

# 均匀化理论及其在生物力学中的应用\*

樊学军

太原工业大学应用力学研究所, 太原 030024

**提要** 在线弹性理论的范围内, 简要介绍了新近发展起来的均匀化理论 (homogenization theory), 并引入了误差分析方面的一些研究成果。由于均匀化理论可以详尽地考虑材料的微观结构, 在生命器官组织的细观力学研究中会起到推动作用。作为应用实例, 本文介绍了均匀化理论在密质骨力学性能的数值模拟中的应用。

**关键词** 均匀化理论; 生物力学; 误差分析; 密质骨; 细观力学

## 1 引言

现代研究资料表明, 生命器官组织是具有多级微结构相互嵌套的复合材料。例如: 用于传递载荷和调节关节变形的筋腱组织在不同的细观尺度下表现出规则的、具有周期分布结构的微构造 (Kastelic, et al 1978)。梁骨、关节软骨、肌肉以及血管也都表现出不同形式的微构造 (冯元桢, 1983)。传统的工程分析方法将生命器官组织看作是均匀连续介质, 因而不能得到反映组织微构造的本构关系。生命器官组织的另一特点在于它是有生命的器官, 因而表现出时间上的相关性。这一时间的相关性或由于其本身材料的流变特性引起, 或由于生化作用和外力的作用致使其微结构随时间不断调整所引起。应力对组织的生长、改变、重建和吸收起着调节作用; 反过来, 组织微结构的调节和改变又影响着自身的应力应变关系。一般来说, 微结构的调整往往持续几个月甚至几年或更长时间。显然, 完全依靠实验的手段确定其本构关系是不够的。利用细观力学的研究方法, 建立材料的宏观本构和其微结构的关系, 并预测组织的生长和改变, 被认为是一条有效的研究途径。

自80年代初期发展起来的均匀化理论 (homogenization theory) 是一套严格的数学理论, 一直是现代应用数学领域的研究课题之一。它从构成材料微结构的“胞元” (base cell) 入手, 假定胞元具有空间可重复性 (平移或转动), 通过同时引入宏观尺度和微观尺度, 从而可以详尽地考虑材料微结构的影响。均匀化理论不同于其它的一些细观力学的方法 (如 Hill (1963) 的自治理论, Gurson (1977) 的胞模型), 它不需要人为地假定胞元的边界条件, 而是采用摄动解的形式, 建立了适用于整体材料的渐近分析理论。大体来说, 均匀化

\* 国家自然科学基金资助课题。

理论是沿着三种不同的途径平行发展起来的,其中包括: Sanchez-Palencia (1980) 和 Lènè (1984) 的方法, Bensoussan, et al (1978) 和 Suquet (1982) 的渐近级数方法, 以及 Duvant (1976) 的能量法. 最近 Crolet (1990, 1993) 将均匀化理论用于密质骨的分析中, Hollister, et al (1991) 分析了松质骨的几种胞元模式, Ko, et al (1992) 和 Kohn, et al (1992, 1993) 分别将均匀化理论用于分析螺旋型移植片-骨界面和孔状涂层的移植片-骨界面的力学性质.

本文在线弹性理论的范围内, 采用虚位移原理, 首先对均匀化理论作一简单介绍. 由于这一理论的实现需要借助于有限元方法, 本文还将引入误差估计方面的一些研究成果. 最后, 作为在生物力学领域中的应用实例, 给出了均匀化理论在密质骨力学中的应用结果.

## 2 均匀化理论

考虑由不同材料或非均匀材料组成基础胞元而形成的复合材料, 其胞元具有周期分布的性质 (图 1). 设胞元的无量纲特征尺度为  $\varepsilon$  (与宏观尺度相比,  $\varepsilon$  是一个非常小的正数), 由于材料的这种高度异质和不均匀性, 物体受力时, 在体内任一宏观点的邻域内, 应力和应变的变化都非常剧烈, 常规的理论 (如有限单元法) 无法模拟材料的微结构. 为此, 我们同时引入两个尺度,  $x$  和  $y = x/\varepsilon$ , 其中  $x$  是宏观尺度,  $y$  表示微观尺度. 假定任何一个函数都可以表示成这两个尺度的函数, 记  $g = g(x, y)$ .

