

几何非线性弯曲问题中的板单元膜锁的标准检验

Heinrich Schoop
柏林技术大学

有限元中的剪锁现象已有许多文献讨论，也有一些文献讨论了曲壳的膜锁。

我们在柏林技术大学的研究发现，当弹性薄板发生几何非线性弯曲时也可能出现膜锁。这种现象看起来使人感到惊异。然而，板经过有限位移，实质上就变成了曲壳，因此自然是会产生膜锁的。

问题在于是否各种类型的单元都有这种现象，以及在多大程度上闭锁发生作用。为了解决这个问题，我们提出下列标准检验。

我们采用以完全 Lagrange 表述建立的特殊平板单元¹⁾。一块正方形悬臂薄板 ($t/L = 1/100$) 在自由边受法向载荷 (如图所示)。因为 Poisson 比设为零，所以板的变形情况如同梁一样。 $P = 400\text{N}$ 时，梁端位移的线性精确解为

$$u^I = 0, w^I = PL^3/3EJ = 0.7619$$

非线性梁的准确解为

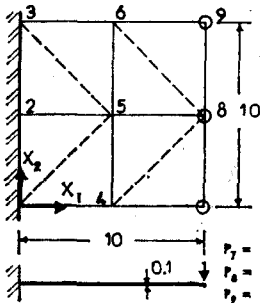
$$u^{NL} = -0.0034\text{m}, w^{NL} = 0.7574\text{m}$$

因为剪切位移不影响 4 位数结果，故对板来说，不管采用 Kirchoff 理论还是采用 Mindlin-Reissner 理论，这个结果都并无误差。

膜锁标准检验

四边形单元：实线
三角形单元：附加的虚线

(a) 规则网格

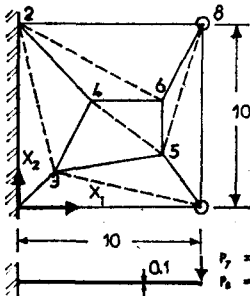


结点坐标 (单位: m)

结点	X ₁	X ₂
1	0.0	0.0
2	0.0	5.0
3	0.0	10.0
4	5.0	0.0
5	5.0	5.0
6	5.0	10.0
7	10.0	0.0
8	10.0	5.0
9	10.0	10.0

$P_1 = 100\text{N}$ (或 360 N)
 $P_2 = 200\text{N}$ (或 700 N)
 $P_3 = 100\text{N}$ (或 360 N)

(b) 不规则网格



杨氏模量 $E = 310 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
泊松比 $\nu = 0$
板厚 $t = 0.1\text{m}$

结点坐标 (单位: m)

结点	X ₁	X ₂
1	0.0	0.0
2	0.0	10.0
3	2.0	2.0
4	2.0	7.0
5	2.0	3.0
6	2.0	7.0
7	10.0	0.0
8	10.0	10.0

$P_1 = 200\text{N}$ (或 700 N)
 $P_2 = 200\text{N}$ (或 700 N)

采用 4 个正方形单元的规则网格，我们可以得到如下良好的结果：

规则网格，线性解， $qP = 400\text{N}$

		误差
Sch-DKT-四边形	$w_7 = w_8 = w_9 = 0.7619$	0
Sch-DKT-三角形	$w_7 = w_9 = 0.7650$	+0.4%
	$w_8 = 0.7694$	+1.0%

1) A simple nonlinear flat element for large displacement structures. *Computers and Structures*, 32, 2 (1989): 379-385.

规则网格, 非线性解, $qP = 400N$

		误差
Sch-DKT-四边形	$w7 = w8 = w9 = 0.7587$	+0.2%
Sch-DKT-三角形	$w7 = w9 = 0.7619$	+0.6%
	$w8 = 0.7669$	+1.3%

然而, 如果采用 5 个四边形或 10 个三角形的不规则网格, 则线性解尚可给出合理的结果, 而非线性解却给出了非常糟的结果如下:

不规则网格, 线性解, $qP = 400N$

		误差
Sch-DKT-四边形	$w7 = 0.7944$	+4.3%
	$w8 = 0.7833$	+2.8%
Sch-DKT-三角形	$w7 = 0.7821$	+2.7%
	$w8 = 0.7757$	+1.8%

不规则网格, 非线性解, $qP = 400N$

Sch-DKT-四边形	$w7 = 0.5664$	-25%
	$w8 = 0.5319$	-30%
Sch-DKT-三角形	$w7 = 0.4699$	-38%
	$w8 = 0.5392$	-29%

