



# 波浪引起的海底土层中的 应力场和位移场

章根德 顾小芸

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文分析了波浪压力引起的海底土层中孔隙水流动的状况,给出了简化的力学模型来描述海底土层中孔隙水流动所引起的应力场和位移场。对波浪的分析采用了线性波的理论假设,波浪引起的压力计算采用高斯分布理论。孔隙流体和土骨架都假设为可压缩的,孔隙水在海底土层中的流动满足达西定律。由表示质量守恒的连续性方程与应力平衡方程出发,得到了由位移所表示的高阶微分方程,并给出了海底土层中位移场和应力场的解。其解依赖于孔隙流体和土骨架的相对压缩性,土的泊桑比和剪切模量,以及土介质的渗透率和各向异性等特性。文章还结合实际情况进行了计算,并分析了上述参数的影响。对如何应用上述结果提出了相应的参考意见。

**关键词** 土力学,波浪作用,应力,位移,孔隙压力

## 1. 引言

海底稳定性问题是建设近海工程设施所必须考虑的一个重大问题。它不仅取决于海底的地质构造,土层的力学性质,且与环境荷载,即风浪的作用休戚相关。因此,研究波浪引起的海底土层中应力及孔隙水压力分布的变化,对于海洋工程设计中的安全性分析具有重大意义。

波浪在海底土层中引起孔隙水流动。孔隙水与土骨架的相互作用表现为流动阻力、传递力和渗流力,从而引起波浪能量的耗损、波幅的衰减。早在1949年,Putnam<sup>[1]</sup>对这类现象就作了分析。他假定土层为刚性多孔介质,水为不可压缩流体,水的流动符合达西定律并给出了方程的解。后来,另一些学者也作过研究,其中Yamamoto<sup>[2]</sup>和Madsen<sup>[3]</sup>假定了土骨架为弹性,孔隙水可压缩,孔隙水流动满足达西定律。

本文分析了波浪压力引起的海底土层中孔隙水流动的状况,给出了简化的力学模型来描述海底土层中孔隙水流动所引起的位移场和应力场,并给出了方程的解。还结合某海域的实际情况作了数值计算,并对计算结果进行了分析讨论。

## 2. 力学分析及数学模型的提出

海底土层是孔隙流体和土骨架构成的两相体。孔隙流体在波浪压力作用下会产生流动,土骨架会产生变形,两者都是可压缩的。

波浪具有很强的随机性。风暴一般是非线性的,但作为初次近似,采用线性波理论是可行的。

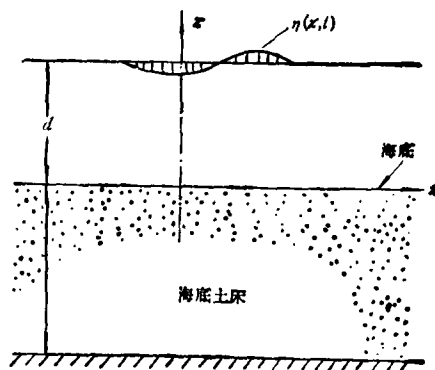


图1 海浪及海底土层示意图

对于如图1所示的直角坐标系,自由面 $\eta(x,t)$ 上任一确定点的随机波波场为

$$\eta(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dB(\omega) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (1)$$

式中 $i = \sqrt{-1}$ , $k$ 为波数, $\omega$ 为频率, $dB(\omega)$ 是一个复数的随机函数。

按线性波理论, $\eta(x,t)$ 的平均值是零。

与线性波相关联的流体动压力为

$$p(x, z, t) = -\rho \frac{\partial \phi(x, z, t)}{\partial t} \quad (2)$$

此处  $\rho$  是密度,  $\phi$  是速度势。

对于水深为  $d$  的速度势的随机波波场为

$$\phi(x, z, t) = \int_{\omega} \frac{i\omega}{k} dB(\omega) \frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd} \times \exp[i(kx - \omega t)] \quad (3)$$

于是,在海底面,波浪引起的压力为

$$p(x, t) = -\rho \int_{\omega} \frac{\omega^2}{k} \frac{dB(\omega)}{\sinh kd} \times \exp[i(kx - \omega t)] \quad (4)$$

根据高斯分布理论,可以算出海底面上的压力分布为

$$p = \frac{\gamma_w h/2}{\cosh kd} \cos(kx - \omega t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma_w h/2}{\cosh kd} e^{i(kx - \omega t)} \right\} \quad (5)$$

