

$M_x$  或  $M_y$  (如滚动摩擦力偶)作出的。本文所涉及的力偶  $M_x$  与旋转运动时的摩擦力偶有关。这样一来, 本文的解连同上述各种解一起使得半空间体边界受任意力系作用的问题有了一个完整的理论解。它为研究各种实际接触问题给出了理论基础。

(2) 与位移解的双调和函数形式相比, 采用调和函数形式在选用函数时是比较方便的。

(3) 应用胡海昌先生建议的“集中力对”概

念清楚地解释了本文解的非唯一性问题。

### 参 考 文 献

- [1] Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N., Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company (1970).
- [2] 胡海昌, 线弹性理论中的集中载荷, 力学与实践, 1 (1987).
- [3] 魏先祥, 半空间体边界上受集中力偶作用, 兰州铁道学院学报, 4(1987).

(本文于1988年5月29日收到)

## 航空材料梁弹塑性弯曲的近似封闭解

吴国勋 张 行

(北京航空航天大学)

**摘要** 本文将材料的应力-应变曲线表示成包含奇次指数的幂函数多项式。将直梁弯曲正应力展成勒让德函数项级数, 构造了一个包含无限多个待定系数的静力许可场。用余能原理确定其系数。给出了两种材料、两种截面、三种载荷梁的计算结果。结果表明: 级数收敛性很好。从而, 给出了相当精确的近似封闭解。

**关键词** 航空材料, 弹塑性梁, 余能原理

表 1

材 料	30CrMnSiNi 合金钢	LC9 铝合金
$\lambda_3(\text{mm}^2/\text{KN})^2$	-0.251417	-1.85568
$\lambda_5(\text{mm}^2/\text{KN})^4$	0.338404	20.00900
$E(\text{KN}/\text{mm}^2)$	200.5855	69.4437
$\sigma_b(\text{KN}/\text{mm}^2)$	1.6529	0.5213

$$\varepsilon = \frac{1}{E} (\sigma + \lambda_3 \sigma^3 + \lambda_5 \sigma^5) \quad (1)$$

### 1. 引言

为减轻飞行器等结构重量, 人们常要求材料在弹塑性范围内工作。因此, 必须对结构进行弹塑性分析。为克服材料进入塑性状态导致物理非线性方面的困难, 人们对应力-应变关系曾作过多种简化<sup>[1,2]</sup>。这些简化模型大都不适合常用航空材料。采用有限元素法对结构作弹塑性分析, 只适合于校核计算, 而不适用于设计计算。我们在给出尽可能精确的应力-应变关系表达式的基础上用力学对梁进行了分析。给出了工程上应用方便的应力和位移的封闭解。

### 2. 基本方法

#### 2.1 应力-应变关系的幂函数表达式

对于合金钢、铝合金等一般硬化材料的应力-应变关系可采用以下幂函数表示

其中  $E$  为弹性模量,  $\lambda_3$ 、 $\lambda_5$  为材料常数, 它们可用试验曲线确定。表 1 给出了 30CrMnSiNi 与 LC9 材料的  $E$ 、 $\lambda_3$ 、 $\lambda_5$  之值。拉伸曲线是在 MTS 机上完成的, 全曲线采集点数在 100 个以上。根据工程常用应力范围用最小二乘法拟合试验曲线确定  $\lambda_3$ 、 $\lambda_5$ 。利用表 1 与式(1)所得曲线②-5 试验曲线①在常用范围内吻合得很好, 如图 1 所示。在  $\sigma \leq 0.9\sigma_b$  的范围内最大应力偏差为 2%, 该偏差位于材料的分散带内。图 1 中曲线③是用 Osgood-Ramberg 公式<sup>[3]</sup>(三参数方程)拟合试验曲线得到的, 显然, 曲线③不及曲线②好, 而且它不便于应力分析。