取出一个胞元 (图 2),  $Y$  表示其在  $R^3$  空间的开集, 定义为  $[0, y_1^0] \times [0, y_2^0] \times [0, y_3^0]$ .  $S$  为胞元内孔边界,  $\mathcal{Y}$  表示胞元的实体部分. 我们定义

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1 & y \in \mathcal{Y} \\ 0 & y \notin \mathcal{Y} \end{cases} \quad (1)$$

由于胞元的空间可重复性, 整个物体的实体部分  $\Omega^\varepsilon$  及内边界  $S^\varepsilon$  可以表示为

$$\Omega^\varepsilon = \{x \in \Omega \mid \Theta(x/\varepsilon) = 1\}, \quad S^\varepsilon = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_\alpha \quad (2)$$

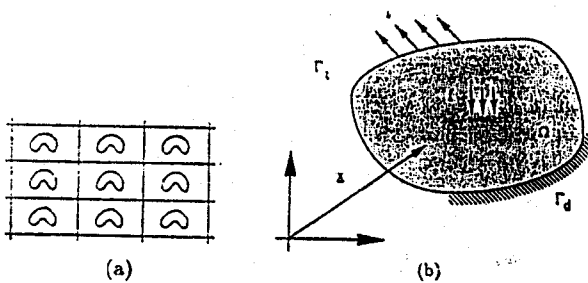


图 1 具有微结构的弹性问题

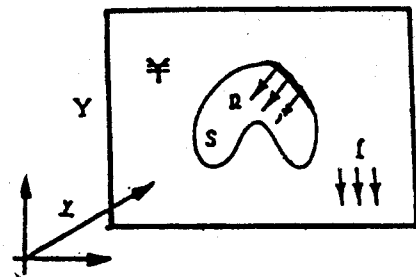


图 2 基础胞元

下面引入一些基本假设:

- ①  $\Omega^\varepsilon$  是连通域;
- ② 胞元内孔具有足够光滑的边界  $S$ ;
- ③ 胞元内孔和物体的外边界  $\Gamma$  不相交,

记  $V^\varepsilon = \{v \in (H^1(\Omega^\varepsilon))^3 \mid v|_{\Gamma_d} = 0\}$ , 其中  $\Gamma_d$  表示外固定边界,  $H^1$  是  $\mathbb{R}^3$  空间的 Hausdorff 维. 图 1 所示问题的虚功方程可以写为

求解  $u^\varepsilon \in V^\varepsilon$ , 使得

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^\varepsilon}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i v_i d\Gamma + \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \quad \forall v \in V^\varepsilon \quad (3)$$

其中

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = E_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}^\varepsilon \quad (4)$$

$$e_{kl}^\varepsilon = \frac{1}{2} (u_{k,l}^\varepsilon + u_{l,k}^\varepsilon) \quad (5)$$

$f_i^\varepsilon$  和  $t_i$  分别表示体力和外力,  $p_i^\varepsilon$  是作用在孔边界上的力. 假设  $u^\varepsilon = u(x, y)$ , 其中  $y = x/\varepsilon$ . 该式表明, 在宏观点  $x$  的邻域内, 存在着大量可由胞元平移或转动得到的微结构. 从微观尺度看,  $u^\varepsilon$  随  $y$  周期变化, 但从宏观尺度看,  $u^\varepsilon$  随  $x$  的不同而不同. Sanchez-Palencia (1980) 称其为局部周期性 (local periodicity). 将  $u^\varepsilon$  按  $\varepsilon$  渐近展开

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots, \quad y = x/\varepsilon \quad (6)$$

并代入式 (3), 令  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 可以得到

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (7)$$

$$\int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = \varepsilon \int_{S^\varepsilon} p_i^\varepsilon v_i dS \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\varepsilon} E_{ijkl}^\varepsilon \left[ \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left( \frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} \right] d\Omega \\ & = \int_{\Omega^\varepsilon} f_i^\varepsilon v_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} t_i v_i d\Gamma \end{aligned} \quad (9)$$

.....

将式 (7) 分部积分, 并注意到式中各项的周期性条件, 可以得到

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left( E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) = 0 \quad y \in \mathbb{Y} \quad (10)$$

$$E_{ijkl}^\varepsilon \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} n_j = 0 \quad S \text{ 上} \quad (11)$$

根据 Lions (1981) 定理, 由上式

$$u^0 = u^0(x) \quad (12)$$

即  $u^\varepsilon$  的第一项  $u^0$  只与宏观尺度  $x$  有关. 换句话说,  $u^0(x)$  表征了物体的宏观变形.

