

临界点现象：大长度标度的 普适性物理学 (III)

Alastair Bruce David Wallace

8.5 重正化群计算的实用方法

在上节中,我们用基于十中抽一格式的简单计算说明了重正化群的方法.尽管这种计算对揭示粗粒化过程中固定点的重要性和它们的稳定性是有用的,但所得到的结果在定量上并不可靠.在本节中我们希望指出几种计算方法,在可以控制由于任何近似而引起的误差的意义上,它们可以得到可靠的结果.我们主要的目的是给出可能方法的很广泛的印象,但所覆盖的题目远不是详尽的.我们将继续尽可能地删除数学的细节.然而本节比起前面来有更多技术上的要求.因此预先告诉那些希望直接转到最后一节中所提出的更一般问题的读者可以这么做,而不会失去连续性.

实用的重正化群方法大致可归属为“真实空间”法和“傅里叶空间”法两大类,在每一类中都具有广泛的变化和一些确实有用的交叠.在真实空间方法中,系统的构形用与点阵座位有关的一组变量(例如在 Ising 模型中的自旋变量)来描述.于是,粗粒化过程就包括了一些对邻位变量群求空间平均的形式.在 8.4 节中所讨论的十中抽一的格式提供了这种策略的最粗略的说明;更精细的一些变型在下面的几小节中描述.在傅里叶空间方法中,利用傅里叶分量(磁化强度平面波,或在流体情况下的密度平面波)来描述构形,由这些分量可以建立起构形.粗粒化过程包括较短波长分量效应达到平衡的过程.所涉及的技术在本节的最后一小节中概述.

技术选择方面的初步说明是必要的.在特殊物理系统方面,一种方法看上去可能比另一种方法更自然些.例如,在磁体这种情况下,其自然状态就满足一确定的点阵,真实空间表述法看来可能更合适;在流体情况下,其中不存在任何内蕴点阵,傅里叶空间法似乎是自然的方法.然而,如果人们的目的是了解系统的临界行为,那末人们就应该认识到,方法的微观真实性并不是最必要的考虑事项.因为普适性的本质是,与前述同样的大长度标度物理学将出现不考虑事情真相的微观细节.摆脱了以一种微观上符合实际的模型为工作对象的约束,于是人们可以选择他的方法以便使有意义的普适性性质的计算尽可能简单和有效.在实际中人们发现,普适性物理学倾向于在“较低”空间维情况下更适合于采用真实空间的表述法,而在“较高”空间维情况下是傅里叶空间方法更合适.

8.5.1 “笔和纸”的真实空间方法

如果人们企图扩大十中抽一的计算超出最低阶[根据方程(8.13),这种计算产生了有效的最近邻位耦合 K^2],那末解析计算中所面临的一些实际困难立刻变得十分明显:在展开

式的第 4 阶上，人们可以在第 2 和第 3 邻位自旋之间产生新的耦合。因为重正化变换一般地是迭代的，因此人们必须以具有几个耦合的哈密顿函数开始。这只是加剧了耦合常数的增殖问题。然而，人们应该懂得这个问题是代数复杂性问题，原则上不是一个障碍。理由是，由粗粒化产生的有效能函数将是短程的（实际上其量级是含有的部分构形之和的相关长度）。因此问题是一个数值上可靠截断的实际问题，也就是确定在固定点和在一般地流动中的最重要的耦合，并且估计由于忽略其他所引起的误差。尤其是后者一般地说来在真实空间方法中用分析方法做是非常困难，并且在大多数场合中都得不到。

尽管有这种限制，但在此具有一些给人以非常深刻印象的结果的领域中已经做了富有想象力的工作。例如，K. G. Wilson 已经广泛地研究了十中抽一的格式；他用了 L. P. Kadanoff 的变换推广针对方形点阵的 Ising 模型，系统地研究了包括达 217 种类型相互作用的效应。一种获得了部分成功的最早方法由在有限点阵上实现精确的截止（exact blocking）构成，于是，由这种过程产生的耦合距离（range）自动地被截断到由其有限点阵本身所保持的那些距离：例如，2 维的 4 个自旋的方阵可以只保持 4 个相等的相互作用——最近的和第 2 近邻位，和保持 4 个自旋的和。最精巧的方法之一是 Kadanoff 的变分方法。原则上它可以应用于任何维数情况并且可以截断到在超立方体（2 维的正方形，3 维的立方体，等等）上的可能的所有相互作用。最后，有非常少的精确结果，其中最著名的可能是 H. J. Hilhorst, M. Schick & J. M. J. van Leeuwen 对三角形点阵的 2 维 Ising 模型的精确截止。这种特殊方法包括标度的无穷小改变：（大）边长为 L 的点阵被映射到边长为 $L-1$ 的点阵上去，以使标度因子 $b = L/(L-1) = 1 + 1/(L-1)$ 。从这个映射中得到关于临界温度和临界指数 ν 的精确结果。（当然这个模型的精确的直接解已经众所周知了。）

显然，以上各种各样的方法开发了许多可能的粗粒化过程和近似法。这里我们只准备强调，所选择的特定粗粒化过程必须保证，由于增大长度标度引起的临界涨落由逐次变换来俘获。一个有趣的例子可以说明这点。假设和以前一样我们采取 Ising 模型，但是是具有有利于邻位自旋反平行（反铁磁的）排列成直线的负的最近邻位耦合的一种。如果人们把一个粗粒化的自旋定义为在 2×2 构元（cell）中的邻位的总和（如在 8.3 节中所述），则将失去低能量构形的反铁磁特性。在文献中所探讨的一种解考虑了由 5 个第 2 近邻位（像在图 8.10 中的那样）所形成的构元。在这样的构元中所有自旋彼此之间都是铁磁性地关联的，并且最终得到的构元的自旋与它们的最近邻位构元的自旋是反铁磁性地相关联。粗粒化过的点阵同样也是方形的，它的点阵常数为初始点阵常数的 $\sqrt{5}$ 倍。

8.5.2 计算的真实空间方法

我们把以上方法描述为解析的或“纸和笔”的方法，尽管它们的严格执行几乎不可避免地包含一些处理代数复杂性的计算工

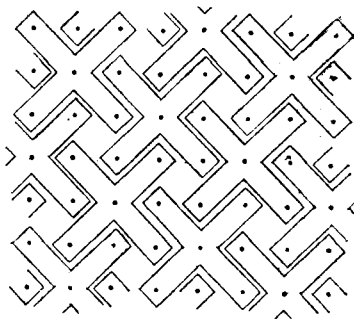


图 8.10 反铁磁体的可能的粗粒化格式。在反铁磁体中，最近的邻位耦合 J_1 是负的，因此在这方形点阵的黑和红的座位处其自旋趋向于反平行。所显示的粗粒化过程由新块的自旋 [它占据了(倾斜的)方形点阵，其间距是初始点阵的 $\sqrt{5}$ 倍] 代替了 5 个以平行自旋为主的局部团 (local clusters)。最近邻位块的自旋趋向于反平行——在此变换下保存了系统的反铁磁本质

