第 31 卷 第 4 期 力 学 进 展 Vol. 31 No. 4
2001 年 11 月 25 日 ADVACES IN MECHANICS Nov. 25, 2001

轴向运动弦线的纵向振动及其控制*

陈立群
上海大学力学系，上海市应用数学和力学研究所，上海 200072
Jean W. Zu
Department of Mechanical & Industrial Engineering, University of Toronto, Ontario, M5S 3G8 Canada

摘 要 综述轴向运动弦线纵向振动及其控制问题的研究进展. 多种工程系统如动力传送带、磁带、纸带、纺织纤维、带锯、空中缆车索道等均涉及轴向运动弦线的纵向振动. 对线性模型而言，除早期结果外，总结了运动弦线的模态分析、具有复杂约束和耦合的运动弦线振动和运动弦线参数振动的近期研究. 对非线性模型而言，提出了轴向运动弦线大幅纵向振动的运动微分方程，概述了离散化和直接近似解析分析、用黏弹性材料模型化阻尼机制和动力传输系统的耦合振动研究的新进展. 讨论了轴向运动弦线振动主动控制的研究现状，包括能控性和能观性，控制分析的频域方法和能量方法，振动的自适应控制和非线性振动的控制. 最后指出该研究方向今后需要研究的若干重要问题，包括运动弦线的非线性动力学行为、黏弹性运动弦线的振动、含运动弦线的混杂系统的控制和轴向运动弦线非线性振动的控制.

关键词 轴向运动弦线，线性振动，参数振动，非线性振动，主动振动控制

1 引 言

动力传送带、磁带、纸带、纺织纤维、带锯、空中缆车索道、高楼升降机缆绳、单索架空索道等多种工程系统元件，忽略抗弯刚度时均可模型化为轴向运动弦线，沿轴线方向平移、受较大轴向力作用而张紧 (平衡位形为直线) 的弦线 (不具有抗弯刚度). 轴向运动弦线纵向振动及其控制的研究有着重要的应用价值. 例如，在磁带装置中，振动导致信号调制和加速磁带磨损. 又例如，汽车发动机的平带驱动系统中带的振动将产生噪声和影响发动机运转的平稳和可靠. 同时，轴向运动弦线作为陀螺连续系统，其振动的激励响应关系、稳定性分析、数值仿真和控制系统设计等也提出若干重要的理论问题. 轴向运动弦线纵向振动分析和控制成为一个较为活跃的研究领域，本文综述该领域的研究进展. 鉴于 90 年代之前轴向运动弦线振动分析工作已有很好的综述 [1~4], 本文着重总结振动分析近 10 年来的成果和振动控制的研究进展.

2 轴向运动弦线的线性振动

轴向运动弦线纵向振动的研究起源于 1897 年 Skutch[5] 的工作. 轴向运动弦线纵向位移较小时，可采用线性振动模型. 主要研究内容包括自由振动的固有频率和本征函数，受迫振动的

收稿日期: 2001-04-04, 修回日期: 2001-07-30
* 国家自然科学基金资助项目 (10172056)

稳态和瞬态响应，受较复杂约束弦线和弦线与其它元件耦合的振动，轴向张力涨落和轴向运动速度变化导致参数振动的稳定性等.

考虑长度 l 、单位长度质量为 ρ_l 、轴向张力为 $\boldsymbol{P}$ 、以匀速 c 运动的均匀弦线，设它受分布力 $F(X,T)$ 作用，若其纵向振动位移 $U(X,T)$ 较小而可以略去高阶量时，动力学方程为

$$\rho_l\left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}+2c\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial X}\right)-(\boldsymbol{P}-\rho_l c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}=F(X,T) \tag{1}$$

其无量刚化形式为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-(1-\nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) \tag{2}$$

其中

$$x=\frac{X}{l},\quad u=\frac{U}{l},\quad t=\frac{T}{l}\sqrt{\frac{\boldsymbol{P}}{\rho_l}},\quad f=\frac{Fl}{\boldsymbol{P}},\quad \nu=c\sqrt{\frac{\rho_l}{\boldsymbol{P}}} \tag{3}$$

最基本的边界条件是两端无纵向振动的情形，此时

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0 \tag{4}$$

轴向运动弦线研究早期的工作主要讨论振动的频率和对各种具体激励的响应. Skutch[5] 利用两个波反向传播的方法得到了该系统的基频. Sack[6] 研究了一端受简谐纵向位移激励时运动弦线纵向振动的响应，由共振关系得到了该系统的固有频率

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\left(1-\frac{\rho_l c^2}{\boldsymbol{P}}\right)\sqrt{\frac{\boldsymbol{P}}{\rho_l}} \tag{5}$$

Mahalingam[7] 以轴向运动弦线为力学模型研究动力传输链的振动，由于齿轮上的链为多边形而非理想的圆形，弦线在两端边界受到同频异相纵向位移激励的作用，用叠加的方法可以得到系统响应，他还在计及阻尼时发现共振振幅随轴向速度减小，与实验结果一致. Archibald 和 Emslie[8] 用变分原理建立了运动弦线的动力学方程，并分析了轴向运动对固有频率和本征函数的影响. Swope 和 Ames[9] 用运动弦线为模型讨论纺织工业中纤维线的不稳定问题，他们分析了波在运动介质中的传播，发现波的传播速度与弦线运动速度相等时出现发散不稳定.

Wickert 和 Mote[10] 采用连续陀螺系统模态分析的方法确定了轴向运动弦线对一般激励的响应. 式 (2) 可写作无穷维陀螺系统

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}+Ku=f \tag{6}$$

其中质量算子 M 为恒等算子，关于空间变量反对称的陀螺算子 G 和关于空间变量对称刚度算子 K 分别为

$$G=2\nu\frac{\partial}{\partial x},\quad K=-(1-\nu^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{7}$$

进一步可将式 (6) 用状态变量表示，在给定的边界条件例如 (4) 下，可导出系统的本征值和本征函数. 采用模态分析的方法 [11] 得到对任意作用力的满足任意初始条件的响应. 利用 Green 函数可给出响应的积分表达式. 随后他们又对模态函数的选取作了改进 [12]. 这一工作不仅完全解决了均匀运动弦线在两端固定约束下的振动响应问题，而且是研究更为复杂的约束和耦合问题的基础，也是用近似解析方法研究轴向运动弦线纵向非线性振动的基础.

