粘弹性理论中的初值问题

W J Hrusa
Carnegie Mellon 大学数学系

J A Nohel
Wisconsin-Madison 大学数学科学中心

M Renardy
Virginia理工学院和州立大学数学系

提要 我们评述了模拟1维非线性粘弹性材料运动的积分微分方程的最近一些数学结果. 特别是，我们讨论了经典解的全局（在时间上）存在性和长时间行为，以及光滑初始数据在有限时间内奇性的形成. 尽管数学理论是较不完善的，但我们还是对弱解（即具有激波的解）的存在性作了一些说明. 也讨论了线性波传播方面的一些有关结果.

1 引 言

近10多年来，大量的研究致力于非线性粘弹性材料运动的积分微分方程. 本文的目的是评述已获得的某些结果和尚未解决的某些问题. 我们的注意力集中于描述粘弹性固体的方程，有关粘弹性流体的类似论文将另文发表［Renardy (1989)］.

在光滑度等技术假设不一定总是得到清楚说明的意义上，我们的介绍将是非正式的，而且我们将不打算以最大可能的一般性来阐明结果. 为了确切表述技术假设，以及为了使结果更有一般性，我们提到了原始资料和我们最近的专著［Renardy, Hrusa, Nohel (1987)，以下简称为 RHN］. 为了避免几何的复杂性，并且由于这些方程的数学理论要完善得多，所以我们的注意力只限于涉及1个空间坐标的问题. 并且，我们总是处理具有惯性的完全动态方程. 将不讨论准静态近似.

考虑均匀1维体例如均匀截面杆的纵向运动.［此问题是有点人为的，因为纵向变形杆在其截面中可能经受某种变化. 然而，存在更符合实际的运动类型，它们可以用1个空间坐标来描述（例如，参阅 Coleman, Gurtin, Herrera (1968) 的附录和 RHN 的 I.4 节)］. 我们假定物体在无应力状态时占有区间 $B\subset\mathbb{R}$. 此区间 B 将称为参考构形；而 B 中的一典型点（或质点）将用 x 来表示. 为描述运动，我们跟踪 B 中各点的演变. 因此，研究中感兴趣的各量将认为是质点 x 和时间 t 的函数.

假定物体具有单位参考密度，以 $u(x,t)$ 表示具有参考位置 x 的质点在时间 t 的位移［即 $x+u(x,t)$ 是此质点在时间 t 的位置］. 应变 ϵ 为

$$\epsilon(x,t)=u_x(x,t) \tag{1.1}$$

而线动量的平衡方程为

$$u_{tt}(x,t)=\sigma_x(x,t)+f(x,t),\quad x\in B,\quad t\geqslant 0 \tag{1.2}$$

其中σ为应力而f为（给定的）体力．下标x和t表示偏导数；我们用撇号表示单变量函数的导数．组成物体的材料类型以一个表示应力和运动之间关系的本构假设来表征．

若物体为弹性体，则应力和应变的依赖关系由下列形式的本构方程来表示：

$$\sigma(x,t)=\varphi(\epsilon(x,t)) \tag{1.3}$$

其中φ为给定的光滑函数，并有$\varphi(0)=0$和$\varphi'(0)>0$．条件$\varphi(0)=0$反映参考构形是无应力的假定，而条件$\varphi'(0)>0$意味着应力随应变而增大，至少在靠近$\epsilon=0$处是这样．为简单起见，我们暂且假定$B=\mathbf{R}$且$f\equiv 0$．于是所得运动由下列拟线性波方程所支配：

$$u_{tt}=\varphi(u_x)_x,\quad x\in\mathbf{R},\quad t\geqslant 0 \tag{1.4}$$

我们要寻求满足（1.4）并且有下列初条件的函数u：

$$u(x,0)=u_0(x),\quad u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\mathbf{R} \tag{1.5}$$

在线性情形中，$\sigma=E\epsilon$（E为正常数），方程（1.4）简化为

$$u_{tt}=Eu_{xx},\quad x\in\mathbf{R},\quad t\geqslant 0 \tag{1.6}$$

（1.6）的一个众所周知的特点是在数据中如有奇性（即在数据中或数据的导数中的间断），这些奇性在所有$t>0$的解中仍继续为奇性，而且以常速$\sqrt{E}$传播．这样一种奇性的幅度既不增大也不衰减．