根据  $Y$ -周期性函数的性质 (Guedes, 1990), 任意函数  $\phi(y)$  满足

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega^\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{Y}} \phi(y) dY d\Omega \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{S^\varepsilon} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) d\Omega = \frac{1}{|Y|} \int_{\Omega} \int_S \phi(y) dS d\Omega \end{cases} \quad (13)$$

其中  $|Y|$  表示胞元的体积。因而式 (8) 可化为 (取  $v = v(y)$ )

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_S p_i v_i(y) dS \quad \forall v \in V_{\mathbb{Y}} \quad (14)$$

如果取  $v = v(x)$ , 由式 (8) 可以推出

$$\int_S p_i(x, y) dS = 0 \quad (15)$$

该式表明, 作用于胞元内孔边界上的力必须是自平衡力。

同样, 根据式 (9), 选择  $v = v(x)$ , 可以得到

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dY \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} f_i v_i dY \right) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i v_i d\Gamma \quad \forall v \in V_{\Omega \times \mathbb{Y}} \end{aligned} \quad (16)$$

按照同样的步骤, 我们可以获得方程 (6) 中高阶展开项的控制方程。如果我们只关心  $u^0$  和  $u^1$  的话, 方程 (14) 和 (16) 给出了完全的控制方程。其中  $u^0$  表示宏观变形, 与  $y$  无关;  $u^1$  表示微观变形, 并且随点  $x$  的不同而不同。将式 (14) 中  $x$  看作参量, 注意到方程关于  $\partial u_k^0 / \partial x_l$  和  $p_i$  是线性的,  $u^1$  的解可以表示为

$$u_i^1 = -\chi_i^{kl}(y) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} - \phi_i(y) + \bar{u}_i^1(x) \quad (17)$$

其中  $\bar{u}_i^1$  是关于  $y$  的常数。将式 (17) 代入 (14), 可以化为如下两个问题

(a) 求解  $\chi^{kl} \in V_{\mathbb{Y}}$ , 使得

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY \quad \forall v \in V_{\mathbb{Y}} \quad (18)$$

(b) 求解  $\phi \in V_{\mathbb{Y}}$ , 使得

$$\int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_S p_i v_i(y) dY \quad \forall v \in V_{\mathbb{Y}} \quad (19)$$

其中  $\chi^{kl}$  和  $\phi$  都满足 Y-周期性条件。将式 (17) 代入式 (16) 并引入下列记法

$$D_{ijkl}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} \left( E_{ijkl} - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \quad (20)$$

$$\tau_{ij}(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} E_{ijkl} \frac{\partial \phi_k}{\partial y_l} dY \quad (21)$$

$$b_i(x) = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} f_i dY \quad (22)$$

式 (16) 化为

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_{ijkl}(x) \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \tau_{ij}(x) \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} b_i(x) v_i(x) d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i(x) v_i(x) d\Gamma \quad \forall v \in V_{\Omega} \end{aligned} \quad (23)$$

与式 (3) 相比, 上式表征了“均匀化”后的宏观虚功方程。其中  $D_{ijkl}$  是均匀化的等效

弹性张量,  $\tau_{ij}$  是孔内作用力  $p_i$  引起的平均“残余”应力,  $b_i$  是平均体力.  $|Y|$  代表胞元的体积 (或面积).

从上面的分析可以看出, 宏观平衡问题 (23) 和微观 (胞元) 问题 (18)、(19) 互不耦合. 也就是说,  $D_{ijkl}$ 、 $\tau_{ij}$  及  $b_i$  只取决于胞元的结构, 与  $u^0$  无关. 如果整个物体具有均匀的、单一的胞元结构, 则式 (18)、(19) 只需求解一次 ( $D_{ijkl}$ 、 $\tau_{ij}$  和  $b_i$  与  $x$  无关), 然后由式 (23) 可以得到宏观问题的解.

在本节的最后, 我们做如下讨论:

①以上推导中, 要求所有的函数关于  $x$  和  $y$  都足够光滑. 在这一条件下, 可以证明  $u^0$  存在唯一解 (Necas, et al 1981).

②胞元的内孔边界和物体的外边界不相交的假定, 使得上述的推导在严格意义上成立. 如果不满足这一条件, 需要附加边界层项, 问题将很复杂 (Lions, 1981).

③ $\chi^{kl}$  关于  $k$  和  $l$  对称, 因而对三维问题, 需求解六次; 对平面问题, 只需求解三次.

④可以证明 (Duvant, 1976)

$$D_{ijkl} = D_{ijlk} = D_{jikl} = D_{klij} \\ \exists \alpha > 0: D_{ijkl} e_{ij} e_{kl} \geq \alpha e_{ij} e_{ij} \quad \forall e_{ij} = e_{ji} \quad (24)$$

⑤反映微结构的位移场可以表示为

$$u^e(x) = u^0(x) - \varepsilon \left[ \chi^{kl}(x, y) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \phi(x, y) - u^1(x) \right] + \varepsilon^2(\dots) \quad (25)$$

⑥由式 (4) 和式 (6), 任一点的应力分量  $\sigma_{ij}^e$  可以展为

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^0 + \varepsilon \sigma_{ij}^1 + \varepsilon^2(\dots) \quad (26)$$

其中

$$\sigma_{ij}^0 = E_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^0}{\partial x_k} \right) = \left[ E_{ijkl}(x, y) - E_{ijpm} \frac{\partial \chi_p^{kl}(x, y)}{\partial y_m} \right] \frac{\partial u_k^0(x)}{\partial x_l} \\ - E_{ijkl}(x, y) \frac{\partial \phi_k(x, y)}{\partial x_l}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon} \quad (27)$$

⑦定义宏观平均应力  $\sigma_{ij}^h$  为

$$\sigma_{ij}^h = D_{ijkl} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (28)$$

由式 (27) 可知

$$\sigma_{ij}^h = \frac{1}{|Y|} \int_{\mathbb{Y}} \sigma_{ij}^0 dY + \tau_{ij} \quad (29)$$

如果外力  $t_i$  和体力  $f_i$  为 0,  $\sigma_{ij}^h = \tau_{ij}$ .