作。这里我们在从数值上估计局部的或加权的构形之和（它确定了粗粒化过程）的意义上涉及固有的计算近似方法。

因为这种方法直接得自 8.3 节中的讨论，从有限尺寸定标的方法开始非常自然。这种方法一开始就承认，在任何数值模拟中在有限空间范围的盒子内必定要限制有限的自由度数。在这样的有限系统中，真实的临界奇性（例如，相关长度的发散或诸如磁化率或比热等热力学参量的发散）是不可避免地要作舍入处理的：最大值的位置一般同样地要移动离开整块的精确临界点。当系统尺寸增大时这种移动和产生舍入处理的邻域变得更小了。强制法 (brute force approach) 是由越来越大的模拟使所期待的整体奇性与数据拟合，这种方法对形成可行的方法来说是太粗糙和太费时了：变量数的增加与由于短程（局部的）Monte Carlo 修改过程累积起来的大距离相关性的越来越慢的演化——“临界变慢 (critical slowing down)” 现象复合了起来。

与 8.3 节一样的精神，有限尺寸定标方法显然包括此系统的有限尺寸：所有各量对系统尺寸 L 的依赖关系被认识了，但这种附加的依赖关系仅出现在比值 ξ/L ($=z$ 在 8.3 节中) 的情况下。这种形式体系非常类似于方程 (8.8) 和 (8.9) 中的，但具有被解释为系统尺寸的 L ； L 的依赖关系在这里不是虚幻的！因此有限尺寸定标可以认为是到系统尺寸的单一的粗粒化步骤。

为了说明此形式体系，从方程 (8.4) 和 (8.5) 中回想起了当从下面 $T \rightarrow T_c$ 时，整块的序参量 Q 由于 $Q \approx Q_0 - |t|^\beta$ 而变为零。有限尺寸定标形式为（这里要求注意边界条件）

$$Q(t, L) = |t|^\beta \bar{Q}(|t|^{-\nu}/L) \quad (8.19)$$

其中根据相关长度与 t 的相关写出了整块的相关长度。只要当 $z = |t|^{-\nu}/L \rightarrow 0$ [无限体积 (热力学) 极限] 时， $\bar{Q}(z) \rightarrow Q_0$ ，方程 (8.19) 就重述了整块的行为。在此有限系统中，极限 $t \rightarrow 0$ 必定存在。对于大的 z ， $\bar{Q}(z)$ 的渐近形式因此必须消去 $|t|^\beta$ 的前因子。这要求 $\bar{Q}(z) \sim z^{\beta/\nu}$ ，同时蕴含

$$Q(0, L) = L^{-\beta/\nu} g_0 \quad (8.20)$$

其中 g_0 是另一个常数。于是在整块的临界温度时对不同尺寸 L 的点阵的模拟便能从计算序参量得到指数 β/ν 的估计值。当然， T_c 值事前可能不知道，但通过利用方程 (8.19) 同样可从数值上得到其估计值。在 3 维 Ising 模型（不可能精确地解它）中这种近似法技巧的现状包含了达 128^3 座位的点阵，和非常高的统计数字（在完成每秒超过 2 亿步的 Monte Carlo 修改步数的并行计算机上扫过整个点阵的扫描次数大于 10^7 ）。所得到指数的精度在千分之几之内。此近似法的许多种变型已应用于各种各样的问题中。

有限尺寸定标法可以在重正化群的框架内得到证明：Monte Carlo 重正化群 (MCRG) 是极其强有力的技术，它显然根据由计算机模拟 (“Monte Carlo”) 法所产生的构形完成了重正化群的分析。其思想首先由 S.K.Ma 提出，而后由 Wilson 和 R.H.Swendsen 发展成为一种有效的工具。我们总结了它的关键性特点。

回想起，为计算临界指数人们需要在固定点处估计的稳定矩阵 $\partial K'_i / \partial K_j$ 。表面上，在数值模拟中这似乎需要一种模拟顺序，以便能寻找临界固定点 K^* 的必需的高维空间和绘制出靠近这个固定点的有效耦合流动：尽管我们没有指出原则上人们如何可以实际上实现这些步骤，但应该明白任何直接的近似法将包含过于大量的模拟和从而过于大量的计算财力。幸

好, 这两方面的问题都可以通过以下过程而漂亮地回避。

第一点是我们不必寻找 K^* 。只要我们在一个临界点处 (比如说最近邻位 Ising 模型的临界点) 开始, 则其粗粒化过构形的有效耦合将根据图 8.9 自动地流向 K^* 。因此当增大截止数 n 时, 不进行任何进一步的调整, 导数 $\partial K_a^{(n+1)}/\partial K_b^{(n)}$ 就趋于所要求的极限 $\partial K_a^*/\partial K_b^*$ (在 K^* 处估计的)。

第二点是为计算导数 $\partial K_a^{(n+1)}/\partial K_b^{(n)}$ 的矩阵, 不必知道耦合本身。我们反而可以集中于各种互相作用的期望值上。准确地说, 考虑在第 n 个截止数上的能函数。我们写出

$$\mathcal{H}^{(n)} = - \sum_a K_a^{(n)} S_a^{(n)} \quad (8.21)$$

其中, 例如 $S_1^{(n)}$ 是在 n 截止步后在点阵上自旋的最近邻位对之和, $S_2^{(n)}$ 是第二近邻位对之和, 等等。现在考虑导数 $\partial \langle S_c^{(n+1)} \rangle / \partial K_b^{(n)}$ 并利用链式法则:

$$\frac{\partial \langle S_c^{(n+1)} \rangle}{\partial K_b^{(n)}} = \sum \frac{\partial K_a^{(n+1)}}{\partial K_b^{(n)}} \frac{\partial \langle S_c^{(n+1)} \rangle}{\partial K_a^{(n+1)}} \quad (8.22)$$

这是一个矩阵方程。对于所要求的稳定矩阵, 只要我们可以计算在这个方程两边的期望值的导数, 那就可以解这个矩阵方程。通过利用构形平均的定义

$$\langle S_a^{(n)} \rangle = \sum \exp[-\mathcal{H}^{(n)}] S_a^{(n)} / \sum \exp[-\mathcal{H}^{(n)}]$$

我们就可以证明

$$\partial \langle S_c^{(n+1)} \rangle / \partial K_b^{(n)} = \langle S_c^{(n+1)} S_b^{(n)} \rangle \dots \langle S_c^{(n+1)} \rangle \langle S_b^{(n)} \rangle$$

于是用外来的, 但是可测量的包含着第 n 个及第 $(n+1)$ 个截止数的块自旋的相关函数来表达所求的导数。

这种讨论集中了基本的 MCRG 的形式体系。这种方法是强有力的一种方法, 它使在计算中所有近似的系统控制有了可能。它还有许多实用的优点。例如, 只要通过增加测量期望值的数目就可以估计在单个模拟中增加的有效耦合的数目。况且临界点不必事先知道; 利用同样的基本形式体系就可直接得到它, 并且具有高精度。为了使流入固定点的暂态流动效应减到最小, 进一步的改进包括优化粗粒化过程。目前此领域是一个非常活跃的领域, 并且其工作有可能应用于说清临界现象的各种问题。

8.5.3 傅里叶空间法

在自由度是通过空间所有点处所确定的密度 (例如磁化密度或流体密度) 来描述的模型中, 可以最自然地实现傅里叶空间方法。对这样的量通常用“场”这个术语, 而傅里叶方法也由于它起源于用来描述亚核粒子相互作用的量子场论而称为“场论”。(在 8.6 节中我们将回到这个方面。) 我们将把我们的场写成 $\phi(\mathbf{x})$, 这里 \mathbf{x} 代表在空间的位置。实际上计算集中在场的傅里叶分量上, 我们把这些分量写成 $\hat{\phi}(\mathbf{q})$, 其中波矢量 \mathbf{q} 是傅里叶分量的波长量度的逆。为了进行计算, 我们必须对给定的密度构形鉴别一个合适的能函数 $\mathcal{H}\{\phi\}$ 和确定对整个密度构形 (它得出物理意义的量) 的平均。

