表 1　弯曲变形实验数据（$\Delta P=10kN$）

数据＼变形	转角 $\Delta\theta_C$（弧度）	挠度 Δf_B(mm)
理论值	4.25×10^{-4}	4.25×10^{-2}
实验值	4.39×10^{-4}	4.21×10^{-2}

表 2　主应力实验数据（$\Delta P=10kN$）

主应力(MPa)＼y(mm)	−15(N)		0(0)		15 (N′)	
	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_3$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_3$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_3$
理论值	0.75	−9.67	3.57	−3.57	9.67	−0.75
实验值	0.77	−9.51	3.59	−3.61	9.82	−0.69

表 3　纯弯曲正应力分布实验数据（$\Delta P=10kN$）

$\Delta\sigma$(MPa)＼y(mm)	30	20	10	0	−10	−20	−30
理论值	35.71	23.81	11.90	0	−11.90	−23.81	−35.71
实验值	36.08	24.12	11.82	0.01	−11.79	−23.48	−36.11

有限变形弹塑性理论中一个基本问题的讨论

钟　晓　光

（华中理工大学锻压教研室）

对于有限变形体而言，运动的描述的方法不同时，将得到完全不同的数学表达式．这正是有限变形理论区别于小变形理论的地方．从目前关于运动描述的现状来看，对运动描述方法在提法上存在着一些不一致的地方．广义地说运动的描述包括坐标（空间坐标或流动坐标）和参考构形两个方面．

1.关于拉格朗日坐标两种定义的比较

通常用以描述连续介质运动的方法有拉格朗日坐标描述和欧拉坐标描述两种．欧拉坐标的定义一般是相同的，但拉格朗日坐标的定义有些专著中则有不一致的地方．

设空间某质点初始位于 a^i，基矢 g_i，经位移 u 至 x^i，当地基矢 G_i．

（1）文[2]中定义的拉格朗日坐标：嵌在物质质点上，随物体一起变形的坐标，也称为随体坐标．这种拉格朗日坐标就是[1]中指的流动曲线坐标．质点位移描述

$$x^iG_i=a^ig_i+u \qquad x^i=a^i \tag{1}$$

（2）文[3]、[4]中定义的拉格朗日坐标：物体运动变形之前的质点坐标．质点位移描述

$$x^i=a^i+u^i \tag{2}$$

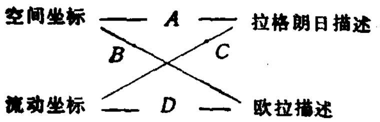
仔细分析有关专著的论述，可以发现这两种定义有下列差异：定义(1)强调坐标系随物体一起变形，定义(2)则强调的是坐标的原位的特点；在定义(1)中，初始构形和变形构形中采用的坐标架实质上是不同的，而在定义(2)中初始构形和变形构则可采用同一个坐标架；在定义(1)中 $x^i=a^i$，而在定义(2)中 $x^i\neq a^i$．

2.运动描述

参考构形的选择有两种方式：拉格朗日描述和欧拉描述．拉格朗日描述：根据初始参考构形的参数来描述物理量的方法．欧拉描述：根据变形态构形参数来度量物理量的方法．

如果我们把具有 $x^i=a^i$ 性质的坐标称为流动坐

标，具有 $x^i = a^i + u^i$ 的坐标为空间坐标，则用定义(2)中拉格朗日坐标来描述变形体的运动的方法，就是空间坐标中的拉格朗日描述. 在大变形有限元方法和有限变形弹塑性理论中，一般有下列几种组合的运动描述方法



A：即[3]、[4]中定义的拉格朗日描述，[1]中拉格朗日有限元指的是此种描述下的有限元，称之为空间坐标下的拉格朗日描述.

B：即通常的欧拉描述，在有限变形弹塑性理论和大变形有限元中一般不采用，称之为空间坐标下的欧拉描述.

C：为流动坐标下的拉格朗日描述，[5]中所采用的运动描述方法就是这种描述.