⑧当胞元内不含孔, 或孔边界上的作用力  $p_i$  为 0 时,  $\phi = 0$ .

### 3 有限元分析的误差理论

一般来说, 均匀化理论的实现要借助于有限单元法. 由于在不同尺度上, 需要分别进行有限元的离散, 对最终结果的误差估计是均匀化理论的重要问题. 为了便于说明, 首先引入下列假设:

- ①区域  $\Omega$  和  $\mathcal{V}$  是多边形的;
- ②采用正则有限元离散;
- ③采用精确积分;
- ④  $V$  的近似空间为  $V^h$ , 且  $\dim V^h < \infty, V \supset V^h$ ,

$$\forall v \in V \quad \exists v^h \in V^h: \lim_{h \rightarrow 0} \|v - v^h\| = 0 \quad (30)$$

其中  $h$  表示离散单元的特征尺寸 ( $0 < h < 1$ ) 根据 Oden (1976) 的分析, 下式成立.

$$\forall v \in (H^t(\mathbb{R}^V))^3 \quad \exists v_I \in S_{t,k}^k(\mathbb{R}^V): \quad \forall -t \leq s \leq k, s \leq l$$

$$\|v - v_I\|_{s, \mathbb{R}^V} \leq Ch^\mu \|v\|_{t, \mathbb{R}^V} \quad (31)$$

其中  $C$  与  $v$  和  $h$  无关,  $v_I$  和  $s$  无关.  $S_{t,k}^k$  表示  $V^h$  空间的  $(t, k)$  族,  $\mu = \min(t-s, l-s)$ .  $t+1$  表示插值函数的次数. 范数  $\|v\|$  的定义是

$s$  为整数时

$$\|v\|_{s, \mathbb{R}^V} = \left( \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^V} |\partial^\alpha v_1|^2 + |\partial^\alpha v_2|^2 + |\partial^\alpha v_3|^2 d\Omega \right)^{1/2} \quad (32)$$

$s$  为小数时

$$\|v\|_{s, \mathbb{R}^V}^2 = \|v\|_{[s], \mathbb{R}^V}^2 + \sum_{|\alpha| = [s]} \|\partial^\alpha v\|_{\sigma, \mathbb{R}^V}^2 \quad (33)$$

$$\|v\|_{\sigma, \mathbb{R}^V}^2 = \int_{\mathbb{R}^V} \int_{\mathbb{R}^V} \frac{(v(x) - v(\xi))(v(x) - v(\xi))}{(x - \xi) \cdot (x - \xi)^{n/2 + \sigma}} dx d\xi \quad (34)$$

其中  $[s]$  是小于  $s$  的最大整数,  $\sigma = s - [s]$ , 并且

$$\partial^\alpha g = \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \partial^{\alpha_3} x_3} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (35)$$

用  $H$  表示微观 (胞元) 尺度上单元的特征尺寸,  $D_{i,j,k,l}^H$  表示近似的弹性张量, 在上述假定下, 可以得到 (Guedes, 1990)

$$|D_{i,j,k,l}^H - D_{i,j,k,l}| \leq \beta^2 \|v^{H-1} \chi^{i,j}\|_{l, \mathcal{V}} \|v^{H-1} \chi^{k,l}\|_{l, \mathcal{V}} \quad (36)$$

其中  ${}^1\chi^{i,j} = \chi^{i,j} + c_1$ , 并且  $c_1 \in \mathbb{R}^3$ ,  $c_1$  的选取使  $\|\chi^{i,j} + c_1\|_{l, \mathcal{V}}$  取极小值. 利用式 (31) ( $s=1$ ), 我们得到

$$|D_{i,j,k,l}^H - D_{i,j,k,l}| \leq CH^{2\mu} \|{}^1\chi^{i,j}\|_{l, \mathcal{V}} \|{}^1\chi^{k,l}\|_{l, \mathcal{V}} \quad (37)$$

$$\mu = \min(t-1, l-1)$$

采用类似的分析步骤, 可以得到

$$|\tau_{i,j}^H - \tau_{i,j}| \leq C_0 H^\mu \|{}^1\phi\|_{l, \mathcal{V}} \quad (38)$$