波浪压力会引起孔隙水的流动,其中包括水平方向的流动和垂直方向的渗流。孔隙水流动的结果将在海底土层中引起孔隙水压力及有效应力的变化。孔隙水流动应满足质量守恒定律即连续性方程,而有效应力的变化应满足应力平衡方程。

由于孔隙水的流动是由压力梯度引起的,可以引入一个排水速度矢量  $\mathbf{v} (\mathbf{v} = \operatorname{grad} p)$ 。在平面应变情况下

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\gamma_w} \left( K_x \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + K_z \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) \quad (6)$$

式中  $K_x$  和  $K_z$  为  $x$  和  $z$  方向的渗透系数。孔隙流体的压缩率  $\beta$  可表示为

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t} \quad (7)$$

设孔隙率为  $n$ , 则连续性方程是

$$\operatorname{div} \mathbf{v} - \gamma_w n \beta \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma_w \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_x) \quad (8)$$

将(6)式代入(8)式,最后可得到

$$K_x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \gamma_w n \beta \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma_w \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_x + \epsilon_z) \quad (9)$$

海底土层中的有效应力变化满足二维平面

应变的平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (11)$$

将土骨架看作理想、各向同性的弹性介质,在平面应变情况下有

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \right) \quad (12)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_z - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right) \quad (13)$$

这里  $E$  是杨氏模量,  $\nu$  是泊松比。

若用位移  $u, w$  表示波浪引起的有效应力,则可得到

$$\sigma_x = -\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (14)$$

$$\sigma_z = -\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \times \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (15)$$

$$\tau = \frac{F}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (16)$$

设所有的变量都按  $e^{i(kx - \omega t)}$  的形式变化,将(12)(13)代入(9)式得

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \left( \frac{i\omega\gamma_w n \beta}{K_z} - \frac{K_x}{K_z} k^2 \right) p = -\frac{i\omega\gamma_w}{K_z} \left( i k u + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (17)$$

略去数学推导得

$$\frac{i(K_x - K_z)k^3 + k\omega\gamma_w[n\beta + (1-2\nu)/G]}{2(1-\nu)K_z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \left[ \left( 1 + \frac{K_x(1-2\nu) + K_z}{2K_x(1-\nu)} \right) k^2 - \frac{i\omega\gamma_w n \beta}{K_z} \cdot \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 \left[ \frac{K_x}{K_z} k^2 - \frac{i\omega\gamma_w(n\beta + (1-2\nu)/2(1-\nu)G)}{K_z} \right] u \quad (18)$$

和

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - k^2(2 + k') \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^4(1 + 2k') \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - k^6 k' u = 0 \quad (19)$$

式中  $G$  为剪切模量,

$$k' = \frac{K_x}{K_z} - \frac{1}{k^2} \cdot \frac{i\omega\gamma_w}{K_x} \left( n\beta + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \right)$$

式(19)是水平位移  $u$  的六阶微分方程。解出水平位移  $u$  之后,由方程(18)可求垂直位移  $w$ 。

边界条件:

在海底与水的交界面上,法向应力为零;流体不能承受剪应力,因此剪应力也为零;波浪引起的孔隙压力由(5)给出。即

$$z = 0: \sigma_z = 0; \tau = 0;$$

$$p_b = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\gamma_w h/2}{\cosh k'd} e^{i(kz - \omega t)} \right\} \quad (20)$$

由波浪引起的孔隙压力随深度变化而最终消失。对于无限深度来说,边界条件为

$$z \rightarrow \infty: p = 0, u = w = 0 \quad (21)$$

但实际上,这种消失总是在有限深度内实现的。在  $z = h$  的某个深度,位移已经消失,该深度以下可看成刚性基底,无法向流动。即

$$z = h: u = 0, w = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

### 3. 基本方程的解

方程(19)是高阶常系数微分方程。它的解的一般形式为

$$u = A e^{rz} e^{i(kz - \omega t)} \quad (23)$$

式中  $r$  是特征方程

$$r^6 - k^2(2 + k')r^4 + k^4(1 + 2k')r^2 - k^6 k' = 0 \quad (24)$$

的根。

式(24)的六个根分别为

$$r = \begin{cases} \pm k \\ \pm k \\ \pm k k' z \end{cases} \quad (25)$$

由于特征方程存在着重根,故  $u(x, z, t)$  能为

$$u = [(A + Bz)e^{kz} + (C + Dz)e^{-kz}$$

$$+ Ee^{kk'z} + Fe^{-kk'z}]e^{i(kz - \omega t)} \quad (26)$$

本文将考虑数学上比较简单的一种情况,就是将海底土层近似为无限厚的均匀土层。由边界条件(21)得到方程(26)中的三个常数  $C$ 、 $D$ 、 $F$  均为零。则