2.2 静力许可场的表达式 坐标如图 2 所示的对称截面梁, 可将横截面上的弯曲正应力

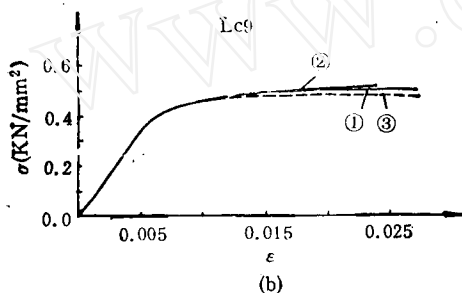
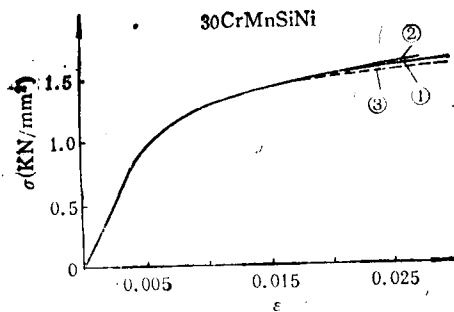


图 1

$\sigma$  展成如下勒让德级数

$$\sigma = \frac{M(x)}{W} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} P_{2n+1}(\xi) \quad (2)$$

$M(x)$  为  $x$  截面处的弯矩,  $a_{2n+1}$  为待定系数,  $P_{2n+1}(\xi)$  为勒让德函数<sup>[4]</sup>,  $\xi$  为以下无量纲量

$$\xi = Y/H \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3)$$

$H$  为横截面半高,  $W$  为横截面抗弯模量

$$W = \frac{1}{H} \int_A y^2 dA = H \int_A P_1^2(\xi) dA \quad (4)$$

利用(2)式和截面平衡条件

$$M(x) = \int_A \sigma y dA = H \int_A \sigma \xi dA$$

可得

$$a_1 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n+1} a_{2n+1} \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n}, \quad (5)$$

$$b_{2n+1} = \frac{H}{W} \int_A P_{2n+1}(\xi) \xi dA$$

将  $a_1$  代入(2)式, 可得如下静力许可场

$$\sigma = \frac{M(x)}{W} \left\{ P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \right.$$

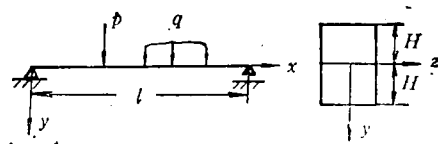


图 2

$$\cdot \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} \bar{P}_{2n+1}(\xi) \} \quad (6)$$

其中

$$\bar{P}_{2n+1}(\xi) = P_{2n+1}(\xi) - b_{2n+1} P_1(\xi) \quad (7)$$

2.3 用余能原理确定待定系数 系数  $a_{2n+1}$  ( $n \geq 1$ ) 应通过协调条件确定, 该条件可用余能原理予以满足. 对于细长梁, 可略去剪应力和挤压应力的效应. 从而, 总余能  $U_c$  为

$$U_c = \frac{1}{2E} \int_V (\sigma^2 + \frac{\lambda_1}{2} \sigma^4 + \frac{\lambda_2}{3} \sigma^6) dV \quad (8)$$

系数  $a_{2n+1}$  应使总余能  $U_c$  取最小值, 即

$$\partial U_c / \partial a_{2n+1} = 0 \quad (9)$$

利用(6)、(8)、(9)式可得确定  $a_{2n+1}$  的非线性方程组


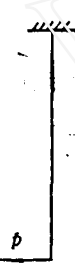

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^m a_{2n+1} \int_V \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2(1+n+k)} \bar{P}_{2n+1}(\xi) \bar{P}_{2k+1}(\xi) dV \\ & = - \int_V \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2(1+k)} P_1(\xi) \bar{P}_{2k+1}(\xi) - B \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} B = & \lambda_1 \int_V \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2(2+k)} \left\{ P_1 + \sum_{n=1}^m a_{2n+1} \right. \\ & \cdot \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} \bar{P}_{2n+1}(\xi) \}^2 \bar{P}_{2k+1} dV \\ & + \lambda_2 \int_V \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2(3+k)} \left\{ P_1 + \sum_{n=1}^m a_{2n+1} \right. \\ & \cdot \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} \bar{P}_{2n+1}(\xi) \}^3 \bar{P}_{2k+1} dV \end{aligned} \quad (k \geq 1) \quad (11)$$