如果用  $h$  表示宏观尺度上的单元特征尺寸, 宏观变形场的近似解  $u^{o,h}$  不仅依赖于  $h$ , 而且与  $H$  有关

$$\|u^0 - u^{o,h}\|_{1, \Omega}^2 \leq A_1 Dh^{2\sigma} \|u^0\|_{n, \Omega}^2 + A_2 (C(H) \|u^0\|_{1, \Omega} + C_0(H))^2$$

$$\sigma = \min(t-1, n-1) \quad (39)$$

其中  $A_1, A_2$  为常数. 方程 (37)、(38) 和 (39) 给出了整个问题的误差估计公式. 这些结果都是假定区域是多边形和精确积分的条件下得到的. 更一般的分析可参阅 Oden (1976) 的工作.

为了检查上面的误差分析理论，考虑具有图 3(a) 所示胞元结构的悬臂梁。胞元由两种各向同性材料组成。其中材料常数由图 3 给出。该问题的解属于  $H^{0.5-\delta}(\mathbb{R}^2)$  空间，其中  $\delta$  是任意正数（这里取为 0）。采用四节点矩形等参元，因而积分可精确进行。应用式(37)， $l = 1.5$ ， $t = 2$ ，因而

$$\frac{1}{D_{ijkl}^H} - \frac{1}{D_{ijkl}} \doteq CH \quad (40)$$

宏观问题的应变能可由式 (39) 得到

$$\frac{1}{W^h} - \frac{1}{W} \doteq C_1 h^2 + C_2 H \quad (41)$$

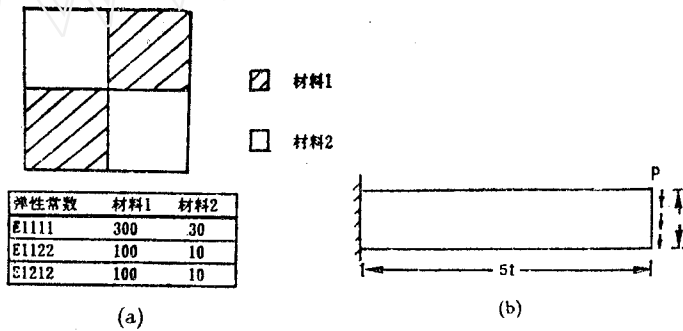


图 3 具有微结构的悬臂梁问题

上式表明， $1/D_{ijkl}^H$  和单元尺寸  $H$  成线性关系， $1/W^h$  和宏观单元尺寸  $h^2$  成线性关系。对微观问题和宏观问题，我们都分别采用  $4 \times 4$ ， $6 \times 6$ ， $8 \times 8$ ， $10 \times 10$  和  $12 \times 12$  的网格进行计算，结果由图 4 和图 5 给出。图 5 中， $d$  表示自由端的挠度。带有 \* 号的结果表示采用粗网格 ( $4 \times 4$ ) 的胞元解而获得的结果。上面结果验证了式 (40) 和式 (41) 的正确性。同时说明，“精确解”可以由网格细化的解外插而获得。从图 5 还可以看出，胞元尺度上由粗化网格得到的材料常数意味着使宏观响应刚性化。

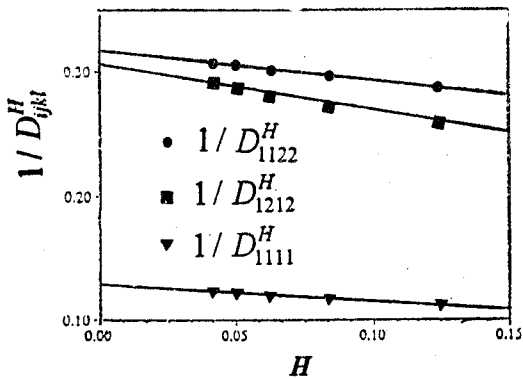


图 4 均匀化后的弹性系数和网格尺寸  $H$  的关系  
[Guedes J M, et al 1990]

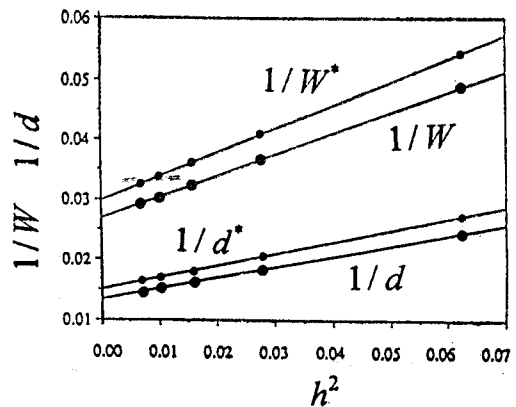


图 5 应变能  $W$  和挠度  $d$  的收敛性  
[Guedes J M, et al 1990]