在这种情况下原型的能函数用 Landau, Ginzburg & Wilson (LGW) 的函数来表示, 它有形式

$$\mathcal{H} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \lambda (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{1}{4} u \phi^4 - H \phi \right\} \quad (8.23)$$

其中 $(\nabla\phi)^2 = (\partial\phi/\partial x_1)^2 + \dots + (\partial\phi/\partial x_d)^2$, 而 d 是空间维数. 尽管这看起来完全不同于 Ising 能函数, 但它以同样的一些原理为基础. 把 ϕ 看成是磁化密度 (技术上, 是对于单轴磁体的). 在不考虑最后一项 (它模拟了外加磁场 H 中的能量) 的情况下, 其余项在 $\phi \rightarrow -\phi$ 情况下是对称的. 如果 λ 是正的, 则第 1 项意味着 ϕ 在空间变化时耗费能量, 也就是有利于均匀铁磁的有序化. 按照惯例, 选择单位以使 $\lambda = 1$. 对零场 H , 很清楚, 最小能量构形是 $\phi(\mathbf{x}) = 0$ 或一个非零的常数 $\phi(\mathbf{x}) = (-r/u)^{1/2}$, 视 $r > 0$ 还是 $r < 0$ 而定. 尽管最小能量构形本身并不确定平衡性质 (回想 8.2 节中所讨论的熵的决定性作用), 但我们因此可以预料, 相变将发生在靠近系数 r 改变符号的那个点处. 相应地, 我们可以预料在参量 r 中将存在模型的强的温度相关性. 更准确地说, 我们假设 r 是 T 的光滑函数, 而 T 是按小的 t 展开的幂级数. 事实上, 从微观上更符合实际的模型 (对磁体或流体) 得到连续介质模型的能量方程 (8.23) 的论据清楚地证明了这个假设的正确性. 这些涉及在最短波长涨落范围内的初始粗粒化的论证同样指出, 原则上存在着比在方程 (8.23) 中所出现的 ϕ 的那些幂更高的幂. 然而, 对普适性的推测允许我们可以抛弃它们: 显然理论允许我们通过揭示这种互相作用的确是不相干的来检验这个假设. 最后, \mathcal{H} 是对 x 点处 ϕ 的局部函数空间的积分这样的事实, 是用来获得有序化力的固有短程本质的.

我们通过 $\int D\phi$ 来表示对全场构形的平均. 这是一个难解的题目, 它意味着 “求出所有可能函数 ϕ 的贡献的总和”. 在这里提供一个更数学化的定义显然是不合适的; 我们仅说明, 把 $\int D\phi$ 认为是多维 (事实上, 无穷维) 积分并不会误入歧途, 并且要说明有了它, 物理平均的形式体系就类似于 Ising 模型的形式体系, 例如

$$\langle Q \rangle = Z^{-1} \int D\phi Q\{\phi\} \exp(-\mathcal{H}\{\phi\}) \quad (8.24)$$

其中
$$Z = \int D\phi \exp(-\mathcal{H}\{\phi\}) \quad (8.25)$$

是配分函数.

为了提供阐明讨论后者的讲台, 需要作进一步的陈述. 由方程 (8.23) 所定义模型看起来没有提到使连续场的描述变得合适的那个粗粒化长度标度. 现在, 根据定义已经实现了比这个粗粒化长度标度小的长度标度上的所有涨落. 这样一些涨落因此应该从遗留下来的构形和 $\int D\phi$ 中排除. 通过给在更短的那些长度标度上变化的构形附加能量可以达到同样的效果, 目的是通过加权因子 $\exp(-\mathcal{H}\{\phi\})$ 逐渐降低它们. 一个可能的解是在 \mathcal{H} 中增加下列项:

$$\mathcal{H}_A = \frac{1}{2} A^{-2} \int d^d x (\nabla^2 \phi)^2 \quad (8.26)$$

其中 $\nabla^2 \phi = \partial^2 \phi / \partial x_1^2 + \dots + \partial^2 \phi / \partial x_d^2$; 如果 ϕ 在小于 $1/A$ 的那些长度标度上变化, 也就是 $|\nabla^2 \phi / A| \gg |\nabla \phi|$, 那末这附加项将占主要地位. 参量 A 被称为截断, 它有着长度倒数的量纲或波矢量的量纲. 它是选定在 \mathcal{H} 中所有参量标度的基本量纲. 对无量纲量 \mathcal{H} 中的各项进行初步的量纲分析很快得到

$$[\phi] = [A]^{-\frac{1}{2}(d-2)}, [\tau] = [A]^2, [u] = [A]^{4-d} \quad (8.27)$$

现在让我们转到实现方程 (8.24) 和 (8.25) 中的平均的问题上。一般来讲, 这些构形的和不可能精确地求得, 这一点对读者来讲应该是不奇怪的。我们必须借助于某种近似格式。以下格式可能出现。因为 \mathcal{K} 是一个对空间的积分, 它显然随着系统的体积增大而增大。于是, 在大的体积限度内, 在构形平均中的最大加权值是与最低的能量构形相关的。因此, 作为最低的近似, 我们可以想象 $D\phi$ 完全受最低能量构形的控制。因为 $(\nabla\phi)^2$ 总是消耗能量的 (因为它是正的), 所以其最小的能量构形有 $\phi = M$, 它是一个常数, 满足

$$0 = \frac{d}{d\phi} \left\{ \frac{1}{2} r \phi^2 + \frac{1}{4} u \phi^4 - H \phi \right\} \Big|_{\phi=M} = rM + uM^3 - H \quad (8.28)$$

有了临界点把 $M=0$ 同 $M \neq 0$ (对于 $H=0$) 区分开来的这个鉴别式, 我们在所有常数范围内并且忽略 $(T - T_c)^2$ 量级的项的情况下必有 $r = (T - T_c)$ 。因此方程 (8.28) 变成

$$H = (T - T_c)M + uM^3 \quad (8.29)$$

这就是 Landau-Ginzburg 方程, 即建立磁化密度 M 与 T 及 H 关系的平均场的状态方程。它可以写成标度形式

$$\frac{H}{M^\delta} = f\left(\frac{T - T_c}{M^{1/\beta}}\right) \quad (8.30a)$$

具有一些鉴别式

$$\delta = 3; \beta = 1/2; f(x) = x + 1 \quad (8.30b)$$

(选择合适的单位可以把 u 定为 1)。

这个平均场理论可以给出相变的定性上的正确描述。但一般来讲, 从定量上看对 1 维, 2 维和 3 维简直都是错误的 (回想起 $d=1$ 时我们希望在任何温度都没有相变)。显然必须有对方程 (8.28) 中所表达的近似结果的修正, 并且的确有这样的修正: 关于给定构形的变化在系统的尺寸内也是按指数规律扩大的, 所以关于占支配地位的最小能量的原来的预想必须加以修正。这些变化可以作为参量 u 的幂级数利用在 20 世纪 40 年代末和 50 年代初发展的称为 Feynman 的图解展开法用摄动法来计算。如果这种 Feynman 图解展开法直接解决了问题, 那末显然就没有理由在一本关于“新物理学”的书中包括这一章了, 但它没有能解决。事实上, 它怎么可能这样? ——在 u 的值从一个系统到另一个系统各不相同的情形下, u 的展开式的各项中是不可能给出普适的数的!

