第24卷 第2期　　力 学 进 展　　Vol. 25 No. 2
1994年5月25日　　ADVANCES IN MECHANICS　　May 25, 1994

柔性多体系统动力学研究及存在的问题*

覃 正 叶尚辉 刘明治
西安电子科技大学（邮政编码710071）

提要 本文对柔性多体系统动力学研究领域中动力学模型的建立、求解以及该领域中存在的问题进行了简要综述.

关键词 柔性多体系统动力学；刚性方程；数值方法

1 引 言

柔性多体系统动力学是一门新兴的交叉性学科. 作为空间柔性机构动力学分析的依据，它考虑了系统中物体或铰点弹性变形带来的影响. 它的相应理论与计算方法，是刚体力学、分析力学、弹性振动、结构动力学及计算数学相结合的产物. 现代数字电子计算机的发展，使该领域中许多复杂的、以前难以实现的数值仿真得到了成功的实现和发展. 因此，柔性多体系统动力学同时还是和现代计算机技术密切结合的产物.

机械系统中，部件和铰点的弹性效应首先在航天器和高速机构领域里引起广泛关注.

航天器部件的弹性变形会导致严重后果. 1958年美国发射第一颗人造卫星EXPLORE-I时，由于对卫星4根天线的弹性变形按刚性考虑，导致了卫星失控. 此后随着航天技术的发展，直接影响航天器姿态稳定与控制精度的弹性效应成为航天器设计中必须考虑的基本因素之一.

高速运转机构[1]，例如按照运动学综合方法设计的高速印刷机抓取机构，在实际运转速度超过设计速度的一半时，抓取动作便失灵了. 构件的弹性变形对高速机械手动作的精度和稳定性影响很大. 随着其他许多机构主动件速度增大，激振力（一般惯性力是激振力的主要组成部分）的频率提高，系统的固有频率随构件柔度加大而下降. 激振力频率与固有频率的接近增大了振动的振幅和发生谐振的危险. 在弹性连杆机构中存在着一种“低阶谐振现象”，即机构在其激振力频率低于其第一阶固有频率（基频）的一系列转速下都可能发生谐振现象.

由于有了上述工程背景，在动力学模型建立时便提出了考虑弹性效应的要求. 柔性多体系统动力学应运而生.

---

* 国家自然科学基金资助项目.

随着航空航天技术及现代机器人等技术的迅猛发展，客观上考虑挠性部件的更广义的多体动力学研究已成为迫切需要。电子计算机这一强有力的工具使解决这一领域问题的理论和方法的研究有了可能。近年来各国学者在这一领域竞相探索，有关学术论文不断发表[1-26]。柔性多体系统的研究已成为当前国内外多体系统研究中最主要的方向，它几乎囊括了宏观世界机械运动的全部主要问题[25]。

2 发展概况

继1977年在慕尼黑由IUTAM（国际理论与应用力学联合会）主持举行第一次“国际多体系统动力学讨论会”（中国无代表参加）之后，1985年9月在意大利的Udine又一次举行了由IUTAM和IFTOMM（国际机器与机构理论联合会）主持的“国际多体系统动力学讨论会”，参加这次会议的共有21个国家的50多名代表，中国也有代表参加，会上共宣读论文26篇。近10余年来，我国力学工作者对国外学者的大量研究成果给予了极大的关注。1986年北京召开全国多刚体动力学研讨会后，1988年全国柔性多体系统动力学研讨会在长春召开，会上邀请了6位学者作专题报告。1992年11月中国力学学会一般力学专业委员会又召开了全国多体动力学——理论、计算方法与应用学术会议。