#### 4 均匀化理论的应用——密质骨力学性能的数值模拟

一般认为,骨是一种多孔复合材料,其中两个参数很重要:孔洞率和矿物质含量。孔洞率可占整个体积的30%左右,矿物质含量约占干骨重量的60%—70%。关于密质骨的微结构,Smith (1960)证实了多种骨单元 (osteon) 的存在。Ascenzi (1976) 提出了三种不同的骨单元结构,Katz (1980) 描述了第四种骨单元。Park (1979) 基于密质骨构造的多重尺度性,提出了骨的四级构造模型。

第一级上(宏观尺度),骨被看作是由大量的骨单元组成。骨单元埋在填隙物系(interstitial system)中,排列紧密,而且相互平行于骨的长轴(如图6(a)所示)。骨单元的横截面是圆形或椭圆形的,直径在100—200 $\mu\text{m}$ 之间,由粘合线(cement line)包围。填隙物系可看作是由高度矿物化后的“老化”骨单元碎片组成。

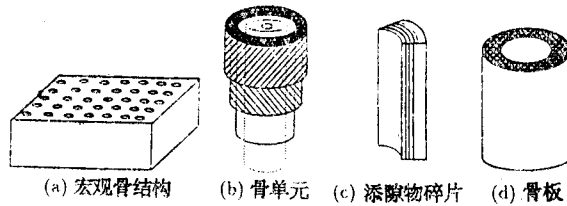


图6 密质骨的多级嵌套结构 [Park J B (1979)]

第二级对应单个的骨单元或填隙物碎片(如图6(b)和(c)所示)。骨单元呈筒状结构,它是由10—20层同心圆排列的骨板围成。骨单位的中轴有一中央管,内含毛细血管和神经。在横切面上,环绕中央管呈同心圆排列的骨板,明暗相间。

第三级对应骨板结构(osseous lamella)。胶原纤维埋在羟磷灰石晶体中。对每一层骨板而言,胶原纤维的指向相同(如图6(d)所示),但与相邻骨板内的纤维指向不同。

第四级结构对应胶原纤维和羟磷灰石晶体的分子结构。应用均匀化理论时,只用到前三级结构;从骨板结构出发,逐级均匀,最后便可得到骨的宏观力学参数。显然,对骨这种复杂的结构,常规的分析方法不足以描述和考虑其微观构造的影响。

对骨板结构,先将骨板分成若干相等的柱块,如果知道其中一块的弹性张量,其它块的

弹性张量可以通过转轴得到(如图7(a)所示)。每一柱块由一平行六面体近似代替,并假设纤维方向和某一边平行,该问题的基础胞元由图7(b)所示。所得到的均匀化的弹性张量用 $B_{ijkl}$ 表示。如果纤维的取向与棱边有某一角度 $\phi$ (图7(c)),弹性张量 $B_{ijkl}^{\phi}$ 可由 $B_{ijkl}$ 得到

$$B_{ijkl}^{\phi} = t_{il} t_{jm} t_{kz} t_{lq} B_{lmpr} \quad (42)$$

其中 $t_{ij}$ 是转动张量。

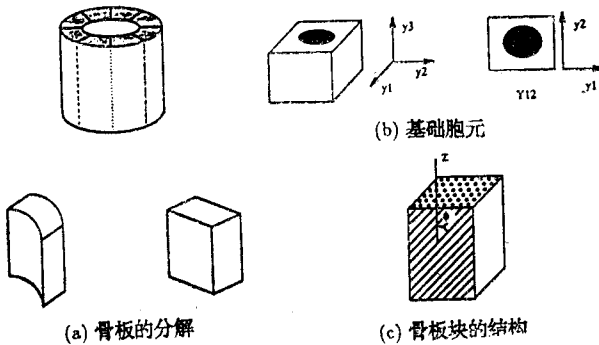


图7 骨板的均匀化 [Park J B (1979)]