轴向运动弦线纵向线性振动近来主要研究较为复杂的约束问题. 较早的工作主要考虑端点支承的弹性. 运动弦线端点的弹性对振动固有频率的影响由 Mote[13] 首先研究. Schajer[14] 给

出在弹性支承小孔间轴向运动的弦线的固有频率和模态的近似解, Perkins 和 Mote[15] 给出了精确解. 随后分布弹性基础上运动弦线的振动问题有若干研究. Bhat 等 [16] 采用有限差分方法将问题离散化, 然后用数值方法求得运动, 但他们考虑的是非线性自由振动. Perkins[17] 分别研究了具有多个离散的弹性支承和连续的弹性基础上运动弦线的自由振动及对端点简谐运动的稳态响应. Wickert[18] 用模态分析的方法研究弹性基础上的运动弦线, 讨论了自由振动和对端点简谐运动和弦线上一点简谐激励的稳态响应. Zhu 和 Mote[19] 研究了受一单侧约束时运动弦线对任意分布力和边界激励的瞬态响应, 采用模态分析的方法, 在刚性约束和柔性约束的情形, 分别导出描述系统振动的时滞方程和时滞积分方程, 后者在不计约束惯性时可退化为时滞微分方程. Lakshmikumaran 和 Wichert[20] 研究了具有气体支承的运动弦线, 用模态分析方法讨论了自由振动, 并进行了实验验证. Chen[21] 研究了受静态载荷系统约束的运动弦线, 静态载荷系统包括质量、弹性、阻尼和与弦线的干摩擦, 基于模态分析方法分析了静态载荷系统参数对弦线纵向振动频率的影响. 此外, Yang[22] 建立了分布陀螺系统的本征值包含原理, 并应用于分析增加弹性约束对轴向运动弦线纵向振动固有频率的影响.

轴向运动弦线纵向线性振动近来研究较多的另一类问题是弦线与其它部件的耦合振动. 工程问题中具有非均匀分布质量的运动弦线可以模型化为附加一质点的运动弦线, Wickert 和 Mote[23] 先将这一系统的自由振动问题依据弦长的不同归结为弦线中行波在质点处的反射和在质点处衔接的两弦线, 前者用谐波散射法求解, 后者在质点质量及弦线轴向速度较小时可得到本征方程的渐近解, 一般情形可用 Galerkin 方法离散化后数值求解. 随后, Wickert 和 Mote[24] 采用模态分析方法研究受迫振动问题, 导出耦合系统相互作用力满足的带时滞的 Volterra 积分方程, 在质点质量及弦线轴向速度较小时可得的渐近解, 一般情形可求数值解, 并进行了实验验证. Zhu 和 Mote[25] 研究了轴向运动弦线附加一质量 - 弹簧 - 阻尼振子的情形, 导出耦合系统相互作用力满足的时滞 - 积分 - 微分方程, 并进行数值求解. 动力传送装置可以模型化为运动弦线振动与圆盘转动振动的耦合, Beikmann 等 [26] 研究了不考虑带上激励的情形, 采用基于 Holzer 方法的双重迭代求解本征值问题, 结果与实验值吻合. Zhang 和 Zu[27] 综合离散陀螺系统模态分析法及运动弦线的模态分析法, 建立了显式的频率方程, 并得到对任意激励的响应和对简谐激励的稳态响应. 他们还进一步研究了有阻尼的情形, 提出了非自伴的混杂系统的模态分析法. 平带驱动系统振动分析进展我们将另文综述 [28].

轴向运动弦线纵向线性振动研究的一个特殊方面是运动过程中能量变化的分析. 在忽略阻尼的情形, 轴向静止的振动弦线机械能守恒, 而轴向运动弦线的机械能周期性变化. Chubachi 和 Miranker[29,30] 分别研究了匀速和变速轴向运动弦线机械能变化的周期性. Miranker 的工作忽略了支承处能量的变迁, 在匀速轴向运动的情形, Wickert 和 Mote[31,32] 考虑这种变化而得到运动弦线的机械能变化与边界值的关系, 及每个模态的机械能变化, 他们的结果也可以推广到变速轴向运动的情形. Lee 和 Mote[33] 进行了更一般的分析和数值验证. Renshaw 等 [34] 对能量关系进行了更准确的阐述, 并定义了一个在振动过程中的不变量. 能量及守恒量的研究为稳定性分析及其控制系统设计提供了依据.

在式 (1) 中取 $P = P(t) = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ 可知, 轴向张力的涨落可导致小位移的轴向运动弦线出现线性参数振动. Mahalingam[7] 首先指出轴向张力存在周期性涨落时, 弦线的纵向振动可由 Mathieu 方程描述, 但没有进行研究. Mote[35] 首先研究了该问题. Naguleswaran 和 Williams[36] 用静止弦线本征函数进行 4 阶 Galerkin 展开发展了确定参数共振不稳定区的数值方法. Ulsoy 等 [37] 研究了带张紧轮的动力传输带参数振动的稳定性, 建立了考虑带与轮耦合并计及阻尼因素的数学模型, 用空间和时间的有限差分进行数值求解, 实验结果证实存在轴向力周期涨落导致参数振动不稳定. Ariaratnam 和 Asokanthan[38] 研究链驱动的动力稳定性, 将计及轴向力周期涨落的动力学方程进行 2 阶 Galerkin 截断, 然后利用接触变换解耦, 基于平均

法进行稳定性分析，得到了亚谐共振、和型组合共振、差型组合共振的稳定性条件及非共振时的响应.