实际上考虑构件弹性影响的研究最早可追溯到30年代[2]，但直到60年代广泛利用电子计算机后才真正发展起来。世界各国学者对柔性多体系统从不同角度进行了大量研究。建模方法和数值仿真研究是柔性多体系统动力学分析的核心，Modi[3]将1974年以前关于带柔性附件的航天器姿态动力学与控制的研究成果进行了较全面的总结，Lowen et al[4]，Thompson et al[5]将1986年以前关于连杆柔性对高速机构动力学响应的影响作了较全面的评述。1991年Huston[42]评述了近年来多体动力学模拟和分析方面的最新进展。特别值得提出的是Boland，Samin等人[6-8]完成了由刚性系统动力学到柔性系统动力学的转化和拓展。Shabana，Yoo和Haug[9]等人建立了柔性系统的动态子结构法。近10年来，多体系统动力学理论上最大的发展就是由刚性多体系统拓广到柔性多体系统。

早期的研究有3个缺点：①研究工作较零碎，未成系统。这方面的文献常被归入动力状态分析、振动、时间响应等不同领域。②由于计入弹性带来的复杂性，早期研究者仅把部分构件看作柔体，而且仅考虑构件的一种变形型式。在方程建立过程中常常引入很多假设，从而使动力学模型与真实情况差距较大。③算法研究较少。基本还停留在非Stiff性（这里的Stiff性指数学模型中各种变量变化范围相差很大时表现出来的性质）方程的求解阶段。

近期研究主要在以下4个方面：①柔性多体系统动力学方程的建立与简化，编制相应的软件系统，以便输入少量描述系统特征的数据由计算机自动建立系统运动学与动力学方程。②建立有效的数值计算方法，分析弹性变形对静态偏差、稳定性、动态响应的影响，通过仿真由计算机自动产生系统的动力学响应。③选择合理的结构、参数或控制规律，在某种程度上消除弹性变形带来的不利影响或者利用弹性变形的影响，使其产生积极的效果。④将仿真结果通过计算机终端以方便直观的形式表达出来。

目前人们关心的大致有下列大小不等，解决的完善程度不同的问题[25]：简明的分析方法（运动量的表述方式、动力学控制方程的建立与简化等）；动参考系的选择及其比较；柔性约束的分析和处理；间隙、碰撞、伸展（收缩）问题；几何非线性和材料非线性问题；模态分析与综合；Stiff方程的数值方法；近似方法（摄动方法等）；灵敏度分析；系统识

别；逆问题：结构控制、系统控制以及稳定性；柔性、晃动、姿态、轨道等多耦合问题；与场（温度、电磁场等）的耦合；动力学模型的误差估计；大型通用程序系统.

3 大型空间结构与控制的工程应用研究

在航空航天领域，现代航天器朝着大规模的方向发展，其结构越来越复杂．70年代后期国外许多学者针对未来大型航天器的发展趋势，开始转入大型空间结构动力学与控制方面的理论研究工作[27]，包括形状控制和振动抑制．其应用对象是大型空间平台、大型载人空间站、空间发电站和空间基地等．由于大型航天器带有多个大型分布质量部件，像多翼大面积太阳阵．大型杆件和天线阵等．对这类结构的设计要求，不单单是限制构件质心与航天器质心的位置，更重要的是还要保持分布的几何构形关系．由于大的结构柔性问题，控制与结构在动力学上会产生相互作用，降低航天器指向精度和稳定性，甚至导致失稳和破坏.

例如，和平号空间站通过其核心站 6 个对接口，与联盟号飞船，进步号货船和量子号等数个实验舱在空间对接组装成大型空间轨道复合体，大型柔性太阳阵多达11个．其核心站太阳阵展开后横向幅宽达29.7米，高10.5米．联盟号飞船 2 个太阳阵展开后横宽为10.6米，量子号试验舱 2 个大型太阳阵展开后横宽达27.35米．对于这样巨大的空间结构，其柔性效应极其复杂．图 1 给出了分别按刚性多体动力学建模和按柔性多体动力学建模时一个太阳阵的动力学响应．图中F(Flexible)和R(Rigid)分别表示柔性和刚性体模型的响应．由图中可以看出柔性效应的影响．其主要原因是杆件弹性变形带来了误差．通过校正控制系统，才能保证系统的重复精度和稳定性．大型太阳阵或空间展开机构的结构柔性（其中包括多体展开运动及展开锁定、多体撞击等）是大型航天器动力学特性极其复杂的重要原因.

