝对导不出陀螺力矩 $-\bar{\omega}\times\bar{H}$．薄圆盘转子的情况极为特殊，若取转子的莱查坐标系 $(Oxyz)$ 为动系，z 轴为圆盘的对称轴，则有

$$2\sum_i m_ix_i^2 = 2\sum_i m_iy_i^2 = \sum_i m_ir_i^2 = J,$$

$$\sum_i m_iz_i^2 = 0,$$

$$\sum_i m_ix_iy_i = \sum_i m_iy_iz_i = \sum_i m_iz_ix_i = 0,$$

若 $\bar{\Omega}$ 和 $\bar{\omega}$ 分别沿 z 轴和 x 轴，且 $\Omega\gg\omega$，将 $\bar{\Omega}=\Omega\bar{k}$，$\bar{\omega}=\omega\bar{i}$ 代入式(2)，化简后的 $\bar{M}_c^*$ 恰好与陀螺力矩相等，

$$\bar{M}_c^* = J\omega\Omega\bar{j} = -\bar{\omega}\times\bar{H},\quad \bar{H}=J\Omega\bar{k}$$

即使存在薄圆盘转子的巧合情况，也不能从物理意义

上将陀螺力矩理解为哥氏惯性力的主矩. 陀螺力矩的确切解释应该是刚体各组成质点的一部分惯性力对 O 点的主矩.

参 考 文 献

[1] Сайдов, П. И., Теория, гироскопов, Высшая школа, (1965), 61.

[2] 柯兹洛夫, 航空陀螺仪表原理, 国防工业出版社, (1956)18.

[3] 陆恺等, 陀螺仪原理及应用, 国防工业出版社, (1981), 15.

[4] 黄唯一, 陀螺仪器原理, 国防工业出版社, (1987)21.

[5] 郭秀中等, 陀螺仪理论及应用, 航空工业出版社, (1987)50.

[6] 中国大百科全书 (力学), 中国大百科全书出版社, (1985)487.

[7] 刘延柱, 陀螺力学, 科学出版社, (1986)39.

关于塑性力学公设适用性的讨论

张 柔 雷

(上海交通大学工程力学系)

Drucker 公设是塑性力学的重要基础. 没有这个公设, 现代塑性理论就不可能得到发展. 文献[1]是一本深受初学者青睐的教材. 但其中"§4.2Drucker 公设"一节的基本概念令人迷惑. 原文如下

"在应力循环过程中外载所作的功是

$$\oint_{\sigma_{ij}^0} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geqslant 0 \qquad (10)$$

符号 $\oint_{\sigma_{ij}^0}$ 表示积分路径从 σ_{ij}^0 开始又回到 σ_{ij}^0. 不论材料是不是稳定的, 上述功不可能是负的, 否则我们就可以通过应力循环不断的从材料中吸取能量". 这一段概念使人立即联想起熵的概念和热力学第二定律. 文献[2]中关于热力学第二定律的第四个等价表述为"封闭系统的熵不能减小"文献[1]把应力循环当做了一个封闭系统, 似乎式(10)左端的变形能小于零即会产生永动机的错误. 笔者认为, 对于弹塑性边值问题, 决定系统状态的变量由应力和变形二部分组成, 当应力历经一个循环时, 应变并不一定恢复到初始状态, 整个系统并不封闭, 因此从热力学的角度来看, 式(10)并不具有普遍规律. 也就是说, 在一个应力循环中, 外力功不一定非负. 同样, 在一个应变循环中外力功也不一定非负. 这也是 Drucker 提出的是公设而不是定理的原因.

弄清这个概念对了解塑性力学公设的适用性和非正交(或非关联)流动法则的存在性很有帮助. 目前学者们所提出的塑性力学公设, 如 Drucker 公设, Ильюшин 公设, Martin 公设等[3-5], 主要目的之一是导出与加载面正交的流动法则, 即在一个连续的加载过程中, 当弹性性质不随加载而改变时, 塑性流动的方向一定正交于加载曲面. 需要指出的是, 这个结论并不能对所有的材料成立. 最明显的是, 岩、土等相当广泛的带内摩擦的材料, 实验和分析结果都表明塑性流动的方向与加载面梯度的方向有较大的偏离. Desai 等人的最新成果更明确地证实了这一点[6,7]. 当弹塑性不耦合时, 已有的塑性力学公设都与非正交流动法则相矛盾. 这是个很大的缺陷. 由于塑性力学公设使数学理论分析成为可能并给计算实施带来了很大的便利, 我们盼望适用于内摩擦材料的塑性公设或定理早日问世.

参 考 文 献

[1] 王仁, 黄文彬, 塑性力学引论, 北京大学出版社(1982).

[2] Orear, J., Physics, Macmillan (1979), 陈威亨等译, 大学物理学, 上册, 科学出版社(1985).

[3] 曲圣年, 殷有泉, 塑性力学的 Drucker 公设和 Ильюшин 公设, 力学学报(1985).

[4] Martin, J. B. Plasticity, Fundamentals and General Results, MIT Press, Cambridge, Mass. (1975).

[5] Dafalias, Y.F., Il'iushin's Postulate and Resulting Thermodynamic Conditions on Elastoplastic Coupling, I.J.Solids Structures, 13(1977).

[6] Desai C.S., and Hashmi, Q.S.E., Analysis, Evaluation, and Implementation of Nonassociative Model for Geologic Materials, I.J. Plasticity, 5(1989).

[7] Voyiadjis, G.Z., Degration of Elastic Modulus in Elasto-plastic Coupling with Finite Strains, I.J.Plasticity, 4(1988).