D：流动坐标下的欧拉描述，[1]中的欧拉有限元方法即是此种运动描述下的有限元.

在利用空间坐标拉格朗日方法进行有限变形的运动描述时，变形前后所采用的坐标架重合，因而具有空间描述清晰，进行增量分析时各物理量的当前值可由上步值和增量值直接叠加而获得，不必进行坐标变换等优点，但在实际分析时，又存在计算复杂，应力、应变不能直接反映局部变形特征等缺点. 修正的空间坐标拉格朗日描述(通常的 U.L 格式)，则在一定程度上克服了上述缺点. 空间坐标欧拉描述在实际计算中一般不采用. 流动坐标由于随体变形，易于描述局部变形，在利用欧拉描述，在实时流动坐标中分量做为物理参量，可使计算过程简化，并可使用较大的增量步. 另一方面，由于变形随体坐标一般为任意曲线坐标，且由于随体坐标实际上涉及两个坐标系，理论分析较复杂而且易于出错. 另外，无论采用欧拉描述还是拉格朗日描述，一般都涉及多次变换. 所以一般说来，对于二维、三维实体问题这样局部变形不突出问题，以采用空间坐标拉格朗日方法进行运动描述较好，而进行板壳大变形弹塑性分析时，采用流动坐标(拉格朗日描述或欧拉描述)较好.

3. 流动坐标应用时应注意的地方

在应用流动坐标建立方程时，应注意以下两方面事实：(1) 采用流动坐标来描述介质运动时，虽然 $x^i = a^i$，但是瞬时构形中流动坐标的基矢量已发生变化，构形变化反映在坐标架本身性质的变化. (2)通常情况下，连续介质力学的基本方程，无论采用欧拉描述还是拉格朗日描述，都是在空间坐标中建立起来的. 因此，在采用流动坐标建立有关方程时，必须谨慎小心，否则极易发生错误. 例如[1](p.204)在建立流动坐标下欧拉描述的有限元方程时，得到

$$J = \left|\frac{\partial x_m}{\partial a_n}\right| = \frac{\rho_0}{\rho} = 1$$

这样显然错误的表达式，其原因就在于 $\rho_0/\rho = J$ 是在空间坐标下导得的表达式. 它在流动坐标欧拉描述时已不成立.

实际上，即使同是欧拉描述，采用空间坐标和流动坐标，所得表达式也是不同的. 下面列出两种情况的平衡方程：(直角坐标)

空间坐标 $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$

流动坐标 $[(\delta_l^i + u^i|_l)\sigma^{sl}]_{,s} + F^i = 0$

由上述讨论可见，在进行理论分析时，必须强调在何种坐标下，采用什么参考构形进行运动描述，否则极易发生错误. 如果采用本文建立的运动描述的表述，就可清晰地表达出运动描述的内涵，避免了歧义.

参 考 文 献

[1] 孟凡中，弹塑性有限变形理论和有限元方法.
[2] 黄克智等，张量分析.
[3] 杜庆华等，应用连续介质力学.
[4] 范镜泓等，非线性连续介质力学基础.
[5] TANG, S. C., *Comput. Struct.* **13** p.363—379, (1981).

第 22 届美国中西部力学会议

时间：1991 年 10 月 7—9 日
地点：美国，密苏里州，Rolla，Missouri-Rolla 大学
截稿日期：1991 年 4 月 1 日
联系地址：Professor R. C. Batra
Dept. of Mech. & Aero. Engr.
& Engr. Mechs.,
University of Missouri-Rolla,
Rolla, MO 65401-0249
USA

第 9 届亚洲土壤力学和基础工程会议

时间：1991 年 5 月 27 日至 6 月 1 日
地点：泰国曼谷
联系地址：
Prof. A S Balasubramaniam, Secretary
South East Asia Geotechnical Society,
Asian Institute of Technology,
PO Box 2754,
Bangkok 10501
Thailand

(北京大学　王敏中供稿)