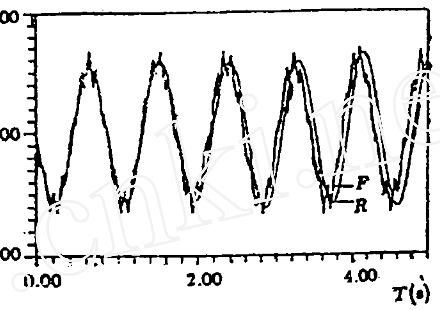

图 1

目前大型空间结构与控制的工程应用研究，在工程设计上大都采用 Likins, Hughes, Meirovitch, Williams, Skelton, Balas 等人发展的动力学与控制方法[28]．这类方法的特点是，在建模过程中分析结构柔性对星体动力学特性的影响时把柔性航天器视为中心刚体加柔性附件，如图 2 所示．这种物理模型和模化方法对现今正在发展的大型空间结构与控制的工程应用研究以及各类资源卫星、海洋卫星、通信卫星、探测卫星、空间站等带有大型柔性附件的航天器的柔性动力学分析和控制器设计是非常适用和成功的．国外的新近发展有：加拿大哥伦比亚大学工程力学系教授 Modi 发表的"关于增长式自由号空间站系统模态和动力学方法"[29]的论文，采用Lagrange方法建立了大型柔性航天器多体动力学通用模型，多体动力学运动微分方程的推导采用了计算机符号演算法．其物理模型是把自由号主梁骨架作为中心体，其他构件作为柔性附件，且相对中心体有平动和转动，而中心体

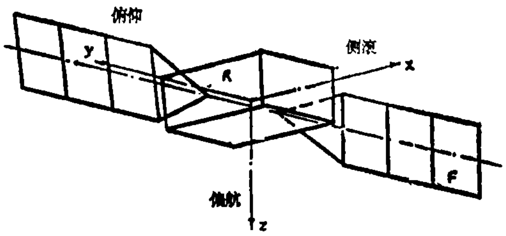

图 2

也视为柔性体，模态数据可以是部件模态或系统模态．经过模态综合赋予柔性多体动力学模型．系统软件由结构动力学模块、柔性多体动力学模块和系统控制模块3部分组成，该软件可适用于任意树状柔性多体系统动力学分析仿真．美国Howard大学Ericsson等发表的“自由-自由轨道平台最优LQR数字控制”[30]的论文，给出了大柔性航天器控制器设计的数学模型、结构模态频率和振型、状态空间方程、线性二次调节器（LQR）技术、采样周期理论、对离散时间域的LQR公式、最小性能指标评估等，并通过数字仿真评价了LQR技术以及对作动器位置、补偿矩阵和采样周期进行了比较．印度的“关于太阳电推进航天器（SEPS）一类卫星的最优数字伺服控制器”[32]以及日本的“关于数控采样周期对柔性结构振动抑制溢出的影响”[31]等也都对大型空间结构与控制的工程应用作了比较有效的工作，这里不再详细列举．

4 柔性多体系统动力学方程建立的方法及关键问题

柔性多体系统动力学方程的建立主要有3类方法：①牛顿-欧拉方法．在推导动力学方程时直接应用动量定理和动量矩定理列出隔离的单个物体的动力学方程，方程中包含有理想约束力（矩），然后以约束条件（完整约束）为依据消去约束力（矩）．这种方法对于半柔性系统，特别是当系统中有一个刚性主体的情况比较合适．但它只适用在简单链系统的情况，比较典型的是Hooker和Singhs[33,34]的推导．②虚位移方法．从虚位移或虚速度原理出发，演变出拉格朗日第一类方程或进一步根据变分原理建立拉格朗日第二类方程的形式．这是现在普遍应用并经实践证明比较有效的方法．③牛顿-欧拉方法和虚位移方法的各种变形方法．这些变形方法中大部分是虚位移方法的变形方法．如Kane，Huston，Roberson-Wittenburg，Shabana等的方法．目前比较有工程价值的是针对某类具体问题提出的变形方法．