通过回忆方程 (8.27) 的量纲分析可以作出更说明问题的讨论。因为在 u 的展开式中的所有项必须有同样的总量纲, 由 u 的每次幂产生的因子 $|A|^{4-d}$ 必须用另外的因子消去。只有两个参量是可得到的, 来自截断项 [方程 (8.26)] 的 A 本身, 或 $r \sim T - T_c$ 。提出既可能又实际的问题是后者, 因为它意味着根据方程 (8.27) 中的 r 的量纲, u 的每次幂都可能附带有因子 $(T - T_c)^{(-1/2)(4-d)}$ 。这样, 其有效展开参量是 $[A^2/(T - T_c)]^{(1/2)(4-d)}$, 对任一个 $d < 4$ 的空间维, 当 $T \rightarrow T_c$ 时这个参量变得无限大; 摄动展开灾难性地毁掉了! 相反地, 在大于 4 维空间的世界中, 摄动理论中的每一项的行为与首项的是一样的。特别是对于 $d > 4$, 状态方程的形式 (8.30a, b) 经过摄动修正后保持不变 (在渐近极限 $t \rightarrow 0, H \rightarrow 0$ 时)。这种有确定界的情况 $d = 4$ 被称为上临界维: 在它以上, 对主要临界行为, 平均场理论是正确的。与较低临界维一起 (在此临界维时和低于此临界维时决不会有相变), 它还提供有用的普适性类的特性。

回到物理量纲上，我们面临着经典的强耦合问题，在此问题中，其有效展开参量在有意义的临界区域中表面上可能成为任意大。重正化群要处理的正是这个问题。

正如在真实空间方法中一样，有许多利用对连续场来说是很自然的傅里叶方法来实现重正化群的途径。概念上最简单的途径是从方程 (8.23) 所定义的模型开始，其中我们假设 (在模型的推导中给出了初始粗粒化隐式)，场有着限于具有在波向量 $|\mathbf{q}| < \Lambda$ 的球上的傅里叶分量 $\hat{\phi}(\mathbf{q})$ 。于是截止变换 (blocking transformation) 可以通过实现在全场范围内的局部构形和来确定，全场的傅里叶分量都位于壳 $\Lambda/b < |\mathbf{q}| < \Lambda$ 内。这种局部平均产生场的有效能函数，场的傅里叶分量都位于球 Λ/b 中。第二步是必须的但是很平凡的：改变标度 x (或 q)，以使球半径 (截断) 又是 $\Lambda/b \rightarrow \Lambda$ ，并且改变场 ϕ 的标度以使 $(\nabla\phi)^2$ 项在有效的 Hamilton 函数中再一次有 $(1/2)$ 的系数。这些标度的改变都类似于 8.3 节中所讨论的间距和变量标度的改变。

这样的变换产生有效参量 $r'(r, u)$ 和 $u'(r, u)$ ，它们可以作为 u 的幂级数来计算，也许还产生新的相互作用的类型。这种重正化群的形式体系的定性特点如下：第一，函数 r' 和 u' 在临界点不奇异。第二，对于 $d > 4$ ， u 是一种不相干耦合；事实上 $u' = b^{4-d}u + O(u^2)$ 。这是重正化群的提法，即在高维情况下平均场理论是有效的。第三，对于 $d < 4$ ，远离固定点 $u^* = 0$ 的 u 的摄动是相关的；系统跨越平均场理论到达新的行为。

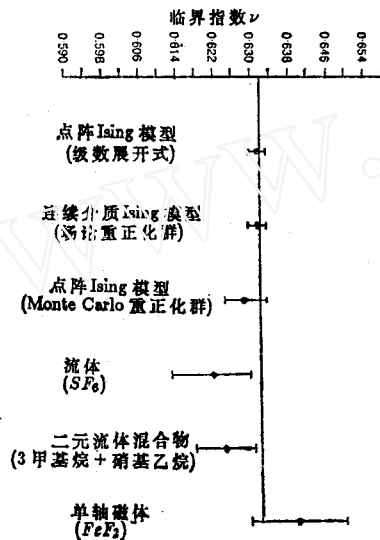


图8.11 $d=3$ Ising 普适性类各系统的临界指数 ν 。表中汇集了被认为属于 3 维 Ising 普适性类中各系统较新的理论和实验研究结果。点阵 Ising 模型的级数展开式研究由 Fisher 和 Chen 进行。场理论的重正化群计算由 Le Guillou 及其同事们进行。Monte Carlo 重正化群计算由 Pawley 及其同事们进行。SF₆ 的液体-蒸气临界点的结果取自 Cannell 的光散射研究。二元流体的相析出转变 (phase separation transition) 的研究应归功于 Chang 及其同事们。最后，单轴 (反铁) 磁体 FeF₂ 的结果归功于 Belanger 和 Yoshizawa 的中子散射测量。表中水平线是 6 个数据点的最好 (最小二乘方) 表示。(图中“3 甲基烷”应为“3 甲基戊烷”。——译者)

为了定量地找出这种新的行为是什么，我们必须找一个非平凡的固定点，在重正化群变换下 u 流向这个固定点。一种方法是仅仅通过 u 的幂级数的数值分析在 3 维情况下对 u 的尽可能高的阶计算函数 r' 和 u' ，并且找到固定点和靠近该点处的行为 (即临界指数)。由 B.G.Nickel 完成的值得注意的非平凡 6 阶的计算已经使它成为一种强有力的技术。由 M.E.Fisher 和 K.G.Wilson 提出的第二种方法认识到在靠近上临界维 $d = 4$ 处一些东西必须简化；如果 $\varepsilon \equiv 4 - d$ 是小的 (并且是正的)，则对于把 d 看成连续变量并且对要问发生了什么来讲这是一种推动。然后人们发现，新的稳定的固定点的 u 值也是 ε 量级的。因此诸如指数等所有参量都可以作为 ε 的幂级数来计算，并且从它们的平均场值开始。例如，对于由方程 (8.23) 所定义的模型，其指数 ν 的头 2 项 (现在已知道 4 项) 是

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\varepsilon + \frac{7}{162}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (8.31)$$

这是一条得到定性了解 3 维物理行为的特别

简洁的途径；对于简单的系统当 ε 被定为 1 ($d=3$) 时，计算足够多的项还可以提供定量的结果。例如，方程 (8.31) 给出 $\nu=0.626$ ，对于由图 8.11 所汇集的 Ising 普适性类，这实际上惊人地接近于目前可得的最好的估计。由不同模型系统的理论研究所得到的结果（在级数计算情况下和在对于场论计算的连续介质情况下点阵的公式化）和由不同真实系统（流体，单轴磁体）的实验研究所得到的结果之间的一致性提供了支持普适性的坚实的证据。所作的断言的精确性是我们已经讨论过的理论方法（和我们还没有讨论过的实验技术）完善化的某种证据。