轴向运动速度的变化也导致参数振动. 若弦线平移的速度 c 为时间的函数 $c(T)$, 系统的动力学方程为

$$\rho_l\left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}+\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T}\frac{\partial U}{\partial X}+2c(T)\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial X}\right)-(P-\rho_l c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}=F(X,T) \tag{8}$$

故产生参数振动. Mote[39] 首先分析了速度变化对振动稳定性的影响. Pakdemirli 等 [40] 研究了轴向速度周期变化时弦线纵向振动的稳定性，采用 Galerkin 方法将偏微分方程截断为常微分方程，然后用数值方法计算 Floquet 乘子判断稳定性，并将数值结果与含小参数时经典的解析结果 [41] 进行比较；他们的研究发现由于陀螺项的存在，偶数阶 Galerkin 截断得到较好的结果，分别进行的 2 阶、4 阶、6 阶和 8 阶截断比较，高阶截断给出较好的结果. Pakdemirli 和 Batan[42] 用同样的方法研究了轴向匀加速运动时弦线纵向振动的稳定性. Wickert[43] 得到了一般的陀螺系统在支承扰动下的近似解，并应用于匀加速轴向运动弦线. Pakdemirli 和 Ulsoy[44] 研究了轴向速度为在固定值上附加小周期性涨落情形的运动弦线的参数振动，对于主共振问题，分别用先模态离散化再多尺度展开的方法和直接对偏微分方程多尺度展开的方法得到稳定区域边界；对于组合共振问题，在模态离散化的基础上，用多尺度法分别得到和型组合共振和差型组合共振的稳定区域边界. Ozkaya 和 Pakdemirli[45] 应用 Lie 群理论解析求解轴向加速运动弦线问题. 除轴向张力涨落和轴向运动速度变化外，其它因素例如弦长的周期性变化也能产生参数振动 [46].

3　轴向运动弦线的非线性振动

1966 年 Mote[47] 首先研究了轴向运动弦线的非线性振动问题. 轴向运动弦线非线性振动研究的早期工作主要集中于说明线性振动模型的局限，并采用非线性模型修正数量关系和解释非线性现象. 近期工作主要是发展直接应用于非线性偏微分方程的近似解析方法，研究黏弹性弦线和具有耦合的较复杂问题.

轴向运动弦线的线性振动模型局限性及非线性模型的必要性由早期一系列工作所揭示. 就数量关系而言，线性振动理论得到的幅频响应等结果不适用于纵向位移较大或轴向速度较大的情形，而必须加以修正 [47~54]. 就定性现象而言，只有非线性振动理论才能解释实验中出现的跳跃现象 [54] 和空间的回旋运动 [55~57].

研究运动弦线在平面内的纵向振动. 长度 l 、横截面积为 A 、弹性模量为 E 、单位长度质量为 ρ_l 、静态轴向张力为 P_0 、以速度 $c(T)$ 运动的均匀弦线，它受纵向和横向分布力 $F_U(X,Y,T)$ 和 $F_V(X,Y,T)$ 作用，其纵向和横向位移分别为 $U(X,Y,T)$ 和 $V(X,Y,T)$, 则其动力学方程为

$$\rho_l\left(\frac{\partial^2 U}{\partial T^2}+\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T}\frac{\partial U}{\partial X}+2c\frac{\partial^2 U}{\partial T\partial X}\right)-(EA-\rho_l c^2)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+$$

$$(EA-P_0)\frac{\left(1+\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial X^2}-\dfrac{\partial U}{\partial x}\left(1+\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)\dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2}}{\left(\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(1+\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=F_U$$

$$\rho_l\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}+\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}T}\frac{\partial V}{\partial X}+2c\frac{\partial^2 V}{\partial T\partial X}\right)-(EA-\rho_l c^2)\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}+$$

$$(EA-P_0)\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}-\frac{\partial U}{\partial x}\left(1+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}}{\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(1+\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=F_V \tag{9}$$

上式中不受分布力作用且轴向运动为匀速的特例由文献 [58, 59] 给出．在这种特殊情形，若弦线以静态方式伸展 ($P_0 \ll EA$) 、弦线端点的相对运动已知、且 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 远小于 1, 式 (9) 可退化为 1 维连续体方程，其无量刚化形式为

$$M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+G\frac{\partial u}{\partial t}+Ku=\varepsilon N(u)+\varepsilon f(u,x,t) \tag{10}$$

其中 $f(u,x,t)$ 为与端点已知运动有关的量， N 表示非线性算子， ε 为小量．除纵向大位移外，非线性本构关系 [60] 和非线性作用力如干摩擦力 [61~63] 也使得非线性模型成为必需．

以往的轴向运动弦线非线性研究中， Galerkin 方法被广泛采用．通常将纵向位移按静止弦的模态函数展开，轴向运动弦线模态 [10] 的引入可得到更好的结果． Mockensturm 等 [58] 研究了边界位移产生参数激励的轴向运动弦线线性振动的稳定性和非线性振动的极限环，利用 2 阶运动弦线模态 Galerkin 截断离散化；采用平均法进行近似解析分析；在线性振动情形，分别得到了亚谐共振和组合共振的不稳定区域边界；在非线性振动情形，得到了极限环的存在性和稳定性条件；在线性参数振动亚谐共振的情形，用 1 阶运动弦线模态 Galerkin 截断可以得到 4 阶静止弦的模态截断的结果．对于若干非线性连续系统的研究表明 [64~67], 直接对偏微分方程进行近似解析分析所得到的结果优于先离散化再近似解析分析所得到的结果． Moon 和 Wickert[68] 在研究边界位移导致轴向运动弦线非线性受迫振动时，直接对描述系统运动的偏微分方程应用平均法，导出可解性条件和平均化方程，并将解析方法得到的振动幅值与轴向平移速度的关系与实验结果和基于 1 阶运动弦线模态 Galerkin 截断得到的数值结果进行比较， 3 者基本吻合．