另外，值得提出的是计算机符号建模，即用计算机建立符号数学模型的方法．采用符号运算建立柔性多体系统动力学方程，可以大大缩短动力学仿真的CPU时间．利用数字计算机对动力学方程进行符号推导实质上是利用计算机各种语言的字符串功能，进行字符串运算．

1976年Kane的学生Levinson[35]首次进行了将符号演算应用于多刚体系统动力学方程推导的尝试．他编写了以Kane方程为基础的FORMAC程序，推导了一个二体卫星的动力学方程．近年来，西德的Wittenburg和Wolz[36]用Pascal语言编制了应用于机械、车辆、航天器等多体系统的符号公式推导程序MESAVERDE．美国的Kane和Nielan[37]编制了用符号处理软件MACSYMA和Kane方法相结合来自动生成高效的多体系统符号公式的计算机符号处理软件，效率、快速及精确性是他们强调的重点．Rosentha，Sherman(1986)，Neilan，Kane(1986)，Faessler(1986)，Schielen(1990)等也在这方面进行了研究．最近几年，美国机械工程师协会（ASME）的冬季学术年会也几次将符号演算列为主题．其中包括1990年度的“符号演算及其对力学的冲击”(Symbolic Computation and Its Impact on Mechanics)．

关于计算机符号建模，国外已经开发了一些大型符号计算的专用程序，例如MACSYMA，REDUCE，SMP等．有的我国已经引进．利用这些语言的功能函数，可以方便地对方程进行符号推导．但这些专用程序所占内存较大，一般不能在微机上使用．国

内已有学者考虑到我国微机相当普遍的国情，在微机上移植和开发这类软件方面做了工作[38]。

建立柔性多体系统动力学方程主要有3个关键问题：①动坐标系的选择．当系统中的物体作为刚性物体考虑时，我们一般选择物体的质心建立动坐标系，称为刚体的连体系．当物体被考虑成弹性体时，则没有一个固定不变形的物体存在，柔体内各点的相互位置均在改变．显然质心的相对位置不能像刚体中那样加以利用（消除动力学方程中的加速度级耦合项）．为把复杂的柔性体运动进行分解，我们只能选取一个任意时刻不但随变形体作空间大位移运动，而且还要随变形体的变形作运动的坐标系作为动坐标系．选择的原则是，一方面使最终的动力学方程尽量消除耦合项，另一方面使物体的变形尽可能处理为线性变形．②弹性变形模态的选择．尽管适当选择变形体的动坐标系以后柔性多体系统动力学方程的形式有所简化，但弹性变形模态坐标的引入还是大大增加了方程的自由度数．从满足工程实际应用来看，还必须选择好弹性变形描述中模态的适当阶次．选择的原则是用尽可能少的N项模态表达式来尽可能真实地反映实际运动．③约束问题．实际上就是怎样处理好约束条件的问题．完整、非完整约束，各种不同类型铰接约束性态的多样化，尤其是弹-弹耦合约束等．

5 柔性多体系统动力学方程的求解

柔性多体系统动力学的本质决定了其控制方程最终一定表现为Stiff(刚性）方程．无论通过什么途径建立方程，这个结果都是无法回避的．关于Stiff方程的数值求解是目前柔性多体系统动力学中公认的难题之一．