给定具体梁和  $m$  值后, 用逐次迭代法求  $a_{2n+1}$ . 先令(11)式中的  $a_{2n+1} = 0$ , 由(10)式求出  $a_{2n+1} = a_{2n+1}^{(1)}$ . 将它代入(11)式后再次由(10)式求  $a_{2n+1} = a_{2n+1}^{(2)}$ . 以此类推, 直到收敛为止.  $m$  值可据最大弯曲正应力的收敛而定.

2.4 梁的位移 梁的位移可用单位力法

表 2 矩形截面梁

梁	30CrMnSiNi $\sigma_s = M_{max}/W = 1.4\text{KN/mm}^2$				LC9 $\sigma_s = M_{max}/W = 0.48\text{KN/mm}^2$			
	最大应力		挠度系数		最大应力		挠度系数	
	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.86527	$k_f^{(2)}$	1.01351	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.88475	$k_f^{(2)}$	1.00762
	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.85065	$k_f^{(3)}$	1.01313	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.86354	$k_f^{(3)}$	1.00797
	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.88006	$k_f^{(4)}$	1.01356	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.89059	$k_f^{(4)}$	1.00809
	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.85886	$k_f^{(5)}$	1.01319	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.87858	$k_f^{(5)}$	1.00735
	$\bar{\sigma}_{max}^{(6)}$	0.85937	$k_f^{(6)}$	1.01322	$\bar{\sigma}_{max}^{(6)}$	0.87924	$k_f^{(6)}$	1.00740
	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.85912	$k_f^*$	1.01315	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.87891	$k_f^*$	1.00738
	$\bar{\sigma}_{max}$	0.86320	$k_f$	1.01324	$\bar{\sigma}_{max}$	0.88255	$k_f$	1.00749
	$\delta_s\%$	0.4749	$\delta_f\%$	0.0074	$\delta_s\%$	0.5370	$\delta_f\%$	0.0109
	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.86297	$k_f^{(2)}$	1.02866	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.88248	$k_f^{(2)}$	1.01923
	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.85003	$k_f^{(3)}$	1.02731	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.86274	$k_f^{(3)}$	1.01951
	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.87897	$k_f^{(4)}$	1.02805	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.88914	$k_f^{(4)}$	1.02035
	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.85416	$k_f^{(5)}$	1.02759	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.87346	$k_f^{(5)}$	1.01859
	$\bar{\sigma}_{max}^{(6)}$	0.85887	$k_f^{(6)}$	1.02785	$\bar{\sigma}_{max}^{(6)}$	0.87822	$k_f^{(6)}$	1.01901
	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.85652	$k_f^*$	1.02772	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.87584	$k_f^*$	1.01880
	$\bar{\sigma}_{max}$	0.86072	$k_f$	1.02791	$\bar{\sigma}_{max}$	0.88126	$k_f$	1.01903
	$\delta_s\%$	0.4909	$\delta_f\%$	0.0185	$\delta_s\%$	0.6188	$\delta_f\%$	0.0226
	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.84000	$k_f^{(2)}$	1.14645	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.85783	$k_f^{(2)}$	1.11606
	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.85232	$k_f^{(3)}$	1.14418	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.85983	$k_f^{(3)}$	1.11546
	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.86847	$k_f^{(4)}$	1.14442	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.87689	$k_f^{(4)}$	1.11449
	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.82484	$k_f^{(5)}$	1.14215	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.84484	$k_f^{(5)}$	1.11400
	$\bar{\sigma}_{max}^{(6)}$	0.83531	$k_f^{(6)}$	1.14301	$\bar{\sigma}_{max}^{(6)}$	0.85634	$k_f^{(6)}$	1.11422
	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.83008	$k_f^*$	1.14258	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.85059	$k_f^*$	1.11411
	$\bar{\sigma}_{max}$	0.83324	$k_f$	1.14320	$\bar{\sigma}_{max}$	0.85377	$k_f$	1.11434
	$\delta_s\%$	0.3813	$\delta_f\%$	0.0543	$\delta_s\%$	0.3738	$\delta_f\%$	0.0206