8.6 多长度标度现象：不同的气味

在本文中我们决定说明由许多长度标度物理学所提出的问题以及处理这些问题所必须的技术，在 Ising 模型及 Ising 模型普适性类的情况下，这是一种最简单的表示。尽管各系统的这种普适性类是一个很大的类（并且现在基本上已了解的事实相对地是令人难忘的），但用任何手段也不能穷尽在自然界中发现的并且易接受重正化群方法处理的多长度标度现象各种形式的范围。在结束本文的本节中，我们努力给出这些现象多种多样的一些印象。我们以发展 8.3 节中所作的观察开始，识别相变范围内发生的一些多长度标度现象的不同普适性类。然后我们简短地看看出了相变范围的多长度标度现象，但仍然在凝聚物质物理学的框架之内。最后，我们离开凝聚物质的领域，转到基本力的相对论量子理论上。正如这本《新物理学》书中其他文章（例如 Taylor 所写的那篇文章）所讨论的那样，现在有很好的证据说明，强核力和弱核力以及更常见的电磁力全都由所谓的规范理论来描述。这样一些完全不同的物理现象如何可能被纳入一个统一的框架之内？正如我们将要见到的那样，其答案在于在相对论量子理论和统计系统的相变之间的深奥的联系：基本力的不同性质简直就是规范理论的不同可能的特性。

8.6.1 相变的普适性类

经受相变的物理系统并不全属于 Ising 普适性类。在足够大长度标度上所考虑的构形物理学和（等价地）在耦合常数空间中的极限流动对许多微观细节都是不灵敏的；但（正如在第 8.3 节中所见到的那样）有一些为构形流动和耦合常数流动所保存的基本特征，并且这些基本特征必然要反映在极限临界行为中。在本小节中我们将确定这些关键性特征中的一些，并给出用来描述普适性类的各种普适性类的例子。

第 1 个（也是特别主要的）特征是**空间维数 d** ，相互作用自由度是散布在此空间范围内的。因此“Ising 普适性类”实际上包括由维数 d 区分的许多子类。在图 8.11 中确定了 $d=3$ 的 Ising 普适性类的物理认识。 $d=2$ 的类（其中方形点阵 Ising 模型是原型的成员）的物理认识在本书 Thouless 撰写的那篇文章中由讨论 2 维磁体的秩得到。同样存在着由本质上孤立的 Ising 自旋链所组成的磁体，并提供 $d=1$ 的 Ising 普适性类的认识，然而它显示出没有任何有限温度的相变，因为 $d=1$ ，所以将可以回想起它是 Ising 系统的下临界维。最后，我们注意到，在下面被阐明的意义上，Ising 普适性类的物理认识在其上临界空间维 $d=4$ 时同样也存在 (1)。

第 2 个关键特征（它在第 8.3 节中也简要地确定了）是**序参量分量的数目 n** 。Ising 模型的序参量是一个标量，具有单个分量。如氧化钬 (EuO) 等铁磁体有着由 ($n=3$) 分量自旋形成的序参量，严格地说自旋是量子力学的算子，但这证明是一种“不相干”的微观细节。

因此(下面指出的模数的改进)这些体系可以用(即归入同一普适性类的)与Heisenberg名字有关的广义 Ising 模型来描述,其中 Ising 自旋代之以单位长 3 分量经典矢量。由 K_2SeO_4 所显示的结构相变提供了当降低温度通过临界点时产生的畸变剖面图的幅值和相位所形成的($n=2$)分量的序参量情况的例子。发生在液氦(He^4)中的超流体相变同样地用 2 分量的序参量来描述,在这种情况下是描述凝结的波函数的幅值和相位。有实验证据说明(实际上是在后者的情况下),这些系统归入一个普适性类,它的最简单的代表是 XY 模型,在这种模型中微观自由度由 $n=2$ 分量的经典自旋矢量来表示。

Heisenberg 模型系统和 XY 模型系统都有一个重要的对称性质:它们的构形能量在所有自旋都通过同一角度旋转的运算之下是不变的。与在 K_2SeO_4 中的结构不稳定性有关的构形能量以及在与在 He^4 中的超流体相变有关的构形能量有着类似的对称性(反映在相应序参量的相位方面其能量变化的不相关性)。然而一般说来,具有 n 分量序参量的系统不具有这种旋转不变性。于是,例如一个真实的($n=3$)分量磁体的能量在一定程度上依赖于磁化的取向,正如在磁化趋向于指向沿许多充分确定的(“容易确定的”)轴中的 1 轴这样的事实中所反映的那样。这种构形能的对称性构成了对大长度标度物理学的性质来说可能很重要的第 3 个特征。任何破坏旋转对称性的相互作用在经过粗粒化过程后都可能被维持,事实上是被增强,以致普适性临界行为可通过这种对称性降低了的固定点构形能来描述。另一种说法是破坏对称性的摄动可能是不相关的,以致这些摄动可以通过粗粒化过程来消除,这个粗粒化过程把此系统带到固定点,它的构形能量具有完全的旋转不变性。(实际上有第 3 种可能性:破坏对称性的摄动可能驱使耦合常数流动进入一个区域,在此区域临界行为由于产生了以序参量的跃变来表征的“间断的”相变而被突然地截断。)在任何给定的场合下实现这种情况都依赖于非平凡方法中的另一些关键性特征(例如 d 和 n),这种非平凡方法只可能通过显式重正化群计算来确立。这里我们必须限于观察在具有立方对称性的重要的铁磁体(以 EuO 为代表)类中,这样的对称性破坏的相互作用或者是形式上不相关的,或者是导致一个固定点,此固定点接近于表征旋转不变性系统的那个固定点。

我们确定的第 4 个可能的重要特征是微观自由度中的相互作用距离。只要这些相互作用由于相互作用变量的分离而衰减得足够快,则普适性类就仍然是适当的短程相互作用模型的那种:于是,例如一般说来,对 Ising 模型施加次一个邻位的相互作用不改变系统的普适性类。然而,如果由于分离,相互作用不能足够快地衰减,那末大长度标度物理性质将大大改变。实际上,这种“长程”相互作用在真实磁体中确实存在。尽管占优势的自旋-自旋相互作用(量子力学的交换力)是短程的,但基本上还是存在适于磁体偶极子对的经典的相互作用。这种相互作用是长程的,并且对临界行为是重要的。视序参量分量的数目 n 的值而定,它的影响大不相同。对于($n=3$)分量的铁磁体,虽然名义上与只有短程相互作用的系统不同,但相应的普适性类可用与它们的短程(Heisenberg)对应类稍稍不相同的数(指数)来表征。另一方面,对于($n=1$)分量(“单轴”)磁体,磁偶极相互作用的影响是十分明显的:在重正化群框架内,可以指出它们的效应是将磁体的有效空间维数增大了。于是,具有偶极-偶极相互作用的 3 维单轴磁体将归入 4 维的精确短程(Ising)模型的普适性类中,它的行为是经典的平均场(与反映非经典行为的精巧修正项内的相比,这种非经典行为出现在完全低于 4 空间维时),这些预测被单轴铁磁体 $LiTbF_4$ 的研究所证实,

我们已经强调了构形能量旋转对称性的潜在意义。它的**平移对称性**同样是极其重要的。迄今为止所讨论的系统全都有这样的对称性：于是，例如我们不言而喻地假设任何一个自旋与它的邻位的相互作用是和任何另一个自旋与它的邻位之间的相互作用相同的（也就是用相同的耦合常数来表征）。呈现相变的许多系统都没有这种基本对称性。特别是，在一些磁合金中（例如磁化锰在非磁铜中的稀溶液），磁离子与事实上无规分布的耦合常数相互作用（在正值和负值范围内）。这样的（“自旋玻璃”）系统的行为根本不同于它们的均匀对应物，事实上如此之不同以致尽管做了10年的理论工作，但许多有关相变本质和有序相本身性质的相当基础的问题仍有待解决。