建立柔性多体系统动力学方程时，考虑系统中慢变的大位移与相对快变的弹性变形之间的相互耦合将使柔性多体系统动力学方程表现出微分方程组中解的分量中，变化快者很快地趋于它的稳定值，而变化慢的分量则缓慢地趋于它的稳定值．这种性质即所谓Stiff性质．由于在柔性多体系统动力学中建立起来的数学模型的上述特点，其各种变量变化范围相差很大，Stiff问题突出，为此许多力学工作者在数值计算方面做了大量的研究工作．另一方面，Stiff方程的数值求解也引起了计算数学工作者的重视．人们从理论上探讨这类问题的实质，并从各个角度寻求适用的数值解法．但非线性问题的数值稳定性的研究还刚刚开始，在解决各种实际问题特别是复杂大系统问题时，需要有更适用的算法．

针对Stiff微分方程组的数值求解，已经建立了数值稳定性和稳定区域的概念，并且发表了大量数值解法的论文，如Dahlquist，Butcher，Gear[10]等的论文．据文献报道，近年来Stiff问题的理论工作进展不大．Stiff性质从计算数学的角度讲是数学问题本身的性质，它不依赖于求解这个问题的数值方法．正是这个性质使得传统的常微分方程的数值积分方法遇到极大的困难，同时也使得Stiff微分方程数值积分方法的研究成为数值方法中最活跃的研究方向之一．从一定意义上讲，柔性多体系统动力学不但有其独特的理论问题需要进一步深入研究，而且其进展和工程中的实际应用也取决于Stiff方程的数值解决研究工作的进展．

Stiff方程目前主要有两大类解法，即频域法和时域法．

频域法是一种传统解法．当系统阻尼满足一定条件或阻尼较小可做振型阻尼处理时，频域法是十分有效的方法．后来又扩展到复数空间的频域法，用来处理一般粘性阻尼系统，但要涉及求解复特征值问题，计算量较大．由于频域法使方程组解耦的正交条件随着模型方程

的复杂化愈来愈不易满足，这种方法在应用上受到了极大限制。特别是对柔性多体系统动力学方程组，该方法本身已无能为力。而时域法不受此限制，所以得到了较快的发展。为避免建立起来的非1阶力学模型降阶后再求解（n阶微分方程组变换为1阶微分方程组付出的代价是将原来方程组中方程的个数增加$n-1$倍），直接处理高阶方程的方法成为工程上人们十分关注并积极研究的方法。