确定。若以  $\bar{M}(x)$  表示广义单位力所产生的弯矩，则相应的弯曲正应力  $\sigma = \bar{M}(x)P_1(\xi)/W$ ，于是梁的位移为

$$\Delta = \int_V \varepsilon \sigma dV = \int_V \varepsilon \frac{M(x)}{W} P_1(\xi) dV = k \Delta_e \quad (12)$$

其中

$$\Delta_e = \int_0^l \frac{M(x)}{EI} \bar{M}(x) dX \quad l = WH \quad (13)$$

$$k = 1 + \left[ H / \int_0^l M(x) \bar{M}(x) dX \right]$$




$$\left( \int_V \frac{M(x)}{W} \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \right)$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} \bar{P}_{2n+1} P_1 \bar{M}(x) dV \\ & + \lambda_3 \int_V \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^3 \left\{ P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \right. \\ & \cdot \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} \bar{P}_{2n+1} \left. \right\} \bar{M}(x) P_1 dV \\ & + \lambda_3 \int_V \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^5 \left\{ P_1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \right. \\ & \cdot \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^{2n} \bar{P}_{2n+1} \left. \right\} P_1 \bar{M}(x) dV \quad (14) \end{aligned}$$

这里， $\Delta_e$  为弹性位移， $k$  代表计及塑性时的放大倍数，可称为位移系数。

### 3. 算例，近似封闭解

表3 薄圆管梁

梁	30CrMnSiNi $\sigma_0 = M_{max}/W = 1.4\text{KN/mm}^2$				LC9 $\sigma_0 = M_{max}/W = 0.48\text{KN/mm}^2$			
	最大应力		挠度系数		最大应力		挠度系数	
	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.89788	$k_f^{(2)}$	1.05489	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.91228	$k_f^{(2)}$	1.04029
	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.89855	$k_f^{(3)}$	1.05494	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.90663	$k_f^{(3)}$	1.03999
	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.90835	$k_f^{(4)}$	1.05415	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.91568	$k_f^{(4)}$	1.03976
	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.90563	$k_f^{(5)}$	1.05446	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.91085	$k_f^{(5)}$	1.03994
	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.90699	$k_f^*$	1.05431	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.91327	$k_f^*$	1.03985
	$\bar{\sigma}_{max}$	0.90763	$k_f$	1.05454	$\bar{\sigma}_{max}$	0.91355	$k_f$	1.04042
	$\delta_\sigma\%$	0.0706	$\delta_f\%$	0.0294	$\delta_\sigma\%$	0.0312	$\delta_f\%$	0.0548
		$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.89655	$k_f^{(2)}$	1.08382	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.90989	$k_f^{(2)}$
$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$		0.89838	$k_f^{(3)}$	1.08234	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.90638	$k_f^{(3)}$	1.06308
$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$		0.90773	$k_f^{(4)}$	1.08330	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.91537	$k_f^{(4)}$	1.06235
$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$		0.90292	$k_f^{(5)}$	1.08335	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.90990	$k_f^{(5)}$	1.06297
$\bar{\sigma}_{max}^*$		0.90533	$k_f^*$	1.08333	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.91264	$k_f^*$	1.06266
$\bar{\sigma}_{max}$		0.90760	$k_f$	1.08400	$\bar{\sigma}_{max}$	0.91352	$k_f$	1.06360
$\delta_\sigma\%$		0.2510	$\delta_f\%$	0.0619	$\delta_\sigma\%$	0.0920	$\delta_f\%$	0.0885
		$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.88590	$k_f^{(2)}$	1.30358	$\bar{\sigma}_{max}^{(2)}$	0.89681	$k_f^{(2)}$
	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.89897	$k_f^{(3)}$	1.30381	$\bar{\sigma}_{max}^{(3)}$	0.90435	$k_f^{(3)}$	1.24478
	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.90533	$k_f^{(4)}$	1.30017	$\bar{\sigma}_{max}^{(4)}$	0.90941	$k_f^{(4)}$	1.24185
	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.90042	$k_f^{(5)}$	1.29717	$\bar{\sigma}_{max}^{(5)}$	0.90641	$k_f^{(5)}$	1.24007
	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.90288	$k_f^*$	1.29867	$\bar{\sigma}_{max}^*$	0.90791	$k_f^*$	1.24096
	$\bar{\sigma}_{max}$	0.90786	$k_f$	1.29904	$\bar{\sigma}_{max}$	0.91312	$k_f$	1.24140
	$\delta_\sigma\%$	0.5516	$\delta_f\%$	0.0285	$\delta_\sigma\%$	0.5738	$\delta_f\%$	0.0350