非线性使板的刚性超过实际刚度 25—40%, 由此“膜锁”而得名。

当载荷增加到 1400N 时, 板变形呈高度非线性特性, 挠度约达长度的 1/4, 梁的解为

梁的解, $qP = 1400N$

$$u^{nL} = -0.382m \quad w^{nL} = 2.495m$$

按规则网格划分的有限元解表明, 我们的单元稍偏柔软了, 即

规则网格, 非线性解, $qP = 1400N$

		误差
Sch-DKT-四边形	$w7 = w8 = w9 = 2.539$	+1.8%
Sch-DKT-三角形	$w7 = w9 = 2.547$	+2.1%
	$w8 = 2.564$	+2.8%

不规则网格, 非线性解, $qP = 1400N$

Sch-DKT-四边形	$w7 = 2.029$	-18.6%
	$w8 = 1.302$	-47.8%
Sch-DKT-三角形	$w7 = 1.204$	-51.7%
	$w8 = 1.898$	-23.9%

同时我们注意到, 对于不规则网格尽管几何形状与载荷均为对称, 变形却不是对称的。闭锁的影响程度取决于板的厚跨比。薄板比起厚板来说影响要大。

对于这种现象, 可作如下物理解释: 板的中面应该映射成为一个柱面。对于规则网格, 情况正是如此。

(下转第 287 页)

各个翅膀总是在其向上拍动的顶点处拍到一起，然后开始旋转并以旋转后的形状在前缘处先分开（图2）。他提出在空气冲进翅膀分开时造成的部分真空中而形成附体环流，结果造成下次翅膀拍击时的巨大升力。这一效应已被实验证实，而且事实上是许多飞行动物在应用着的。例如，鸽子喧闹地起飞时所需的大升力便是由其翅膀背部拍击而产生的。

动物在开始拍动翅膀时是先旋转它们，看来这也会产生巨大的升力，甚至在翅膀分得很开的情况下也是如此。特别在翅膀旋转得很快并且一直延迟到翅膀改变其运动方向以前也会产生巨大升力。例如悬停的果蝇，其翅膀的旋转一直延迟到开始向下拍动之前，看来也能使它们产生巨大的升力，并且使它们拍动翅膀仅仅约 50° 便能悬停，对比起来其他大多数昆虫都需拍动 120° ^[5]。另一方面，飞行较高的果蝇，其翅膀前缘先向后轻拍，而在翅膀向下拍动结束时，在较弱的翅线处往往向下弯曲^[1-3,6,8,9]。这将造成迅速的迟滞的旋转，从而使翅膀在向上拍击时产生巨大升力。

这种翅膀单独旋转可以造成环流及升力的机理还未完全得到了解，直到不久前这种现象尚未在实验上予以证实。Zanker & Gotz 用一个可连续纪录翅膀拍击时产生铅直方向力的传感器，将果蝇翅膀系在该力传感器上，从实验上证实了这种现象。他们终于显示出，果蝇产生的升力峰值不但在拍击-挥摆后在向上拍动到顶点处产生，而且还在翅膀单独旋转后在向下拍动到底点处也产生。

他们的这些结果有两个重要意义。第一，很显然，解决昆虫如何控制其飞行的问题将是极其困难的，即使我们发现了很大数目的肌肉怎样直接控制翅膀运动的细节，在我们对非定常空气动力学有了更好的了解之前，问题还是不能解决。第二，迫切需要研究非定常运动机翼的空气动力学。这样的研究不但可能澄清动物如何飞行的机理，而且还会帮助我们改进飞机的空气动力学设计；在机动飞行方面，昆虫及鸟类终归还是远比直升机或飞机更有能耐的。

参考文献（9篇，略）

修建华译自：*Nature*, 344（5 April 1990）：491。（董务民校）

（上接第 285 页）

然而，对于不规则网格来说，我们得到的位移或在真实柱面之上，或在真实柱面之下，其实际形状由零膜应变来决定。因为弯曲表面必须与这种形状相协调，因而出现了附加局部弯曲，这就产生了闭锁。

为要改善这种情况，可以通过更高阶膜应变来更精确地描写非线性膜应变。其结果为，当 $P = 400\text{N}$ 时，误差仅为0.5%，而 $P = 1400\text{N}$ 时，误差仅为1.5%。

读者可以用这个准则试验自己体系中的单元，结果可以在 *BENCHmark* 上发表，以便对这个有趣特性的结果进行讨论。

胡雨村译自：*BENCHmark* (June 1991)：28—29。（王克仁校）