1950年，Houbolt[39]首先提出了基于Lagrange插值公式的步进方法。该方法利用向后差分，由位移导出速度与加速度的多步隐式公式，Houbolt方法得到的计算结果比较光滑。它的一个突出优点是：如果忽略质量和阻尼的影响，那么这种系统动力响应分析法就约化为一种结构静力分析法。1959年，Newmark[11]给出了在速度、位移的近似关系中引入两个参数γ_N，β_N的多步隐式方法。当引入的参数$\gamma_N\geqslant 1/2$，$\beta\geqslant(1/2)\gamma_N$时为无条件稳定，其中梯形法则（$\gamma_N=1/2$，$\beta_N=1/4$）的精度误差最小。在这个方法中Newmark提出了用加速度的计算值与假设值之比来判别算法的稳定性，这是谱半径的早期提法。1968年，Wilson[40]提出了引进一族积分参数θ的单步隐式方法，这实际上是线性加速度近似的外推，是对线性加速度算法的一种修正。Wilson采用逼近算子的谱半径$\rho(A)\leqslant 1$作为算法稳定性的判据，证明了当取$\theta\geqslant 1.37$时，该方法能够达到无条件稳定并给出了一种判断算法稳定性的简单而实用的方法。这种方法在以后证明稳定性问题时被推广成一种较为普遍的方法。1977年，Zienkiewicz[41]提出了一类基于广义加权残值方法的多步时域方法（类似的算法亦可用广义哈密顿原理推出）。这个算法的贡献主要在于该多步方法包容了许多现存的线性算法。如Newmark算法、Houbolt算法、Wilson-θ算法等。由于Zienkiewicz算法的一般性，因而可以对精度及稳定性问题进行统一的研究，对以前的和新的方法进行比较和对照。尤其是它所包容的算法都是直接处理高阶（这里指2阶）方程的无条件稳定的方法，因此可以用来求解Stiff微分方程组。后来，Hibler[12]等对线性隐式算法作了系统研究。从工程应用的角度看，在刚性比不很大、对稳定域要求不很高的情况下与线性显式单步方法相比较，Zienkiewicz算法的主要缺点是：①该算法为多步法，当前步依赖于前k步的信息，算法进入运算时不能自动开始，需要初始处理。不能自动开始的算法至少需要二步初始处理，因此增加了额外的贮存。②不同的开始过程将导致不同的开始规则和计算效果，该算法不可能提供统一的开始值。③步长改变的点上需要作初始计算，大大增加了算法的复杂性和存贮空间。在分析中，变步长在实用上不可能。④不易向非线性问题推广应用。1980年，Grown[13]提出了两种新的PEC算法，在一定程度上缩短了运算时间并应用于结构动态分析。1989年，Cardona和Geradin[14]将运动方程映射到方程所考虑的某些项的正切空间完成积分，并给出了具体算例。国内虽然起步晚得多，但1980年以来不断有一些算法发表。如1980年，任曾勋[15]提出了一种工程解法，通过引入补充未知量构成双直交基来满足求解条件。1981年，孙焕纯[16]提出了一个改进的θ法，假定加速度在时间步长内是时间的二次函数。算法为二级近似加速度一步法。同年蔡承文[17]证明了当$\theta\leqslant 0.9003$时，Wilson-θ法亦无条件稳定并得出了一组较合理的参数选择。1984年，张策等[18]依据Bagci和Kalaycioglu的思想给出了状态空间法求稳态解的闭式算法。1989年，谢闽生[19]提出了一个对非古典阻尼为无条件稳定的线性多步法，该算法基于Wilson-θ法对平均加速度法做了又一修正。1990年，凌复华等[20]根据徐次达的固体力学加权残值提出了样条-加权残值公式。1990年，覃正、叶尚辉、

刘明治[21]提出了一个非线性逼近的高精度单步显式法，其精度超过了 Newmark 法和 Wilson-θ 法。利用该方法对方程作低阶扰动的思想又发展了单步隐式法和不降阶数值求解复杂大系统 Stiff 常微分方程组的组合算法。

以上所列举的方法均是不降阶直接处理 2 阶微分方程组的时域方法。但是到目前为止，还没有算足够的算例来评价各种算法的优劣。实际科研的仿真计算中，通常大家所使用的方法也不尽相同。如袁兆鼎等[22]介绍了10余种一般求解Stiff方程的方法，Enright et al[23]精选了25个题目对不同类型算法的费用和可靠性进行测算，Huston[24]认为4阶Runge-Kutta方法是最好的方法。Yoo et al[26]用预估校正法，国内不少学者用 Newmark 法、Wison-θ 法、Gear 法、组合法等。从辩证的观点来看，每种方法都有其局限性。其应用成功与否还与所建立动力学模型的形式，变形体的离散方法与步长的选择等有很大关系。