我们利用上述方法作过多种计算。在表2、3中给出了两种材料、两种截面，三种梁的计算结果。作两点说明如下：

(1) 矩形截面梁， $b_{2n+1} = 0, \bar{P}_{2n+1} = P_{2n+1}$ ；半径为  $R$ 、厚度为  $t$  的薄圆管梁， $H = R, \xi = \sin \theta, W = \pi t R^2$ 。

(2) 在表2、3中， $\bar{\sigma}_{max}^{(N)} = \sigma_{max}^{(N)}/\sigma_0, k_f^{(N)}$  分别代表取级数前  $N (= m + 1)$  项时的无量纲最大应力和挠度系数， $\sigma_0 = M_{max}/W$ 。由于应力和位移在波动中收敛，我们用  $\bar{\sigma}_{max}^*, k_f^*$  表示  $N_{max}$  和  $N_{max} - 1$  两项结果的平均值；用  $\bar{\sigma}_{max}, k_f$  表示近似封闭解的结果， $\delta_\sigma, \delta_f$  为  $\bar{\sigma}_{max}, k_f$  与  $\bar{\sigma}_{max}^*, k_f^*$  的相对误差，它们可以代表封闭解的精度。

由于级数具有良好的收敛性，根据计算结果可以给出近似封闭解如下。为方便起见，在以下公式中引用符号

$$\bar{J}_n = \int_0^1 \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^n \bar{M}(x) dx \quad (15)$$

$$J_n = \int_0^1 \left[ \frac{M(x)}{W} \right]^n dx$$

矩形截面梁

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \left[ 1 + \left( \frac{M_{max}}{W} \right)^2 a_1 \right] \quad (16)$$

$$k = 1 + (3/2\bar{J}_1) \left\{ \lambda_3 \left[ \frac{2}{3} \bar{J}_1 + \frac{12}{35} a_2 \bar{J}_2 \right] + \frac{46}{105} a_2^2 \bar{J}_1 + \frac{24}{385} a_3^2 \bar{J}_2 \right\}$$

$$+ \lambda_3 \left\{ \frac{2}{7} \bar{J}_5 + \frac{40}{63} a_3 \bar{J}_7 + \frac{260}{231} a_3^2 \bar{J}_9 \right. \\ \left. + \frac{760}{1001} a_3^3 \bar{J}_{11} + \frac{1090}{3003} a_3^4 \bar{J}_{13} \right\} \quad (17)$$

$$a_3 = -\frac{1}{2a} [b - \sqrt{b^2 - 4ac}] \quad (18)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{36}{55} \lambda_3 J_{10} + \frac{95}{36} \lambda_5 J_{12}, \\ b &= J_6 + \frac{23}{15} \lambda_3 J_8 + \frac{65}{33} \lambda_5 J_{10} \\ c &= \frac{2}{5} \lambda_3 J_6 + \frac{4}{9} \lambda_5 J_8 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