耗散因素的建模是研究轴向运动弦线纵向振动的一个重要问题 [2]．在以往计及耗散因素的研究中，通常认为阻尼力与弦线上一点的绝对速度 $\frac{\partial U}{\partial T}+c\frac{\partial U}{\partial x}$ 或相对速度 $\frac{\partial U}{\partial T}$ 成正比．黏弹性材料的考虑为更合理地模型化工程中的运动弦线纵向振动的阻尼因素提供了新的途径． Fung 等 [69] 研究了黏弹性运动弦线在轴向力涨落扰动下的瞬态响应，弦线为满足 Boltzmann 叠加原理的积分型黏弹性材料，其松弛函数为 3 参数固体；用 Galerkin 方法导出描述系统运动的非线性微分 - 积分方程组，采用差分法求得瞬态响应的数值解并分析有关参数对运动的影响；数值结果还表明 1 阶、 2 阶、 3 阶和 4 阶 Galerkin 截断得到的响应幅值定性一致． Zhang 和 Zu[70~73] 研究了黏弹性轴向运动弦线非线性自由振动和受迫振动，弦线为微分型黏弹性材料， Kelvin 黏弹性固体；系统的动力学方程仍可以写作式 (10) 的形式，在自由振动的情形 $f(u,x,t)=0$, 而在受迫振动的情形 $f(u,x,t)=f(x,t)$; 直接对描述连续系统振动的偏微分方程进行多尺度法分析；在自由振动的情形，得到了非线性振动的频率和幅值，结果表明黏弹性的阻尼因素对频率的影响不大，而对振动的幅值有显著影响；在受迫振动的情形，得到了近共振和共振时的稳态响应，结果表明黏弹性的阻尼因素可减小稳态响应幅值．他们还研究了 Kelvin 黏弹性固体轴向运动弦线非线性参数振动的动态响应和稳定性，轴向张力的周期性涨落产生参数激励，系统的动力学方程仍可以写作式 (10) 的形式；采用多尺度法得到了和型组合共振的稳态响应及其存在条件；基于线性化稳定性分析得到了参数空间中的稳定性区域边界，并分析了系统各参数对稳定性区域的影响． Hou 和 Zu 分别研究了标准线性固体黏弹性轴向运动弦线的自由振动、标准线性固体和 Maxwell-Kelvin 模型黏弹性轴向运动弦线非线性参数振动的响应及其稳定性．

动力传输系统的非线性耦合振动是近来活跃的研究方向． Wang[74] 研究了链条驱动系统在

链轮齿作用小的稳定性，基于 2 阶 Galerkin 截断采用多尺度法确定了亚谐共振和和型组合共振的不稳定区域边界，用数值方法计算了参数共振时的响应． Beikmann 等 [75] 用模态截断和数值方法研究平带驱动系统非线性耦合振动，利用线性振动分析得到的模态函数进行模态展开而将问题离散化，取 3 阶模态把描述弦线运动的偏微分方程截断为常微分方程组，然后与描述转动的动力学方程联立用 Runge-Kutta 法进行数值仿真；研究发现一种强耦合机制，转动占优模态导致动态张力的涨落，通过 1:2 内共振激起带的大幅横向振动；这一结果也得到实验的验证. Zhang 和 Zu[76] 用多尺度法分析非线性耦合振动，他们直接用多尺度法研究连续体的振动，发现 2 阶空间解与系统的线性模态函数不同，因此该方法能得到比基于系统模态函数展开方法更准确的结果；特别是 1:1 共振的情形，两种方法存在显著差别；对于某些调谐参数，系统出现 Hopf 分岔，表明系统可能存在复杂的分岔现象． Zu 和 Zhang[77] 还用多尺度法研究了平带驱动系统的 2:1 内共振． Jia 等研究了考虑干摩擦时平带驱动系统的稳态响应.

除一些早期工作 [55~57] 外，轴向运动弦线的空间振动研究较少． Huang 等 [78] 研究了轴向运动弦线 3 维运动由于轴向力周期涨落导致参数振动的稳定性，利用 Galerkin 方法将连续系统转化为离散系统，然后用离散陀螺系统模态分析方法进行解耦，用多尺度法分别导出非共振和组合共振时不稳定条件．此外，对于匀速轴向运动弦线的纵向非线性振动也可以建立能量变化关系并定义守恒量.

4 轴向运动弦线纵向振动的控制

轴向运动弦线纵向振动的控制是多个技术领域的重要工程目标．早期的减振研究主要是通过系统设计的改进而增加有效刚度或阻尼来实现．为适应复杂、时变的条件，需要通过施加外力实现振动的主动控制． 1984 年 Ulsoy[79] 首先研究了轴向弦线振动的主动控制问题，他基于弦线动力学方程的离散化讨论了运动弦线主动控制器设计中的若干重要问题，包括轴向平移速度对控制器的影响，观测溢出和控制溢出的影响． 90 年代以来，基于分布参数模型、以频域方法为主的轴向运动弦线线性振动的控制取得进展．控制轴向运动弦线非线性振动也有一些研究工作.

可控性和可观性是控制系统分析和综合的基础．轴向运动弦线纵向线性振动由分布陀螺系统描述．在连续系统离散化的基础上， Juang 和 Balas[80], Hughes 和 Skelton[81] 分别研究了分布陀螺系统的可控性和可观性．不必首先离散化而建立分布陀螺系统在点状传感器和作动器作用下的可控性和可观性条件的工作由 Yang 和 Mote[82] 完成．他们将问题用状态空间中的无穷维系统描述．点状作动器意味在式 (6) 中分布力为 $f(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{q}\delta(x-a_k)u_k(t)$, 点状位移传感器可以测得放置点的位移 $y_j(t)=u\,|_{x=s_j}$ 或速度 $y_j(t)=\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=s_j}$．系统的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{z}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z} \tag{11}$$

其中

$$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} u\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-G & -K\\ I & 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\delta(x-a_1) & \cdots & \delta(x-a_p)\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}u_1(t)\\ \vdots\\ u_p(t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ \vdots\\ y_q(t)\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_q\end{pmatrix},\quad C_jz=\begin{cases} u|_{x=s_j} & \text{位移传感器}\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=s_j} & \text{速度传感器}\end{cases} \tag{12}$$

在此基础上可分别建立离散化得到有限维系统的可控性和可观性条件，及未经离散化的无穷维系统的弱可控性和弱可观性条件．弱可控性条件成立时，系统可由线性反馈控制律镇定．他们的工作表明，分布陀螺系统成为可控 (观) 所需要作动器 (传感器) 的数目为本征值的最大重数，作动器和传感器的放置必须不与本征函数的零点重合．在轴向运动弦线的情形，仅需要 1 个不与所有模态函数节点重合的作动器和传感器便可控制振动．