6 柔性多体系统动力学研究领域中存在的问题

主要问题有如下几个方面：①研究领域中所用名称比较混乱，给研究同行之间的交流带来了一定的困难。这主要是由于各种研究方法所取划分准则不统一。②动力学方程的建立及求解都还很不成熟。a）动力学方程的建立大都围绕平面问题进行推导，空间建模还很有限；b）动力学方程的建模对刚-弹耦合考虑的较多，而对弹-弹耦合、刚-弹-控耦合、铰链、间隙、碰撞等的分析较少，对刚-弹耦合中的几何非线性和材料非线性问题分析较少；c）对方程的近似处理与反映情况真实程度的度量，还缺少有效的理论和方法；d）有效、稳定算法的建立、发展。③计算机仿真程序的编制。计算机程序的编制缺乏规划、交流。尤其我国受计算机条件及研究条件的限制，许多工作在微机上进行。这对程序质量、计算结果的精度及扩大程序功能等都带来了一定的困难。④理论研究与实际应用的差距较大。国内外学者在柔性系统理论研究方面做了大量工作，但真正应用于工程实际的实例非常有限。这说明在这方面还有许多工作要做，还有不少难题需要攻克。⑤缺少必要的实验。这是目前柔性多体系统研究的薄弱环节。一方面由于受到实验条件的限制，另一方面也由于实验的复杂，有时实验要耗费较多的资金。所以从掌握实验依据的角度来看，这方面的研究还远不能满足人们的要求。

8 结束语

近年来，柔性多体系统动力学的研究愈来愈深入。我国这方面的研究近五六年介入国际领域，在国内外杂志和会议上发表了一定数量的文章。最近，国内还邀请了在国外多体系统动力学研究方面比较有影响的学者到中国来讲学（如1993年 6 月，美国 Illinois 大学工程力学系教授 Shabana 应邀到吉林工业大学讲学）。可以预计，这门交叉性学科将随着现代科学技术其它领域的发展而得到迅速发展。

参 考 文 献

1 Erdman A G, Sandor G N. Kineto-elastodynamics— a review of the state-of-the-art and trends. *Mechanism and Machine Theory*, 7 (1972) : 19-33

2 Lowen G G, Jandrasits W G. Survey of investigations into the dynamic behavior of mechanisms containing links with distributed mass and elasticity. *ibid*, 7 (1972) : 3—17

3 Modi V J. Atitude dynamics of satellites with flexible appendages— a brief review. *J.Spacecraft & Rocket*, 11, 11 (1974) : 743—751