对于线性方程（1.6），当且仅当奇性出现在数据中时，奇性才存在于解中．在非线性情形下，解通常得出奇性（在有限时间）——不管数据是如何光滑——因为波速$\sqrt{\varphi'}$不是常数．此问题将在第4节中更详细地讨论．

经验表明，某些材料具有记忆，即应力不仅取决于现在时间的应变，而且还取决于应变的整个时间的历史．典型的是，记忆随时间衰退，也就是在遥远的过去中所发生的扰动与较近的过去中所发生的那些扰动相比，前者对现在应力影响较小．我们将把这种材料称为粘弹性材料．Boltzmann（1876）给出了小变形的线性化本构关系

$$\sigma(x,t)=\beta\epsilon(x,t)+\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)(\epsilon(x,t)-\epsilon(x,\tau))d\tau \tag{1.7}$$

其中β为一非负常数，而m为一正单调递减函数．为了保证（1.7）有意义，我们假定m在无穷大时是可积的，且$sm(s)$在零处是可积的，即

$$\int_{1}^{\infty}m(s)ds<\infty,\qquad \int_{0}^{1}sm(s)<\infty \tag{1.8}$$

若m在$(0,\infty)$上可积，即

$$\int_{0}^{\infty}m(s)ds<\infty \tag{1.9}$$

则我们可将（1.7）改写为另一形式

$$\sigma(x,t)=E\epsilon(x,t)-\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)\epsilon(x,\tau)d\tau \tag{1.10}$$

其中

$$E=\beta+\int_{0}^{\infty}m(s)ds \tag{1,11}$$

（因为m假定为正的和递减的，且在无穷大时可积，所以当且仅当m在零处可积时（1.9）才成立．）常数E度量了应力对应变的瞬间响应，且称为瞬间应力模量．另一方面，β确定

了由于一常应变历史而引起的应力，且称为平衡应力模量；对于粘弹性固体，自然要假定 $\beta>0$。若我们令 $\epsilon=0$，当 $t<0$ 时，而令 $\epsilon=\epsilon_0$，当 $t>0$ 时，则当 $t>0$ 时应力为

$$\sigma=\left(\beta+\int_t^{\infty}m(s)ds\right)\epsilon_0=G(t)\epsilon_0 \tag{1.12}$$

由（1.12）定义的函数 G 称为应力松弛模量．若一个实验，其中应变突然从零变化到并保持为一常数值，则称为应力松弛试验．通过测定应力即得到 $G(t)$．显然，$G(0)=E$ 而 $G(\infty)=\beta$。函数 $m(t)=-G'(t)$ 称为记忆函数．m 为正值的假定意味着 G 是单调递减的，即突然变形后产生的应力将随时间的增加而松弛．由（1.7）和 m 的正值性得知，维持一应变 ϵ 所需的应力随着同号的先前应变而减小，但随着异号的先前应变而增大．m 单调递减的假定（即 G 为凸性）意味着在遥远的过去中所发生的变形与较近的过去中所发生的那些变形相比，前者对现在应力影响较小，即记忆随时间衰退．

将（1.7）代入线动量平衡方程（1.2）得

$$u_{tt}(x,t)=\beta u_{xx}(x,t)+\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)[u_{xx}(x,t)-u_{xx}(x,\tau)]d\tau+f(x,t) \tag{1.13}$$

或

$$u_{tt}(x,t)=Eu_{xx}(x,t)-\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau+f(x,t) \tag{1.14}$$

其中只有当 m 为可积时第二种形式（1.14）才成立．我们假定时间 $t=0$ 之前的 u 的历史以及 $u(x,0)$ 和 $u_t(x,0)$ 的值都是给定的．

在关于粘弹性理论的许多工作中都假定 m 在 $[0,\infty)$ 上是光滑的，因而 $m(0)$ 是有限的．然而，理论和实验的迹象表明，对于某些粘弹性材料假定

$$m(0)=+\infty \tag{1.15}$$

是合理的[例如，参阅 Doi & Edwards (1978,1979), Joseph, Riccius & Arney (1986), Laun (1975), Rouse (1953) 和 Zimm (1981)]．满足（1.15）的记忆函数将称为奇异函数．我们总是假定（但没有明确提出）m 在 $(0,\infty)$ 上光滑且（1.8）成立．然而，我们将总是明确地说明是否要求 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑．对于奇异记忆函数，就此奇性是否可积而论，即就 m 是否在零处可积而论，会出现重要的差别．我们指出，若 m 具有不可积的奇性，例如 $m(t)=e^{-t}t^{-3/2}$，则 $G(0)=+\infty$。