基于偏微分方程 Laplace 变换的频域分析是研究分布参数系统控制的有效方法 [83].Yang 和 Mote[84] 将频域分析方法应用于轴向运动弦线的主动控制．他们导出包括受控弦线、反馈控制律、作动器和传感器动力学的闭环系统的传递函数，通过传递函数根轨迹图的分析建立了稳定性条件和不稳定性条件；根据这些条件分析了有 1 个作动器和 1 个传感器的控制器设计中作动器和传感器的放置问题，共置作动器和传感器可以镇定所有模态的振动，避免溢出不稳定，没有时间延迟的分置作动器和传感器将导致无穷多不稳定模态，有时间延迟的分置作动器和传感器将在特定条件下可以镇定所有模态的振动；最后基于传递函数和 Laplace 逆变换得到受控弦线对周期外激励的稳态响应． Yang 和 Mote[85,86] 将这种控制方法推广到一般的柔性机械系统，并对轴向运动弦线的情形进行了实验验证．频域分析不仅可应用于轴向运动弦线的控制设计，而且可应用于振动分析． Tan 等 [87] 用频域方法研究了平动弦线与液动力学轴承耦合系统的振动，在一种液动力学轴承力模型基础上通过导出传递函数得到了系统的频率响应． Yang 和 Tan 等 [88~91] 应用传递函数分析分布参数系统尤其是受约束情形的自由振动和受迫振动，并分别讨论了受弹簧约束和在部分弹性基础上轴向运动弦线的振动．

Vaughan[92] 提出的行波消去法在航天器结构控制等方面有广泛应用 [93~97], 但这些工作中均没涉及陀螺系统．陀螺系统包括轴向运动弦线中波具有特殊性，模态是非对称的，不包含驻波形态，行波具有空间依赖的相位．行波消去法可以应用于轴向运动弦线的控制． Chung 和 Tan[98] 将频域分析与行波消去法结合而提出轴向运动弦线一种新的控制方法．所讨论的运动弦线可以受离散或分布的弹性约束并受任意激励作用，所设计的控制器由比例增益控制律、置于边界端点的作动器、弦线上的传感器和时间延迟构成，所导出闭环系统的传递函数的所有极点均与零点相消，受控系统没有共振，从而是稳定的；从波的传播角度分析，控制器使通过传感器的波在边界作动器处全部消除．在一些工程问题中，边界处无法放置作动器，而控制的目标是消除边界附近的振动，例如链条驱动系统需要减少链在齿轮咬入处的振动． Ying 和 Tan[99] 用传递函数和行波消去法研究了作动器和传感器均不在边界的轴向运动弦线控制．通过引入空间前馈的控制器可将作动器下游的行波消除而使该区域振动渐近为零，控制力起到动支承的作用将振动限制在上游区域；同时为减弱外激励的扰动，还需要引入反馈控制器；数值仿真结果表明该方法在随机激励扰动下仍有效．行波消去法的实质是通过波的吸收耗散振动能量．这一思想可发展为控制能量流动而镇定柔性结构，并已应用于非确定柔性结构的控制 [100]. Lee 和 Mote[101] 基于能量耗散的观点提出一种轴向运动弦线边界控制的方法．该边界控制的依据是在边界处反射波能量的最小化，可使振动能量的耗散最大，从而得到时间最优控制；这种控制可以通过速度反馈控制主动地实现，也可以通过设计黏性阻尼器被动地实现；用 Lyapunov 方法证明了弦线的渐近稳定性和指数稳定性，用差分法进行数值仿真验证．

一些更先进的控制机制例如自适应控制开始应用于轴向运动弦线的控制． Queiroz 等 [102] 设计一种便于实现的作动器．他们在轴向运动弦线上附加一具有质量和转动惯量的刚体，以作用在该刚体上的纵向力和转动力矩为控制输入；给出反馈控制律，用 Lyapunov 分析建立系统指数稳定时参数及控制增益满足的充分条件；在弦线速度、密度、张力及作动器质量和转动惯量不确定时，基于在线动态参数估计 [103] 建立自适应控制律，用 Lyapunov 分析给出渐近稳定的充分条件；基于 5 阶 Galerkin 截断进行了数值仿真验证．

轴向运动弦线纵向非线性振动的控制也有一些研究． Fung 和 Liao[104] 研究了计及弦线几

何非线性和张力周期性涨落时轴向运动弦线的控制．基于运动弦线 Galerkin 离散化的模型，综合独立模态空间控制 [105] 和变结构控制 [103] 给出了模态控制力所满足的控制律；数值仿真结果表明，与线性振动不同，受控模态数目小于建模模态数目时，通常不能得到理想的结果；在 5 阶 Galerkin 截断并有 5 个受控模态时数值结果表明实现了控制． Fung 和 Tseng[106] 研究了计及弦线几何非线性时轴向运动弦线的边界控制．作动器为质量 - 阻尼 - 弹簧系统，控制输入为作用在质量上的力；通过对系统总机械能的耗散，用变结构控制的思想设计了非线性反馈控制律；用差分法进行数值仿真也表明控制方法的有效性． Fung 等 [107] 对同一受控系统作进一步研究，基于对能量的分析提出新的非线性控制律，用 Lyapunov 方法证明受控系统指数稳定． Shahruz[108] 以边界端点位移为输入控制轴向运动弦线的非线性振动．建立了边界端点速度反馈控制律，用 Lyapunov 方法证明受控系统指数稳定．研究还发现，若轴向速度在适当的范围内，使一个端点自由纵向运动可以镇定弦线的非线性振动，这种现象不可能在轴向静止的弦线中出现．

5 结束语

本文总结了轴向运动弦线纵向振动及其控制的研究进展．在该领域中，我们认为下列几方面的工作值得重视：

(1) 频域方法在振动分析的应用

在控制中广泛采用的以传递函数为核心的频域方法可以应用于分析轴向运动弦线的线性振动及某些特殊的非线性振动．该方法特别适合于处理具有约束和耦合的复杂问题．目前仅是在约束问题的研究中有所应用．可以发展混杂系统的频域方法研究轴向运动弦线与其它元件的耦合振动．

(2) 非线性动力学行为的研究

在轴向运动弦线的非线性振动研究中，现有的工作主要集中于平衡和周期运动的确定及稳定性分析．分岔、混沌等非线性动力学行为很少涉及．轴向运动弦线纵向运动的混沌、分岔的理论分析、数值识别和实验验证均有大量工作尚待开展．

(3) 黏弹性弦线的研究

轴向运动弦线材料黏弹性的引入为建模能量耗散因素的有效途径．现有黏弹性运动弦线的研究主要侧重于微分型黏弹性材料，积分型黏弹性材料的研究很少．黏弹性特别是积分型黏弹性材料使轴向运动弦线的摄动分析和数值仿真更加困难，有大量问题需要研究．