$$u = [(A + Bz)e^{kz} + Ee^{kk'z}]e^{i(kz - \omega t)} \quad (27)$$

得到  $u$  后,由式(18)可解得  $w$

$$w = -i \left[ (A + Bz)e^{kz} + Ek'e^{kk'z} - (1 + 2\xi) \frac{B}{k} e^{kz} \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (28)$$

这里

$$\xi = \frac{[i\omega\gamma_w n\beta + i(K_x - K_z)k^2](1 - 2\nu)}{\omega\gamma_w [n\beta + (1 - 2\nu)/G + i(K_x - K_z)k^2]}$$

将  $u$  和  $w$  代入(14)~(16)和边界条件,可以定出常数  $A$ 、 $B$ 、 $E$ 。再将这些常数代入(27)、(28)、(14)~(16),最终可以得到无量纲形式的解(29)~(34)。

$$\text{令 } Q = (1 - \xi - 2\nu)k' - (1 - \nu)k'^2 + \nu + \xi$$

$$R = (1 - 2\nu)k' - (1 - \nu)k'^2 + \nu$$

$$S = 2k' - k'^2 + \nu/(1 - \nu)$$

则

$$\frac{u}{p_b/2Gk} = i \left[ \xi(1 - \nu) \frac{S}{Q} e^{kz} + \frac{R}{Q} kze^{kz} - \frac{\xi}{Q} e^{kk'z} \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (29)$$

$$\frac{w}{p_b/2Gk} = \left[ \xi(1 - \nu) \frac{S}{Q} e^{kz} + \frac{R}{Q} kze^{kz} - \frac{k'\xi}{Q} e^{kk'z} - (1 + 2\xi) \frac{R}{Q} e^{kz} \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (30)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_b} = \left[ \xi(1 - \nu) \frac{S}{Q} e^{kz} + \frac{R}{Q} kze^{kz} - \frac{\xi}{1 - 2\nu} \frac{1 - \nu - \nu k'^2}{Q} e^{kk'z} + \frac{2\nu\xi}{1 - 2\nu} \frac{R}{Q} e^{kz} \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (31)$$

$$\frac{\sigma_z}{p_b} = \left[ -\xi(1 - \nu) \frac{S}{Q} e^{kz} - \frac{R}{Q} kze^{kz} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\xi}{1-2\nu} \frac{(1-\nu)k'^2 - \nu}{Q} e^{kk'z} \\
 & + \frac{2(1-\nu)\xi R}{(1-2\nu)Q} e^{kz} \Big] e^{i(kx-\omega t)} \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau}{p_b} = -i \Big[ & \xi(1-\nu) \frac{S}{Q} e^{kz} + \frac{R}{Q} kz e^{kz} \\
 & - \frac{k'\xi}{Q} e^{kk'z} - \xi \frac{R}{Q} e^{kz} \Big] e^{i(kx-\omega t)} \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{p}{p_b} = \Big[ & -\xi \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{k'^2 - 1}{Q} e^{kk'z} \\
 & + \frac{1-\xi-2\nu}{1-2\nu} \frac{R}{Q} e^{kz} \Big] e^{i(kx-\omega t)} \quad (34)
 \end{aligned}$$

从上述的解可以看出,位移、应力及孔压的分布依赖于参数  $\nu, k'$  和  $\xi$ 。

对于实际问题,只要给出波浪参数和海底土层的参数(波高  $H$ , 周期  $T$ , 水深  $d$ , 水平方向

与垂直方向的渗透系数  $K_x, K_z$ , 孔隙流体的压缩率  $\beta$ , 土介质的孔隙率  $n$ , 土层的剪切模量  $G$  和泊桑比  $\nu$ ), 就能算出海底土层中波浪引起的应力分布和孔压分布。