奇异记忆函数已应用于许多重要的工程问题[例如，参阅 Bert (1973) 和 Walton, Nachman & Schapery (1978)]．Boltzmann (1876) 早已考虑过奇异记忆函数的可能性，他提出 $m(s)\sim s^{-1}$（大的 s 除外），并使这样一个核与玻璃丝的扭转测量相吻合．

非线性粘弹性材料用本构方程来表征，这些本构方程将应力表达为应变时间历史的一个（非线性）泛函．我们只考虑那些简单材料[参阅 Noll (1958)]，简单是指在一个物质点上的应力只取决于同一物质点上的应变历史（不取决于其他物质点上的应变历史或应变的空间导数）．在我们对本构方程的讨论中省去了变量 x．

对于没有假定应力泛函具体形式的非线性粘弹性行为，其一般本构理论已由Coleman & Noll (1960), Coleman & Mizel (1967, 1968), Saut & Joseph (1982) 和Wang (1965) 给出．我们将只限于具有一个记忆函数的单积分类型的本构关系

$$\sigma(t)=F(\epsilon(t))+\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)M(\epsilon(t),\epsilon(\tau))d\tau \tag{1.16}$$

其中F和M为给定的光滑函数，且对所有的p有$F(0)=0$，$M(p,p)=0$，而m则为如上所述。函数F度量了时间过程中是常数的应变历史所引起的应力，它的导数F'称为平衡应力模量。对于粘弹性固体自然地要假定$F'(\epsilon)>0$，至少在ϵ靠近零处是这样。

若m为可积，则我们可将（1.16）改写为

$$\sigma(t)=\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)H(\epsilon(t),\epsilon(\tau))d\tau \tag{1.17}$$

其中

$$H(\epsilon,p)=M(\epsilon,p)+F(\epsilon)\left(\int_{0}^{\infty}m(s)ds\right)^{-1} \tag{1.18}$$

若固定t，且在$-\infty<\tau<t$内使$\epsilon(\tau)$值保持固定，但改变现在值$\epsilon(t)$，则（1.17）中的积分可认为是$\epsilon(t)$的函数。此函数的导数称为瞬间弹性模量，它度量了由于应变的瞬间改变所引起的应力改变。我们指出，瞬间弹性模量取决于应变的现在值以及应变的整个过去历史。（1.17）的平衡应力模量为

$$[H_{,1}(\epsilon,\epsilon)+H_{,2}(\epsilon,\epsilon)]\int_{0}^{\infty}m(s)ds \tag{1.19}$$

其中$H_{,1}$和$H_{,2}$分别表示H相对于第一和第二自变量的导数。当

$$H(\epsilon,p)=f(\epsilon)+g(p) \tag{1.20}$$

时出现（1.17）的特殊情形，这将在第5节和第6节中考虑。为了与有关此模型的文献相一致，我们引入符号

$$\varphi(\epsilon)=f(\epsilon)\int_{0}^{\infty}m(s)ds,\qquad \phi(p)=-g(p) \tag{1.21}$$

并将本构关系写成

$$\sigma(t)=\varphi(\epsilon(t))-\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)\phi(\epsilon(\tau))d\tau \tag{1.22}$$

我们指出，对于（1.22），瞬间弹性模量只取决于应变的现在值且由$\varphi'(\epsilon)$给出，平衡应力模量为

$$\varphi'(\epsilon)-\phi'(\epsilon)\int_{0}^{\infty}m(s)ds \tag{1.23}$$

对于本构关系（1.17），线性动量平衡方程（1.2）变为

$$u_{tt}(x,t)=\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)H(u_x(x,t),u_x(x,\tau))_x d\tau+f(x,t),\quad x\in B,\ t>0 \tag{1.24}$$