(4) 与轴向运动弦线相关混杂系统的控制

诸多工程系统可以模型化为含轴向运动弦线的混杂系统．这类混杂系统控制目标的确定、控制方案的选择及作动器和传感器的采用均与问题的工程背景有关．同时，这类混杂系统的可控性和可观性尚无一般的结论，需要进行个案研究．

(5) 非线性系统的控制

计及非线性因素时轴向运动弦线控制问题的研究仍处于起步阶段，现有少量工作均是边界控制，而且没有考虑时变参数或激励的影响．轴向运动弦线的非边界控制和有时变因素时的控制有大量问题需要研究．非线性振动的模型在建立过程中通常都有不同程度的简化，因此控制方案更应该具有鲁棒性和自适应性．

参 考 文 献

1 Mote C D Jr. Dynamic stability of axially moving materials. *Shock Vib Dig,* 1972, 4(4): 2~11

2 Wickert J A, Mote C D Jr. Current research on the vibration and stability of axially-moving materials. *Shock Vib Dig,* 1988, 20(5): 3~13

3 Wang K W, Liu S P. On the noise and vibration of chain drive systems. *Shock Vib Dig,* 1991, 23(4): 8~13

4 Abrate A S. Vibration of belts and belt drives. *Mech Mach Theory,* 1992, 27(6): 645～659
5 Skutch R. Uber die Bewegung Eines Gespannten Fadens, Weigcher Gezwungun ist, Durch Zwei Feste Lpunkte, mit Einer Constanten Geschwindigkeit zu gehen, und Zwischen denselben in Transversal Schwingungen von gerlinger Amplitude Versetzi Wird. *Annalen der Physik und Chemie,* 1897, 61: 190～195
6 Sack R A. Transverse oscillations in travelling strings. *British J Appl Phys,* 1954, 2: 224～226
7 Mahalingam S. Transverse vibrations of power transmission chains. *British J Appl Phys,* 1957, 8: 145～148
8 Archibald F R, Emslie A G. The vibration of a string having a uniform motion along its length. *J Appl Mech,* 1958, 25(3): 347～348
9 Swope R D, Ames W F. Vibrations of a moving threadline. *J Franklin Ins,* 1963, 275(1): 36～55
10 Wickert J A, Mote C D Jr. Classical vibration analysis of axially moving continua. *J Appl Mech,* 1990, 57(3): 738～744
11 D'Eleuterio G M, Hughes P C. Dynamics of gyroelastic continua. *J Appl Mech,* 1984, 51(2): 415～422
12 Wickert J A, Mote C D Jr. Response and discretization methods for axially moving materials. *Appl Mech Rev,* 1991, 44(S): 279～284
13 Mote C D Jr. A study of band saw vibration. *J Franklin Inst,* 1965, 279: 430～444
14 Schajer G S. The vibration of a rotating circular strings subject to a fixed elastic restraint. *J Sound Vib,* 1984, 92(1): 11～19
15 Perkins N C, Mote C D Jr. Comments on curve veering in eigenvalue problems. *J Sound Vib,* 1986, 106(3): 451～463
16 Bhat R B, Xistris G D, Sankar T S. Dynamic behavior of a moving belt supported on an elastic foundation. *J Mech Design,* 1982, 104(1): 143～147
17 Perkins N C. Linear dynamics of a translating string on an elastic foundation. *J Vib Acoust,* 1990, 112(1): 2～7
18 Wickert J A. Response solutions for the vibration of a traveling string on an elastic foundation. *J Vib Acoust,* 1994, 116(1): 137～139
19 Zhu W D, Mote C D Jr. Propagation of boundary disturbances in an axially moving strip in contact with rigid and flexible constraints. *J Appl Mech,* 1995, 62(4): 873～879
20 Lakshmikumaran A V, Wickert J A. On the vibrating of coupled traveling string and air bearing systems. *J Vib Acoust,* 1996, 118(3): 398～405
21 Chen J S. Natural frequencies and stability of an axially traveling string in contact with a stationary load system. *J Vib Acoust,* 1997, 152(2): 152～157
22 Yang B. Eigenvalue inclusion principles for distributed gyroscopic systems. *J Appl Mech,* 1992, 59(3): 650～656
23 Wickert J A, Mote C D Jr. Linear transverse vibration of an axially moving string-particle system. *J Acoust Soc Am,* 1988, 84(3): 963～969
24 Wickert J A, Mote C D Jr. Traveling load response of an axially moving string. *J Sound Vib,* 1991, 149(2): 267～284
25 Zhu W D, Mote C D Jr. Free and forced response of an axially moving string transporting a damped linear oscillator. *J Sound Vib,* 1994, 177(5): 591～610
26 Beikmann R S, Perkins N C, Ulsoy A G. Free vibration of serpentine belt drive systems. *J Vib Acoust,* 1996, 118(3): 406～413
27 Zhang L, Zu J W. Modal analysis of serpentine belt drive systems. *J Sound Vib,* 1999, 222: 259～279
28 陈立群, Zu J W. 平带驱动系统振动分析研究进展. 力学与实践, 2001, 23(4): 8～12
29 Chubachi T. Lateral vibration of axially moving wire or belt materials. *Bull Japan Soc Mech Eng,* 1958, 1: 24～29
30 Miranker W L. The wave equation in a medium in motion. *IBM J Res Dev,* 1960, 4(1): 36～42
31 Wickert J A, Mote C D Jr. On the energetics of axially moving continua. *J Acoust Soc Am,* 1989, 85(3): 1365～1368
32 陈立群. 轴向加速运动弦线的能量变化. 自然杂志, 2001, 23(2): 123
33 Lee S Y, Mote C D Jr. A generalized treatment of the energetics of translating continua, part 1: strings and second order tensioned pipes. *J Sound Vib,* 1997, 204(5): 717～734
34 Renshaw A A, Rahn C D, Wickert J A, Mote C D Jr. Energy and conserved functional for axially moving materials. *J Vib Acoust,* 1998, 120(2): 634～636
35 Mote C D Jr. Parametric excitation of an axially moving string. *J Appl Mech,* 1968, 35(1): 171～172
36 Naguleswaran S, Williams C J H. Lateral vibration of band-saw, pulley belts and the like. *Int J Mech Sci,* 1968, 10: 239～250
37 Ulsoy A G, Whitesell J E, Hooven M D. Design of belt-tensioner systems for dynamic stability. *J Vib Acoust Stress, Reliability in Desi,* 1985, 107: 285～290
38 Ariartnam S T, Asokanthan S F. Dynamic stability of chain drives. *ASME J Mech Transmission, Auto in Design,* 1987, 109(3): 412～418
39 Mote C D Jr. Stability of systems transporting accelerating axially moving materials. *J Dyn Syst Meas Con,* 1975, 97: 96～98