4 Lowen G G, Chassapis C C. The elastic behaviour of linkages: An updated. *Meckanism & Machine*

Theory, **21** (1986) : 33—42
5 Thompson B S, Sung C K. A survey of finite element techniques for mechanism design. *ibid*, **21**, 4 (1986) : 351—359
6 Lilor L K. Dynamics of elastic multibody system involving closed loops. IUTM/IFTOMM (1985)
7 Boland P, Samin J G. Stability analysis of interconnected deformable bodies with closed-loop configuration. *AIAA J.* **13** (1975) : 864—867
8 Ho T Y. Direct path method for flexible multibody spacecraft dynamics. *Spacecraft & Robots*, **14** (1977) : 102—110
9 Yoo W S, Hang E J. Dynamics of flexible mechanical systems using vibration and static corrected modes. *J. Mech.*, **108** (1986) : 315—322
10 吉尔. 常微分方程初值问题的数值解法. 科学出版社 (1978)
11 Newmark N M. A method of computation for structural dynamics. *ASCE, J. Engng. Mech. Division*, **85** (1959): 64—94
12 Hibler H M, Hughes T J R, Taylor R L. Improved numerical rissipation for time integration algorithem in structural dynamics. *Earthq. Engng. Struct. Dyn.*, **5** (1977) 283—292
13 Grown J C. A new PEC Algorithem for the numerical solution of ordinary differential equations. *Appl. Math. Comput.*, **6** (1980): 189—209
14 Cardona A, Geradin M. Time integration of the equations of motion. *Computers & Structures*, **6**, 3 (1989)
15 任曾勋. 弹性结构的动力响应——关于二次特征值问题和弹性结构动力响应问题的工程解法. 三零二设计研究所 (1980)
16 孙焕纯. 非线性结构动力分析的改进的 θ 法. 大连工学院工程力学研究所, 2 (1981)
17 蔡承文. 振动方程直接积分的一个带耗散算法. 上海力学, 1 (1981)
18 张策等. 用状态空间法求机构运动微分方程组的稳态解. 河北矿冶学院 (1987)
19 谢圃生. 直接计算结构动力方程的 α 法. 华侨大学土木系, **6**, 3 (1989)
20 凌复华等. 常微分方程数值方法及其在力学中的应用. 重庆大学出版社 (1990)
21 Qin Zheng, Ye Shang-hui, Liu Ming-zhi. A new numerical method for dynamics equation. Int. Conf. on EPMES-IV, Dalian, P. R. China, 30 July to 2 August (1992)
22 袁兆鼎等. 刚性常微分方程初值问题的数值解法. 科学出版社 (1987)
23 Enright W H, Hull T E, Lindberg B. Comparing numerical methods for stiff systems of O. D. E. s. *BIT*, **15** (1975) : 10—48
24 Huston R L. Computer methods in flexible multibody dynamics. *Int. J. Numer. Meth. in Engng*, **32** (1991) : 1657—1668
25 陆佑方. 多柔体系统动力学(上册). 吉林工业大学力学系 (1988)
26 Yoo W S, Haug E J. Dynamics of articulated structure, Part II, Computer implementation and applications. *J. Struct. Mech.*, **14**, 2 (1986) 177—189
27 Ho J Y L, Herber D R. Development of dynamics and control simulation of large flexible space systems. AIAA Guidance and Control Conference, California (1982) : 82—1564
28 Skelton R E, et al. Order reduction for models of space structures using modal cost analysis. *J. Guidance, Control and Dynamics*, **5**, 4 (1982)
29 Modi V J, et al. An approach to system modes and dynamics of the evolving space staion freedom. LAF paper (1990) : 90—319
30 Ericsson A J, et al. The optimal LQR digital control of a Free-Free orbiting platform. LAF paper (1990) : 90—318
31 Kobayashi S, et al. The influence of sampling period in digital control on the spillover in vibration suppression of flexible structures. LAF paper (1990) : 90—291
32 Sreenatha A G, et al. Optimal digital servo-controller for SEPS class of satellites. LAF paper (1990) : 90—325
33 Hooker W W. Equations of motion for interconnected rigid and elastic bodies: A derivation independent of angular momentum. *Celestial Mechanics*, **11** (1975) : 337—359
34 Singh R P, Vander Voort R J, Likins P W. Dynamics of flexible bodies in tree-topology— a computer-oriented approach. *J. Guidance & Control*, **8** (1985) 584—590
35 Levinson D A. The derivation of equations of motion of multiple rigid body systems using symbolic manipulation. *AIAA J.*, **14** (1976)
36 Wittenburg J, Wolz U. MESA VERDE: A symbolic program for nonlinear articulated rigid body dynamics. Proc. ASME Conf. Mechanical Vibration and Noise, Cincinnat (1985)

37 Kane T R, Nielan P E. Symbolic generation of optimal simulation/control routines for multibody systems. Proc. IUTAM/IFTOMM Symp. on Dynamics of Multibody Systems. Udine, Italy, Sept. (1985)
38 袁仁保等. 计算机代数与符号演算语言CASC. 计算机学报, **13**, 5 (1990) : 357—366
39 Houbolt J C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. Aeronaut. Sci.*, **17** (1950) : 540—550
40 Wilson E L, Farhoomand I, Bathe K J. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Int. J. Earthqng. Engng. Struct. Dyn.*, 1 (1973) : 241—252
41 Zienkiewicz O C. The Finite Element Method. McGraw-Hill, New York (1977)
42 Huston R L. *Appl. Mech. Rev.* **44**, 3 (1991) : 109—114

STUDIES ON DYNAMICS OF FLEXIBLE MULTIBODY SYSTEMS

Qin Zheng Ye Shang-hui Liu Ming-zhi
Electronic Science and Technology University of Xi'an

Abstract The modeling theory, numerical solution and existing problems on dynamics of flexible multibody system are presented in this paper.

Keywords *dynamics of flexible multibody systems; STIFF equations; numerical method*