#### 4. 数值计算结果与分析

按照上节给出的结果,结合南海某海域的实际参数进行了数值计算。对于五十年一遇的风浪,  $H = 13.7\text{m}, L = 301.4\text{m}, T = 14.7\text{s}$ ; 对于百年一遇的风浪,  $H = 13.9\text{m}, L = 328\text{m}, T = 14.5\text{s}$ 。在水深  $d = 80\text{m}$  处土介质参数为:  $\nu = 0.4, n = 0.57, K_x = K_z = 2 \times 10^{-7}\text{cm/s}, \beta = 3.88 \times 10^{-6}\text{cm}^2/\text{kg}, G = 400\text{kg/cm}^2, \gamma_w = 1.03 \times 10^{-3}\text{kg/cm}^3$ 。

计算结果表明,位移和应力都为复数,其模为位移或应力幅值,相位角表示了位移或应力

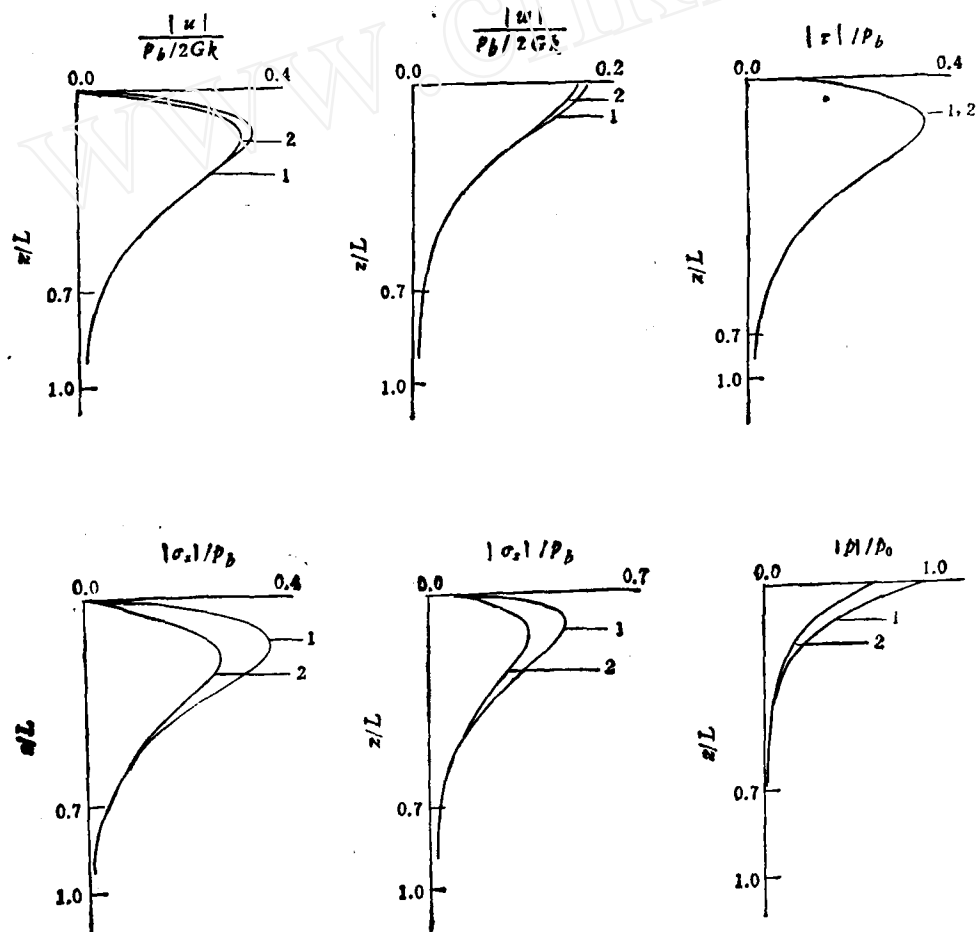


图2 波浪引起的无量纲位移、应力和孔压随无量纲土层深度的变化曲线 1  $\beta = 3.88 \times 10^{-6}\text{cm}^2/\text{kg}$   
曲线 2  $\beta = 3.88 \times 10^{-6}\text{cm}^2/\text{kg}$

相对于波浪的相位差。

无量纲的位移和应力值随无量纲深度的变化而变化(图2)。曲线1对应于 $\beta = 3.88 \times 10^{-6} \text{cm}^2/\text{kg}$ , 曲线2对应于

$$\beta = 3.88 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{kg}.$$

图中曲线表明, 由波浪引起的海底土层中的纵向位移和孔隙压力在海底面达到最大, 而横向位移和应力 $\sigma_x$ 、 $\sigma_z$ 、 $\tau$ 的最大值发生于 $z/L < 0.2$ 的某一深度。