40 Pakdemirli M, Ulsoy A G, Ceranoglu A. Transverse vibration of an axially accelerating string. *J Sound Vib,* 1994, 169(2): 179∼196
41 Hsu C S. On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom. *J Appl Mech,* 1963, 30: 367∼372
42 Pakdemirli M, Batan H. Dynamic stability of a constantly accelerating strip. *J Sound Vib,* 1993, 168(2): 371∼378
43 Wickert J A. Transient vibration of gyroscopic systems with unsteady superposed motion. *J Sound Vib,* 1996, 195: 797∼807
44 Pakdemirli M, Ulsoy A G. Stability analysis of an axially accelerating string. *J Sound Vib,* 1997, 203(5): 815∼832
45 Ozkaya E, Pakdenirli M. Lie group theory and analytical solutions for the axially accelerating string problem. *J Sound Vib,* 2000, 230(4): 729∼742
46 Rhodes J E. Parametric self-excitation of a belt into transverse vibration. *J Appl Mech,* 1970, 37(4): 1055∼1060
47 Mote C D. On the nonlinear oscillation of an axially moving string. *J Appl Mech,* 1966, 33: 463∼464
48 Bapat V A, Srinivasan P. Nonlinear transverse oscillations on travelling strings by the method of harmonic balance. *J Appl Mech,* 1967, 34: 775∼777
49 Bapat V A, Srinivasan P. Nonlinear transverse oscillations on travelling strings by a direct linearization method. *J Indian Ins Sci,* 1971, 53: 120∼125
50 Mote C D Jr, Thurman A L. Oscillation modes of an axially moving material. *J Appl Mech,* 1971, 38: 279∼280
51 Kim Y I, Tabarrk B. On the nonlinear vibration of travelling strings. *J Franklin Ins,* 1972, 293: 381∼399
52 Ghangrekar S G. On nonlinear oscillation of moving string. *Labdev J Sci Tech Phy Sci,* 1975, 13A: 255∼257
53 Moustafa M A, Salman F K. Dynamic properties of a moving thread line. *ASME J Eng Ind,* 1976, 98: 868∼875
54 Korde K R. On nonlinear oscillation of moving string. *J Appl Mech,* 1985, 52: 493∼494
55 Ames W F, Lee S Y, Zaiser J N. Nonlinear vibration of a travelling threadline. *Int J Nonlinear Mech,* 1968, 3: 449∼469
56 Shih L Y. Three dimensional nonlinear vibration of a travelling string. *Int J Nonlinear Mech,* 1971, 6: 427∼434
57 Shih L Y. Motion of elliptic ballooning for a travelling string. *Int J Nonlinear Mech,* 1975, 10(3/4): 183∼191
58 Mochensturm E M, Perkins N C, Ulsoy A G. Stability and limit cycles of parametrically excited, axially moving strings. *J Vib Acoust,* 1996, 116(3): 346∼351
59 Koivurova H, Salonen E M. Comments on nonlinear formulations for travelling string and beam problems. *J Sound Vib,* 1999, 225(5): 845∼856
60 Ames W F, Lee S Y, Vicario A A Jr. Longitudinal wave propagation on a travelling threadline. *Int J Nonlinear Mech,* 1970, 5(3): 413∼426
61 Majewski T. Audio signal modulation caused by self-excited vibrations of magnetic tape. *J Sound Vib,* 1986: 105(1): 17∼25
62 Cheng S P, Perkins N C. The vibration and stability of a friction-guided translating string. *J Sound Vib,* 1991, 144(2): 281∼292
63 Wickert J A. Analysis of self-excited longitudinal vibration of a moving tape. *J Sound Vib,* 1993, 160(3): 455∼463
64 Nayfeh A H, Nayfeh J F, Mook D T. On methods for continuous systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Nonlinear Dyn,* 1992, 3(1): 145∼162
65 Pakdemirli M. A comparison of two perturbation methods for vibrations of systems with quadratic and cubic nonlinearities. *Mech Res Comm,* 1994, 21(2): 203∼208
66 Pakdemirli M, Boyaci H. Comparison of direct-perturbation methods with discretization-perturbation methods for non-linear vibrations. *J Sound Vib,* 1995, 186(5): 837∼845
67 Pakdemirli M, Nayfeh S A, Nayfeh A H. Analysis of one-to-one autoparametric resonances in cables: discretization vs. direct treatment. *Nonlinear Dyn,* 1995, 8(1): 65∼83
68 Moon J, Wickert J A. Nonlinear vibration of power transmission belts. *J Sound Vib,* 1997, 200(4): 419∼431
69 Fung R F, Huang J S, Chen Y C. The transient amplitude of the viscoelastic travelling string: an integral constitutive law. *J Sound Vib,* 1997, 201(2): 153∼167
70 Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts, part 1: free vibration analysis. *J Sound Vib,* 1998, 216(1): 75∼91
71 Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts, part 2: forced vibration analysis. *J Sound Vib,* 1998, 216(1): 93∼103
72 Zhang L, Zu J W. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts, part 1: dynamic response. *J Appl Mech,* 1999, 66(2): 396∼402
73 Zhang L, Zu J W. Nonlinear vibration of parametrically excited moving belts, part 2: stability analysis. *J Appl Mech,* 1999, 66(2): 403∼409
74 Wang K W. On the stability of chain drive systems under periodic sprocket oscillations. *J Vib Acoust,* 1992, 114(1): 119∼126
75 Beikmann R S, Perkins N C, Ulsoy A G. Nonlinear coupled response of serpentine belt drive systems. *J Vib Acoust,* 1996, 118(4): 567∼574