经上述处理后,骨单元可看作是由多层均匀“骨板”组成的层合壳问题。假设每层具有



相同厚度，而且相邻两层的排列分别相同（图 8(a)）。基础胞元化为图 8(b) 所示的问题。

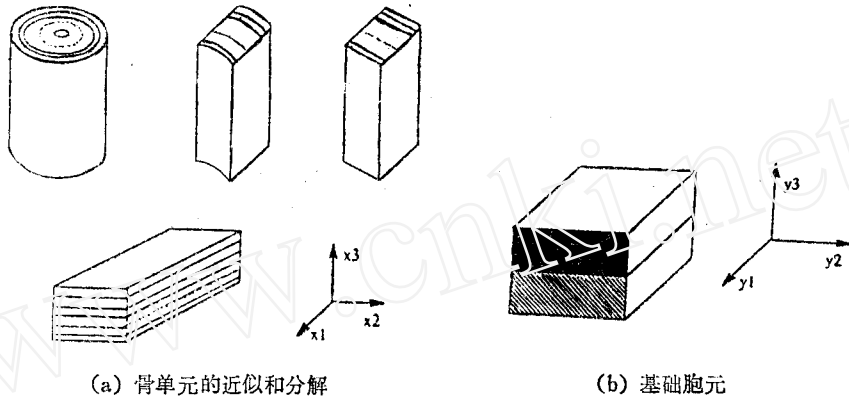


图 8 骨单元的均匀化 [Park J B 1979]

骨的宏观问题，这时就化成了含有 Haversian 管的均匀介质问题。其中基础胞元可以选择图 9 中的任意一种。根据胶原纤维的排列不同，考虑以下四种类型：

- 类型 I：胶原纤维全部横向排列；
- 类型 II：胶原纤维全部纵向排列；
- 类型 III：相邻骨板内的纤维纵横交错排列；
- 类型 IV：相邻骨板内的纤维分别沿  $45^\circ$  和  $-45^\circ$  方向排列。

为了和 Yoon 和 Katz (1976)、Ashman (1984) 以及 Meunier (1989) 的实验数据比较，Crolet (1993) 采用了下列基本数据：

密质骨的宏观结构	
骨单元	65%
添隙物	25%
孔洞	10%
矿物质含量	
骨单元	60%
添隙物	63%

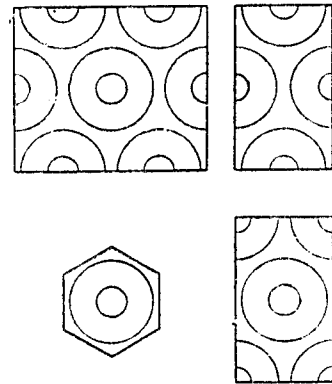


图 9 宏观结构的基础胞元 [Park J B 1979]

#### 胶原纤维的力学性质

密度  $1.33\text{g}/\text{cm}^3$

杨氏模量  $1.2\text{GPa}$

泊松比 0.35

#### 羟基磷灰石的力学性质

密度  $3.17\text{g}/\text{cm}^3$

杨氏模量  $114\text{GPa}$

泊松比 0.28

并考虑了六种骨结构：

- 结构 1：全部由 I 型骨单元组成
- 结构 2：全部由 II 型骨单元组成
- 结构 3：全部由 IV 型骨单元组成
- 结构 4：I 型和 II 型骨单元按相同比例组成

结构 5: I : II : III = 25 : 25 : 50

结构 6: I : II : III : IV = 25 : 25 : 25 : 25

数值结果如表 1 所列。结果表明, 结构 1 和 2 不能很好地描述骨的各向异性。为了检查胶原纤维的 Poisson 比对结果的影响, 表 2 列出了 Poisson 比  $\nu_c$  从 0.3 变化至 0.495 时弹性系数的变化。结果说明了胶原纤维的 Poisson 比对宏观弹性张量的影响是可以忽略的。

表 1 六种骨结构的均匀化结果的比较

	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{31}$
骨结构 1	24.2	26.8	5.46	8.3	0.26	0.19	0.21
骨结构 2	13.6	40.2	8.28	4.62	0.4	0.11	0.32
骨结构 3	19.4	28.9	8.36	7.19	0.35	0.17	0.25
骨结构 4	20.0	32.1	7.56	7.18	0.34	0.13	0.22
骨结构 5	20.8	32.5	7.63	7.15	0.36	0.13	0.21
骨结构 6	17.87	30.3	6.7	5.48	0.31	0.13	0.23
Ashman, et al. (1984)(股骨)	13.48	20.6	6.23	4.52	0.37	0.22	0.36
Meunier, et al. (1989)(股骨)	12.41	20.35	5.8	4.22	0.41	0.20	0.35
Yoon and Katz (1976)	18.8	27.4	8.71	7.17	0.31	0.193	0.28

表 2 胶原纤维的泊松比  $\nu_c$  对宏观力学参数的影响

$\nu_c$	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{31}$
0.3000	17.79	30.21	6.72	5.49	0.3014	0.1317	0.2236
0.3325	17.82	30.24	6.71	5.48	0.3047	0.1337	0.2268
0.3650	17.88	30.31	6.69	5.48	0.3093	0.1364	0.2312
0.3975	17.99	30.42	6.68	5.48	0.3162	0.1408	0.2380
0.4300	18.21	30.63	6.68	5.50	0.3281	0.1486	0.2500
0.4625	18.74	31.14	6.67	5.56	0.3551	0.1666	0.2768
0.4950	21.62	33.63	6.71	5.98	0.4879	0.2559	0.3981