薄圆管梁

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \left[ 1 + \frac{5}{8} \left( \frac{M_{\max}}{W} \right)^2 a_3 \right. \\ \left. + \frac{49}{64} \left( \frac{M_{\max}}{W} \right)^4 a_5 \right] \quad (20)$$

$$k = 1 + (2/\bar{J}_1) \left\{ \lambda_3 \left[ \frac{3}{8} \bar{J}_3 + \frac{15}{64} a_3 \bar{J}_5 \right. \right. \\ \left. + \frac{75}{256} a_3^2 \bar{J}_7 + \frac{105}{1024} a_3 \bar{J}_9 + \frac{1995}{4096} a_3 a_5 \bar{J}_{11} \right. \\ \left. + \frac{22197}{65536} a_3^2 \bar{J}_{13} \right] + \lambda_5 \left[ \frac{5}{16} \bar{J}_5 + \frac{125}{256} a_3 \bar{J}_7 \right. \\ \left. + \frac{375}{512} a_3^2 \bar{J}_9 + \frac{1875}{8192} a_3^3 \bar{J}_{11} + \frac{9375}{65536} a_3^4 \bar{J}_{13} \right. \\ \left. + \frac{595}{2048} a_3 \bar{J}_9 + \frac{5775}{4096} a_3 a_5 \bar{J}_{11} \right. \\ \left. + \frac{61005}{65536} a_3^2 \bar{J}_{13} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= (C_2 A_2 - C_1 B_2) / (A_1 B_2 - A_2 B_1), \\ a_5 &= (C_1 B_1 - C_2 A_1) / (A_1 B_2 - A_2 B_1) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= J_6 + \frac{3}{2} \lambda_3 J_8 + \frac{15}{8} \lambda_5 J_{10}, \\ A_2 &= \frac{7}{16} \left( J_8 + \frac{57}{20} \lambda_3 J_{10} + \frac{33}{8} \lambda_5 J_{12} \right) \\ B_1 &= \frac{5}{371} (40 J_8 + 114 \lambda_3 J_{10} + 165 \lambda_5 J_{12}), \\ B_2 &= J_{10} + \frac{453}{212} \lambda_3 J_{12} + \frac{1245}{424} \lambda_5 J_{14} \\ C_1 &= \frac{2}{5} \lambda_3 J_6 + \frac{1}{2} \lambda_5 J_8, \\ C_2 &= \frac{8}{371} (10 \lambda_3 J_8 + 17 \lambda_5 J_{10}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

我们在  $\sigma_0 \leq \sigma_s$  的范围内作了若干计算, 发现近似解的精度与表 2、3 中的量级相同。

用正应力  $\sigma$  可求出剪应力  $\tau$ , 若采用  $\tau_{\max}/\sigma_{\max} \leq 0.05$  为细长梁的判据, 则表 2 中前两种梁  $H/l$  分别为 1/23, 1/12。显然, 与弹性细长梁的条件相当接近。

#### 4. 结论

用表达式 (1) 能很好地拟合各种航空塑性金属材料的应力-应变曲线。

近似解可用于各种载荷、支持形式、对称截面的细长梁。在常用应力范围内, 应力误差小于 1%, 位移误差小于 0.1%。

细长梁的条件与弹性梁相近。

#### 参 考 文 献

- [1] 王仁等, 塑性力学基础, 科学出版社 (1982).
- [2] 林兴等, 实用塑性弯曲译文集, 中国工业出版社 (1962).
- [3] 飞机设计员手册, 国防工业出版社 (1965).
- [4] 数学手册, 人民教育出版社 (1979).

(本文于 1988 年 5 月 16 日收到)

## 在拉力和弯曲作用下的简支均匀圆板极限状态的完全解

赵 彭 年

(中国矿业大学北京研究生部)

提要 本文对拉弯联合作用下的简支均匀圆板, 采用均匀壳的 Tresca 屈服条件, 得到了极限状态的完全解。

关键词 拉弯联合作用, 均匀圆板, 极限状态