76 Zhang L, Zu J W. One-to-one auto-parametric resonance in serpentine belt drive systems. *J Sound Vib,* 2000, 232(4): 783~806
77 Zu J W, Zhang L. Two-to-one internal resonance in serpentine belt drive systems. *Int J Nonlinear Sci Num Simu,* 2000, 1(3): 187~198
78 Huang J S, Fung R F, Lin C H. Dynamic stability of a moving string undergoing three-dimensional vibration. *Int J Mech Sci,* 1995, 37(2): 145~160
79 Ulsoy A G. Vibration control in rotating or translating elastic systems. *J Dyn Syst Measur Contr,* 1984, 106(1): 6~14
80 Juang J, Balas M. Dynamics and control of large spinning spacecraft. *J Astr Sci,* 1978, 28(1): 31~48
81 Hughes P C, Skelton R E. Stability, controllability and observability of linear matrix-second-order systems. *J Appl Mech,* 1979, 47(2): 415~420
82 Yang B, Mote C D Jr. Controllability and observability of distributed gyroscopic systems. *J Dyn Syst Measur Contr,* 1991, 113(1): 11~17
83 Butlovskiy A G. Structural Theory of Distributed Systems. New York: Wiley, 1983
84 Yang B, Mote C D Jr. Active vibration control of the axially moving string in the S domain. *J Appl Mech,* 1991, 58(1): 189~196
85 Yang B, Mote C D Jr. Frequency-domain vibration control of distributed gyroscopic system. *J Dyn Syst Measur Contr,* 1991, 113(1): 11~17
86 Yang B, Mote C D Jr. On time delay in noncolocated control of flexible mechanical systems. *J Dyn Syst Measur Contr,* 1992, 114(3): 409~415
87 Tan C A, Yang B, Mote C D Jr. On the vibration of a translating string coupled to hydrodynamic bearings. *J Vib Acoust,* 1990, 112(3): 337~345
88 Yang B, Tan C A. Transfer functions of one-dimensional distributed parameter systems. *J Appl Mech,* 1992, 59(4): 1009~1014
89 Yang B. Transfer functions of constrained/combined one-dimensional continuous dynamic systems. *J Sound Vib,* 1992, 156(1): 425~433
90 Tan C A, Chung C H. Transfer function formulation of constrained distributed parameter systems, part 1: theory. *J Appl Mech,* 1993, 60(4): 1004~1011
91 Chung C H, Tan C A. Transfer function formulation of constrained distributed parameter systems, part 2: applications. *J Appl Mech,* 1993, 60(4): 1012~1019
92 Vaughan D R. Application of distributed parameter concepts to dynamic analysis and control of bending vibrations. *J Basic Eng,* 1968: 157~166
93 Flotow A Hvon. Traveling wave control for large spacecraft structures. *J Gui Cont Dyn,* 1984, 9(1): 6~14
94 Mace B R. Active control of flexural vibrations. *J Sound Vib,* 1987, 114(2): 253~270
95 Nagem R J, Williams J H Jr. Control of a one-dimensional distributed structure based on wave propagation. *Mech Stru Mach,* 1990, 18(1): 33~57
96 Fujii H, Ohtsuka T, Murayama T. Wave-absorbing control for flexible structures with non-colocated sensors and actuators. *J Gui Cont Dyn,* 1992, 15(2): 431~439
97 Tanaka N, Kikushima Y. Active wave control of a flexible systems. *Int J Japan Soc Mech Eng C,* 1995, 35(2): 236~244
98 Chung C H, Tan C A. Active vibration control of the axially moving string by wave cancellation. *J Vib Acoust,* 1995, 117(1): 49~55
99 Ying S, Tan C A. Active vibration control of the axially moving string using space feedforward and feedback controllers. *J Vib Acoust,* 1996, 118(3): 306~312
100 MacMartin D G, Hall S R. Control of uncertain structures using and H_∞ power flow approach. *J Guid Cont Dyn,* 1991, 14(3): 521~530
101 Lee S Y, Mote C D Jr. Vibration control of an axially moving string by boundary control. *J Dyn Syst Measur Cont,* 1996, 118(1): 66~74
102 Queiroz M S, Dawson D M, Rahn C D, Zhang F. Adaptive vibration control of an axially moving string. *J Vib Acoust,* 1999, 121(1): 41~49
103 Slotine J J E, Li W. Applied Nonlinear Control. NJ: Prentice-Hall, 1991
104 Meirovitch L, Oz H. Optimal modal-space control of flexible gyroscopic system. *J Guid Cont Dyn,* 1980, 3: 218~226
105 Fung R F, Liao C C. Application if variable structure control in the nonlinear string system. *Int J Mech Sci,* 1995, 37(9): 985~993
106 Fung R F, Tseng C C. Boundary control of an axially moving string via Lyapunov method. *J Dyn Syst Measur Contr,* 1999, 121(1): 105~110
107 Fung R F, Wu J W, Wu S L. Stabilization of an axially moving string by nonlinear boundary feedback. *J Dyn Syst Measur Contr,* 1999, 121(1): 117~121

108 Shahruz S M. Boundary control of a nonlinear axially moving string. *Int J Robust Nonlinear Contr,* 2000, 10(1): 7~25

TRANSVERSE VIBRATION OF AXIALLY MOVING STRINGS AND ITS CONTROL *

Chen Liqun

Department of Mechanics at Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, China

Jean W. Zu

Department of Mechanical & Industrial Engineering, University of Toronto, Ontario, M5S 3G8 Canada

Abstract Investigations on transverse vibration of axially moving strings and its control are reviewed. Transverse vibration of axially moving strings is involved in many engineering devices such as power transmission belts, magnetic tapes, paper tapes, thread lines, band saws, and aerial cable tramways. In the context of linear models, besides a few early results, recent studies on modal analysis of moving strings, vibration of constrained and coupled moving strings, and parametric vibration of moving strings are summarized. In the context of nonlinear models, the equations of motion of moving strings with large amplitude are presented, and new progresses on discretizated and direct approximate analytical analysis, modeling of damping mechanisms as viscoelastic materials, and coupled vibration of power transmission systems are surveyed. The state-of-the-art in active control of moving strings vibration, including controllability and observability, the frequency domain analysis and the energy analysis, adaptive vibration control, and nonlinear vibration control, is discussed. Some topics for future research, such as nonlinear dynamical behavior of moving strings, vibration of moving viscoelastic strings, control of hybrid systems containing moving strings and control of nonlinear oscillations of moving strings, are suggested.

Keywords axially moving string, linear vibration, parametric vibration, nonlinear vibration, active vibration control

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (1072056)