## 5 结 语

均匀化理论是一套严格的数学理论, 本文只在线弹性的范围内, 对其作了简单的介绍。有关非线性的均匀化理论及非周期性结构的均匀化理论可参阅 Suquet (1982) 和 Bakhvalov 等 (1989) 的工作。对复杂的微结构, 当误差分析不可能时, 可采用自适应有限单元法提高数值精度。

通过对密质骨力学性能数值模拟的分析和介绍, 可以看出, 应用均匀化理论, 不仅可以详尽地反映生命器官组织的微结构, 而且在整个分析过程中, 只需引入一些基本的原始数据, 就可以得到实验难以确定的数据。结果是稳定的。此外, 均匀化理论还为我们提供了一种反问题的求解途径。比如, 我们可以从已知的宏观应力场去推知微结构尺度上胞元内的局部应力和变形场。如果这一点可以实现的话, 将对研究生命器官组织的生长、吸收和重建起到积极的作用。

感谢杨桂通教授对本文工作的支持。

## 参 考 文 献

- 1 Ascenzi A, Bonacci E. *J. Biomechanics*, **9** (1976) : 65—71
- 2 Ashman R B, Cowin S C, Van Buskirk W C, Rice J C. *J. Biomechanics*, **17** (1984) : 349—361
- 3 Bakhvalov B S, Panasenko G P. *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht (1989)
- 4 Bensoussan A, Lions J, Papanicolaou G. *Asymptotic Analysis for Periodic Analysis*, North-Holland, Amsterdam (1978)
- 5 Crolet J M. In Proc. 1st World Conf. of Biomech, (1990) : 156
- 6 Crolet J M, Aoubiza B, Meunier A. *J. Biomechanics*, **26**, 6 (1993) : 677—687
- 7 Duvant G. In Koiter W T (ed) . *Theoretical and Applied Mechanics*, North-Holland (1976)
- 8 冯元桢. 生物力学. 科学出版社 (1993)
- 9 Guedes J M, Kikuchi N. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engng.*, **83**(1990): 143—198
- 10 Gurson A L. *ASME J. Engng. Mater. Tech.*, **99** (1977) : 2—15
- 11 Hill R. *J. Mech. Phys. Solids*, **11** (1963) : 357—372
- 12 Hollister S J, Fyhrie D P, Jepsen K J, Goldstein S A. *J. Biomechanics*, **24**, 9 (1991) : 825—839
- 13 Kastelic J, Palley I, Baer E. *Connective Tissue Research*, **6** (1978) : 11—23
- 14 Katz J L. In Mates R E, Smith C R (eds). *Advances in Bioengineering*. ASME, New York (1976)
- 15 Ko C C, Kohn D H, Hollister S J. *J. Oral Implantology*, **18** (1992) : 220—230
- 16 Kohn D H, Ko C C, Hollister S J. *ASME Advances in Bioengineering*, BED, **22** (1992): 607—610
- 17 Kohn D H, Ko C C, Hollister S J. In Trans. 39th Orthopedic Research Society Meeting. (1993): 469
- 18 Lene F. PhD Thesis. University of Paris 6 (1984)
- 19 Lions J L. *Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*. Science Press, Beijing (1981)
- 20 Meunier A, Riot O, Christel P, Katz J L, Sedel L. *IEEE Ultrasonic Symposium*, New York (1989) : 1015—1018
- 21 Necas J, Hlavacek. *Mathematical Theory of Elastic and Elasto-plastic Bodies*. Elsevier, Amsterdam (1981)
- 22 Oden J T, Reddy J N. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*. Wiley, New York (1976)
- 23 Park J B. *Biomaterials: An Introduction*. Plenum, New York (1979)
- 24 Sanchez-Palencia E. *Lecture Notes in Physics*, **127** (1880)
- 25 Smith J W. *J. Bone Jt. Surg.*, **42B** (1960) : 588
- 26 Suquet P. PhD Thesis. University of Paris 6 (1982)
- 27 Yoon H S, Katz J L. *J. Biomechanics*, **9** (1976) : 459

## HOMOGENIZATION THEORY AND ITS APPLICATIONS IN BIOMECHANICS

Fan Xuejun

Institute of Applied Mechanics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024

**Abstract** In this paper, the recently developed homogenization theory is introduced, within the framework of elasticity. The corresponding error estimate analysis is also presented here. It can be seen that the homogenization method provides a systematic way to combine stress analyses at the macro-and micro structure levels in the field of biomechanics. As a practical example, the numerical simulation of mechanical characteristics for compact bone by homogenization method is introduced.

**Keywords** *Homogenization theory; biomechanics; error estimate; compact bone; mesomechanics*