我们已经确定的第5个关键性特征可论证地确定普适性类之间的基本边界。在这里进一步琢磨这些边界不太合适。然而有一种更普遍的观点，在这里我们可以，也应该简短地提到它。

考虑一个用 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}'$ 形式的构形能量来描述的系统，这里与能量 \mathcal{H}_0 相关的普适性类不同于与 \mathcal{H} 有关的普适性类。（用8.4节的话说， \mathcal{H}' 代表一个**相关摄动**，并且 \mathcal{H}_0 的固定点在构形能 \mathcal{H} 的空间中是一个**多重临界固定点**。）作为一个具体的例子，我们可以考虑一种铁磁体，它把 \mathcal{H}_0 与由于短程（交换）力而产生的构形能联系起来，并把 \mathcal{H}' 与长程（偶极）力联系起来。现在假设， \mathcal{H}' 与 \mathcal{H}_0 相比小得多（其偶极力比起交换力是弱的——这是大多数真实铁磁体的典型情况）。自然可以预料，尽管断言说普适性，但系统的行为在**某种意义上**还将受构形能 \mathcal{H}_0 的控制。这是确实的。摄动 \mathcal{H}' 越小，在 \mathcal{H}' 的效应开始显示出之前，人们必须在越大的长度标度上来观察系统。用更实用的话来说， \mathcal{H}' 越小，明显显出 \mathcal{H}' 效应的约化温度的范围就越小。于是，例如当趋近弱偶极磁体（如EuO等）的临界点时，将有一个初始的临界区域，在这个区域中其行为只具有短程相互作用的系统的行为（用 Heisenberg 模型的固定点来描述）；同时还有在小得多的约化温度处得到的第2个临界区域，在这里偶极相互作用的效应被充分地发展了（并且其行为由适当的偶极固定点来控制）。在这两个范围内，有一个交叉区域，其宽度一般有几十度约化温度。重正化群方法使有可能定量地处理这样的交叉行为，这种行为本身表现出普适性特征。

8.6.2 凝聚物质中的其他多标度现象

在凝聚物质物理学中除了相变之外还有许多其他的领域，它们包括许多不同的标度并显示出类似的普适性定标行为。我们在本节中简短地讨论5个例子。

①**逾渗现象** (percolation phenomena) 是从传染性疾病的蔓延，到从多孔岩石中回采石油等许多过程中很重要的现象。在点阵模型的情况下可以十分简单地说明它的关键思想。考虑一个2维的方点阵。假设我们取一些计数器无规地放在点阵的座位上。当一个计数器被放在“空着的”座位上时，此座位就“被占用了”。我们定义那些被占用座位的**团** (cluster) 为计数器集，它可以用从一个计数器到下一个计数器的最近邻位的一些步长来得到。如果所有被占用座位的百分数 p 是小的，则团将是小的，并且只包括少量的计数器。如果更多的计数器放在点阵上，那么典型的最大的团的尺寸将增大。逾渗集中度 p_c 是这个最大团的尺寸发散时所包括的范围 (coverage) 值；当被占用座位的百分数大于或等于 p_c 时将存在一个无穷大的团，在这种情况下从计数器到计数器可以穿过任意大的点阵。我们目的的关键点是，存在**所有各种尺寸**的团，一直到取决于所包括范围 p 的典型的最大尺寸的团。（技术上，对

于 $p > p_c$, 用排除此无穷大的团来确定这个最大的尺寸。) 存在许多长度标度的团, 这决定着逾渗的普适定标性质。尽管逾渗基本上是不涉及热效应的几何现象, 但它以起着温度倒数作用的所包括的范围 p 而与相变极其相似。例如, 典型的最大团的尺寸类似于相关长度, 并且按指数 ν_p 发散 (当 p 趋于 p_c 时), ν_p 的精确值在 2 维情况下大约是 1.35。与序参量相类似的东西是无穷大团中座位的百分数。对于 $p < p_c$, 它是零, 当 p 下降到 p_c 时, 它按指数 β_p 趋于零。这样, 在 p_c 时 (恰好) 是一个无穷大的团, 但它包含点阵座位的一个趋于零的小百分数。

②**聚合物**是化合物, 它们形成由相同“单聚物”单元组成的柔性长链。长期以来它们都是化学工业的重要部门。最熟悉的可能是聚乙烯 $(CH_2)_N$; 化学分子式中的量 N 恰好代表沿着链测得的该分子的头尾长度。对聚合物许多性质的更深刻的了解都出自重正化群方法, 它认识并处理了聚合物表现出的多长度标度现象。具体地说, 让我们考虑溶液中的这样一个分子, 并让我们假设, 单聚物的连接是完全柔性的, 也就是说邻近单元的相对取向是不受约束的。然后, 在任何瞬间分子的最简单描述是利用“无规行走”, 即分子的位置用 N 个步的“醉酒式地踉跄行走”来描述。这种无规行走问题也是以悬浮在流体内或漂浮在流体上的单个粒子的 Brown 运动来实现。此问题可以精确地求解: 例如, 头尾**直线**距离 (它计量了分子的线性尺寸) 随步数 N 按 $N^{1/2}$ 增大。然而, 聚合物的这种无规行走的描述没有能考虑在溶液中聚合物可能是**自动避开的**, 也就是说, 在溶液中链是悬浮着的这种聚合物链中的单聚物可能比链中其他情况的单聚物有更大的亲和力。净效应是, 链上的链段 (它可能以无规行走交叉) 是互相排斥的, 所以链变得比无规行走更膨胀。这个问题显然包括 2 个十分不同的长度标度, 即单聚物尺寸 (它给出最小距离标度) 和物理聚合物尺寸。通过考虑沿着链的距离可以最好了解此问题固有地包含了许多长度标度: 在无规行走中, 交叉可能发生在沿链以**任何**距离分隔开的链段之间, 并且真实聚合物尺寸受在其上可能的任何一对链段之间的排斥力的影响。在这种聚合物问题中, 单聚物单元数 N 类似于相变问题中的约化温度的倒数, 而聚合物典型的直线头尾尺寸对应于相关长度, 所以关于它们的普适性指数当然也由 ν 表示。在 3 维时, ν 近似为 0.588。事实上, P.G. deGennes 已指出, 这类聚合物当极限 $n \rightarrow 0$ 时属于 n 分量 Heisenberg (或 Landau Ginzburg Wilson) 模型的普适性类。在这种情况下, 饶有兴趣的是注意到, 对应于简单无规行走行为的平均场值 $\nu = 1/2$ 要在上临界 4 维以上才是正确的, 因为聚合物的交叉是位于密度足够低, 以致技术上是没有关系的地方。