百年一遇的风浪与五十年一遇的风浪相比, 虽然波高只增加了1.5%, 但 $u$ 和 $w$ 的最大值却增加了15%, 应力和孔压的最大值相应增加了6%, 可见风浪的波高稍有增加, 对海底稳定性的影响是十分敏感的, 其危险性将大大增加。位移和应力的最大值与水深的关系, 则随水深增加, 其最大值按比例线性地减小。

当渗透率 $K_s < 10^{-3} \text{cm/s}$ 时, 各向异性的水动力特性对计算结果的影响几乎可以忽略不计。当 $K_s$ 相应于 $1 \text{cm/s}$ 的量级时, 各向异性的影响才明显影响计算结果。本文的实例中,  $K_s \sim 10^{-7} \text{cm/s}$ , 即便 $K_s$ 与 $K_s$ 相差2个量级, 其计算结果与 $K_s/K_s = 1$ 的结果仍相差不多。因此, 当海底土层主要是低渗透率的淤泥质粘土或粉土时, 可以不考虑渗透率的各向异性。只有在粗砂中, 渗透率的各向异性才显现出实际意义。

孔隙流体的压缩率 $\beta$ 对计算结果的影响是明显的, 因为因子 $\xi$ 中包括了 $\beta$ 。对于本文所采用的参数, 当 $\beta = 3.88 \times 10^{-3} \text{cm}^2/\text{kg}$ 时, 计算结果与孔隙流体不可压的情况(即 $\beta = 0$ )相比, 相差4.5%; 当 $\beta = 3.88 \times 10^{-6} \text{cm}^2/\text{kg}$ 时, 两者仅差0.45%。可以说此时的 $\beta$ 值已等价于不可压缩流体了。

对于孔隙流体不可压(即 $\beta = 0$ )的情况, 位移和应力的表达式(29)~(34)变成

$$\frac{u}{p_b/2Gk} = kze^{kz}e^{i(kz-\omega t)} \quad (35)$$

$$\frac{w}{p_b/2Gk} = (kz-1)e^{kz}e^{i(kz-\omega t)} \quad (36)$$

$$\sigma_x/p_b = kze^{kz}e^{i(kz-\omega t)} \quad (37)$$

$$\sigma_z/p_b = -kze^{kz}e^{i(kz-\omega t)} \quad (38)$$

$$\tau/p_b = -ikze^{kz}e^{i(kz-\omega t)} \quad (39)$$

$$p/p_b = e^{kz}e^{i(kz-\omega t)} \quad (40)$$

该结果也就是 Prevost 等<sup>[4]</sup>所得的结果。

所以, 对于海洋工程的设计来说, 当孔隙流体的压缩率为 $10^{-3} \text{cm}^2/\text{kg}$ 的量级时, 就可以用不可压缩的各向同性解来代替原来的解, 以简化计算。

## 5. 结论

研究波浪引起的海底土层中应力和位移分布问题时, 采用线性波理论, 考虑孔隙水可压缩和各向异性的水动力学特性, 可以得到土床中应力场和位移场的解析解。其解依赖于孔隙流体和土骨架的相对压缩性, 土介质的泊桑比和剪切模量, 土介质的渗透率和各向异性等特性。

实例计算结果表明, 土层的横向位移和应力在海底土层的 $0.1 \sim 0.2$ 波长深度达到极大值。土层在波浪作用下的失稳将主要发生于该土层中, 它是海洋工程设计中估计安全性的重点所在。

波高对于位移和应力的影响极为重要。在海洋工程设计中考虑安全性时必须十分重视该因素。

当孔隙流体的压缩率为 $10^{-5} \text{cm}^2/\text{kg}$ 量级时, 可以采用各向同性的不可压缩流体的简化解来估算风浪引起海底土层中的应力和位移的分布。

## 参 考 文 献

- [1] Putnam, J. A., *American Geophys. Union*, 30, 3, (1949).
- [2] Yamamoto, T., 10th OTC, v. 1(1978).
- [3] Madsen O. S., Proc. 14th Coastal Engineering Conference (1974).
- [4] Prevost, J. H., Eide, O., & Anderson, K., *ASCE, J. Waterways and Harbors Div.*, 101, WW4, 1975.

(本文于1990年4月收到修改稿)