③**浑沌行为**的开始是另一个课题。在此课题中重正化群得到了重大的了解。这是一个复杂的问题: 我们集中注意的特殊情况是“通向浑沌的周期倍化途径”, 它在 M. Feigenbaum 首创的计算工作中已经研究过了。接着指出了各种各样的动力学系统包括激光和对流系统都表现出这种行为。这样一些系统的一般特点是存在一个具有周期 τ 的振荡运动。在对流情况下, 这种运动是“对流卷筒”的横向振荡, 当驱动对流的温度梯度大于某一门槛值时就出现这种振荡。当温度梯度进一步增大时, 达到了第 2 个门槛值, 此时这种振荡运动变得不稳定并且出现一个新的分量, 其频率是初始频率的 1/2; 于是这种运动的周期在第 2 个门槛值时大了 1 倍。当温度梯度进一步增大时, 这个新分量的振幅增大直至达到第 3 个门槛值, 此时出现新的分量, 其频率为初始频率的 1/4。在这个过程的数学模型中有一无限的门槛值序列, 在每一个门槛值处, 由于一个新频率分量进入, 其周期加倍, 在浑沌运动出现的该点处

这个序列便聚集起来。这显然是一个许多标度的问题，频率分量于是对应于不同的**时间标度**。这个问题中的标度现象是由 Feigenbaum 在数值研究简单数学模型中发现的。例如，如果 θ_n 是温度梯度，在这梯度时出现第 n 个周期倍化，并且如果 θ_c 是混沌运动的门槛值，那末 $\theta_c - \theta_n \propto \delta^{-n}$ ，其中 δ 是一个普适常数： $\delta = 4.6692016091\dots$ 。重正化群又提供了一个这种普适性标度行为的绝妙的描述。

④**湍流**。按固有的本质来说，完全发展的湍流也包括许多长度标度，不过在这里重正化群的适用性仍然有着某种争论。当流体以足够高的速度强行流过物体时在流体中便产生了湍流流动。例如，如果流体以低速流过管子，则流动阻力由固有流体粘度来决定。但是，在足够高的速度时，产生了不稳定的涡旋；这些涡旋强烈地相互作用以致在级联过程中产生了湍流涡，在级联过程中这些湍流涡是在一个比一个小的长度标度上产生的。这个过程受到某种耗散长度标度的限制，此处能量被转换成无规的分子运动。在这些情况下，流动阻力从而有效粘度由这些湍流涡对许多长度标度的集体作用来决定。基本问题是在粘性流体流动的 Navier-Stokes 方程的框架内来描述这个过程。1941 年 Kolmogorov 作出了关键性的发展；他得到了 Navier-Stokes 方程的定标解，在此解中与波矢量 q （即长度标度 $1/q$ ）的运动有关的能量密度正比于 $q^{-5/3}$ 。此幂律看来相当好地描述了惯性区域 [由“扰动(stirring)”力产生的大尺度涡与微观耗散尺度之间的区域] 的实验结果，尽管仍然不清楚它是否正确。在某些（近似的）重正化群研究中也已经得到了 5/3 这个值。技术上这是非常重要的领域，在此领域中基础了解方面的进展对计算机辅助设计可能有着重要的影响。

⑤**近藤 (Kondo) 效应**。最后提一下根据日本物理学家 Jun Kondo 而称为 Kondo 效应的现象是合适的。金属的电阻取决于它的温度。当温度降低时，原子的热振动变得越来越弱，并且这些热振动对电阻的贡献降低了。在含有小浓度磁性杂质的非磁性金属（例如含一些铁的铜）中发现电阻实际上达到一个最小值，然后随着进一步冷却而增大。定性地看，非常清楚，这种效应应该归功于在电子被磁性夹杂物散射的一些过程中所产生的电阻的贡献。然而，为了定量地解释这种效应，人们必须再一次面临多标度现象。这里的困难很自然是根据能量而不是根据长度来考虑。引起电流的那些电子一般有几电子伏量级的动能；由于散射过程（在这些过程中磁性夹杂物自旋的取向是倒转的）引起的电子能量的变化是 10^{-4} eV 量级的自旋倒转能量 (spin-flip energy)。于是对电阻（和其他性质）的计算要求人们处理这些极端状态之间的所有能量标度。走在相变领域前列的 K. G. Wilson 在 1974 年用重正化群方法首先迎接了这种挑战。

8.6.3 基本力：规范理论的相

在余下的几段中我们希望描述两种相关的概念。第一是，基本粒子互相作用的相对论量子理论，事实上是临界现象的例子。第二是，不同的基本力，由于它们的非常不同的性质而可能被认为是具有**相同基本结构**的模型的可能的不同相，也就是 Taylor 在本书第 17 篇文章中讨论的规范理论。

作为起点，让我们注意，对基本粒子相互作用的充分描述既要求**相对论**，因为碰撞和衰变都可能涉及速度接近于光速的高能粒子，也要求**量子力学**，因为这些过程也在亚原子距离处发生。使这两种要求结合起来的形式体系称为相对论量子场论。这种理论的原型是量子电动力学，它描述电子与电磁场的相互作用，在这种理论中，电场和磁场的 Maxwell 方程被

量子化了：在传统的形式体系中，产生算符和湮没算符是量子化的核心，它们可能产生和消灭场的基本量子，光子。以相似的立场处理电子：它们（和它们的反粒子正电子）是电场的基本量子。就是这种产生算符的形式体系表达了在 Einstein 方程 $E=mc^2$ 中隐含的质能等价性，例如，在足够高能量下的碰撞过程中，在产生真实粒子时所显示出来的情况。

如果基本场量子彼此相互作用（这是唯一真正有意义的情况），那么这些理论一般不可能精确求解。在40年代末和50年代初的一些创新的论文中，Feynman, Schwinger, Tomonaga 和 Dyson 曾指出，人们如何可能把相互作用效应作为耦合强度的幂级数来计算。为了了解这种摄动理论，那时不得不引入这种神秘的“重正化”过程，因为发现摄动展开式的每一阶都是无穷大。这些发散性可以通过引入“重正化的”耦合和粒子质量来消除。为了把这种诀窍建立在坚实的数学基础上，必须对容许动量引入截断 Λ ；在计算的结尾， Λ 可以通过令它趋于无穷大而消去。尽管看起来是非常形式的描述，但发现这种方法对于量子电动力学计算是特别好的，在量子电动力学中展开参量是精细结构常数 $\alpha=e^2/2\epsilon_0\hbar c$ （ e 是电子电荷， ϵ_0 是自由空间的电容率， \hbar 是 Planck 常数而 c 是光速），它的值很小，大约为 $1/137$ ，所以摄动展开式实际上很快收敛。那时 Stückelberg & Petermann 以及 Gell-Mann & Low 在企图了解高动量散射过程中，也引入了“重正化群”的形式体系。他们的方法都基于一种意见，即实际上存在一族消除这些发散的方法，所有这些方法最终都描述同样的物理内容。

在那时，Feynman 跟随 Dirac 的早期工作又播下了我们现在深入了解重正化群方法的种子。Feynman 指出，存在另一种表述同样的相对论量子场论的方法，它不涉及产生算符。他的方法基于下述思想，在量子理论中，几乎任何事情都可能发生；关键是得到过程似然性的正确形式。例如让我们考虑电子穿过一对间隙很小的狭缝的通道。在 Dirac-Feynman 的图形中，因为电子穿过狭缝的可能路径的叠加，在屏幕上便形成了干涉图型。这里用函数 $q(t)$ 来描述一条路径，函数 $q(t)$ 给出 t 时刻的位置 q 。同样地，在这种形式体系中，通过对场的全部历史求总和而得到相对论量子场理论，我们一般用 $\phi(x, t)$ 来表示，其中 ϕ 代表 t 时刻在 x 点的场值。对全部历史的这个总和事实上极其接近于统计力学的场表述法（在第 8.5 节中我们讨论过的）的构形总和。特别是，它也是函数的积分。

现在阐明在两种情况下函数积分结构的比较。在平衡统计力学中，没有时间，并且距离的自然测量是根据“不变式” $l^2=x_1^2+x_2^2+\dots+x_d^2$ 确定的长度 l ；在相对论中对应的量证明是 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_d^2-c^2t^2$ ，其中 d 表示两种情况下的空间维。假设现在我们选取单位使光速 c 是 1，并且用 $x_{d+1}=it$ 代替 t ，这里 $i=\sqrt{-1}$ 。于是 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_d^2-c^2t^2$ 变成 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_d^2+x_{d+1}^2$ ，恰好象在 $d+1$ 空间维中的长度（平方）。值得注意的是，它证明了这种“想象时间”的相对论量子场论实际上在数学上相当于在更高 1 维情况下的统计力学；在前一种情况下由 Heisenberg 的不确定原理（uncertainty principle）所支配的量子涨落是后一种情况下热涨落的类似物。

现在我们能够来了解“重正化”方法和它与临界现象的关系了。在统计力学中，自然界向我们提供微观长度标度，例如晶体点阵间距等。在临界点附近的合作现象（cooperative phenomena）产生了相关长度。在临界点的极限情况下，这两个长度之比趋于无穷大。同样地，对于到目前为止的所有物理相对论量子理论，我们已经指出，在第 1 个例子中必须对容许动量引入人为的上极限 Λ 等价于超微观长度标度 $\hbar/(2\pi\Lambda c)$ ，其基本原理是，在这种极限

下恢复了真实物理学，也就是在此极限下人为的标度远小于由理论中粒子的Compton波长所确定问题的自然物理标度 $h/2\pi mc$ ，其中 m 是粒子质量。因此，我们必须调整这两个长度标度之比 λ/m 趋于无穷大。正是在这个意义上，所有相对论量子场论都必须在任意多个长度标度上用有关的量子涨落来描述临界点。

已经发现了量子场论和临界现象之间的这种关系。现在让我们转到得到作为规范理论的基本力的统一图形的具体问题上。

量子电动力学，在电子和光子之间的电和磁的相互作用理论，是原型规范理论。深奥的对称概念和几何概念是规范理论实质上是什么的核心所在，对于我们来说企图在这里去评述它是不合适的。对于实际应用来讲，可以差强人意地说，所有规范理论的基本方程似乎都要求至少存在一种“规范玻色子”，它

①无质量，从而以光速运动；

②具有单位的内禀自旋；

③充当这种理论的“带电”粒子之间的力的媒质，同时产生按粒子间距平方的倒数而衰减的 Coulomb 似的力。

在量子电动力学中，规范玻色子是光子，并且它的交换是造成电荷之间的熟悉的 Coulomb 力的原因。

表面上，作为对强核力（它把夸克不可分割地结合在一起而形成核粒子——质子，中子，介子等等）和对弱力（它引起放射性核子衰变）二者都选用的理论，规范理论似乎被排除了：两者都没有有关的无质量的规范玻色子，并且二种力都是短程的，对于在质子之间的强力，其距离大约为核子尺寸 10^{-15}m ，对于弱力其距离甚至更短。

认识规范理论可以显示出依参量值而定的不同的相，是打破这种困境的关键思想，正如磁性物质根据温度可以显示出具有截然不同性质的二种不同的相那样。量子电动力学是在一个我们现在称之为Coulomb相的可能的相中。通过存在于一个不同相（现在称为Higgs相）中的理论的薄弱部分，获得了Glashow, Salam, Weinberg模型中电磁力和弱力的积分，因为我们能够理论上认识这个相的唯一途径必需还存在无自旋粒子即Higgs玻色子。在这个相中，有关的规范玻色子作为重的W粒子和Z粒子出现：在规范理论[量子色动力学 (quantum chromodynamics)] 的另一个相[称为约束相 (confining phase)] 中认识了强核力。在这个相中，物质的粒子（在这种情况下是夸克）永远被束缚在总“中性” (overall “neutral”) [在这种情况下是“色中性 (colour neutral)"] 的组合，即所观察到的核粒子中，规范玻色子（在这种情况下是8个胶子）通过它们的相互作用力同样也永远被束缚在色中性状态中。

为了使这些断言看来更合理，我们看看图8.12上对于与光子（“标量电动力学”）相互作用的带电无自旋粒子的模型所得到的相图。用与统计力学中相同类型的 Monte Carlo 方法通过离散点的有限框 (finite box) 逼近空间-时间而得到这张图。这个点阵当然是人工的数学制品；上述讨论意味着我们必须通过研究在它的临界点的邻位的“点阵规范理论”来消除它。这些相图显示，这个特殊的规范理论在所有上述3种相中都可能存在。

在很多方面，约束相看来是最不可思议的，因为它里面没有一个基本量（夸克和胶子）可以作为孤立粒子而存在。事实上我们现在了解了，实际上这是规范理论的最本质的相。其实，对于引起强核力的胶子相互作用理论，现在有充分证据说明，它是此理论的唯一可能

相，4 维空间-时间是它的下临界维，在这种临界维时，在任何耦合情况下（参考 1 维 Ising 模型）都不可能发生任何相变。幸好，量子电动力学，像标量电动力学一样，在 Coulomb 相中也可以存在，正是它使我们得以生存在其中的奇妙的化学和生物世界成为可能。

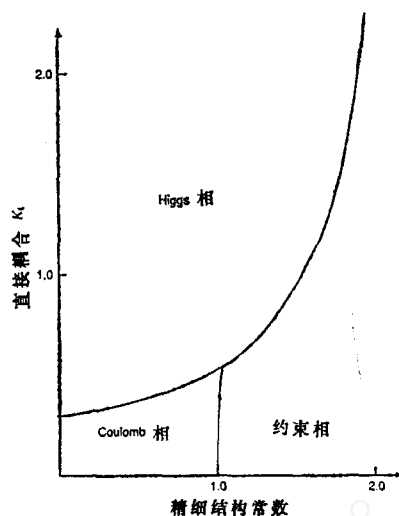


图 8.12 标量电动力学的相图。标量电动力学是描述带电标量粒子的电磁相互作用的理论。所示相图在 4 维点阵上由近似空间-时间的数值模拟得到。水平轴代表“精细结构常数” $\alpha = e^2 / (2\epsilon_0 \hbar c)$ ，其中 e 是标量粒子的电荷， α 的物理值是 $1/137$ 。在强电荷耦合时（也就是在大的 α 值时）此理论是在约束相中，在此种约束相中带电粒子永远被束缚在具有零净电荷的“分子”中。在这个相中不可能使带电粒子孤立。其轴直轴是最近邻位的粒子场之间的直接耦合 K_1 ，并且是标量粒子质量的量度。在低 α 值时，这个参量确定此理论是在 Coulomb 相中还是在 Higgs 相中

进一步的读物

Reviews of Modern Physics (1983) Vol 55, p 583 有 K. G. Wilson 在 1982 年 Nobel 物理奖授予仪式上所作的演讲文本。这篇文章陈述了重正化群方法的基本思想，概述了它们的历史的来龙去脉，并且给出了包括核心研究工作、评述文章和书籍等有关参考文献的范围很广的一览表。

程屏芬译自：The New Physics (Ed by P Davies). Cambridge University Press (1989) : 236—276. (董务民校)