我们假定时间$t=0$之前的u的历史以及$u(x,0)$和$u_t(x,0)$的值是给定的，即我们取下列形式的初值：

$$u(x,\tau)=w(x,\tau),\qquad x\in B,\ \tau<0 \tag{1.25}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t(x,0)=u_1(x) \tag{1.26}$$

其中w，u_0和u_1为给定的函数。除非另有说明，我们总是假定w，u_0和u_1是光滑的。然而，我们没有必要假定在$u_0(x)=w(x,0^-)$，$u_1(x)=w_t(x,0^-)$的意义上u_0，u_1和w相容，

若区间B是有限的（或半无限的），则在B的端点处将加上一些边界条件．典型的是，在每一端点处位移和应力二者之一将是给定的．在（1.24）中进行微分，得

$$u_{tt}(x,t)=\left\{\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)H_{,1}^{*}[u_x(x,t),u_x(x,\tau)]d\tau\right\}u_{xx}(x,t)$$

$$+\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)H_{,2}^{*}[u_x(x,t),u_x(x,\tau)]u_{xx}(x,\tau)d\tau+f(x,t)$$

$$x\in B,\qquad t\geqslant 0 \tag{1.27}$$

我们看到，$u_{xx}(x,t)$ 的系数正好就是瞬间弹性模量．

本文由以下几部分组成．第2节讨论线性波传播．其中我们的目的是讨论记忆对数据中的间断性的影响，同时特别强调奇性核的影响．本文的其他部分则致力于非线性问题．

第3节包括加速度波的简要讨论．第4节讨论在具有光滑（但却是大的）初始数据的解中奇性的形成．在第5节中我们讨论光滑与小数据的经典解的全局存在性和渐近行为．

关于弱解（即具有激波的解）的存在性知道得还比较少．此课题目前正在积极研究之中．这些内容的某些说明将在第6节中给出．

2 线性波传播

在本节中我们给出关于线性波传播的某些结果的简略概要．关于此课题有大量的文献［例如，对于早期的工作可参阅 Christensen（1971）的专著］．关于这里引用结果的更广泛讨论，我们参考了 RHN 的Ⅱ.3节．

我们集中注意所谓 Rayleigh 问题，其中在一个半无限线性粘弹性体的边界上引入一个间断：

$$u_{tt}(x,t)=\beta u_{xx}(x,t)+\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)[u_{xx}(x,t)-u_{xx}(x,\tau)]d\tau,\ x\geqslant 0,\ t\geqslant 0 \tag*{(2.1)$_1$}$$

$$u(0,t)=1,\qquad t>0 \tag*{(2.1)$_2$}$$

$$u(x,\tau)=0,\qquad x\geqslant 0,\quad \tau<0 \tag*{(2.1)$_3$}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0\qquad x\geqslant 0 \tag*{(2.1)$_4$}$$

我们看到在数据中在$x=t=0$处存在一间断．（2.1）的解提供了大量关于记忆的效应的信息．

为简化叙述，我们假定m在（0,∞）上属于C^∞类（即无限可微），且

$$(-1)^k m^{(k)}(t)\geqslant 0,\qquad \forall\, t>0,\qquad k=0,1,\cdots \tag{2.2}$$

其中$m^{(k)}$为m的k阶导数．我们指出，下面引用的大多数结果在更弱得多的假定下仍然有效．然而，从应用的观点看，（2.2）是非常合理的．满足此条件的记忆函数称为完全单调的．（此类记忆函数在流变学中非常流行．）我们还假定

$$\beta\geqslant 0,\qquad m\not\equiv 0 \tag{2.3}$$

（2.1）的解的行为取决于m在零处的行为．当m具有可积奇性时的情形是特别有意义的，因为间断的光顺过程可以和有限的传播速率同时存在．

若m在［0,∞）上光滑，则对于$0\leqslant x<ct$，u为光滑（实际上是解析的），而对于$x>ct$则$u=0$，其中

$$c=\left(\beta+\int_0^\infty m(s)ds\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

[参阅 Berry (1958)]. 跨越 $x=ct$ 线，u 有一跳跃间断；跳跃的幅度 A 为

$$A(t)=\exp[-m(0)t/2c^2] \tag{2.5}$$

[参阅 Chu (1962)]. 换言之，在 $x=t=0$ 处的间断以常速传播，而其幅度按指数方式衰减.（对于纯弹性材料，此间断将以常速传播而其幅度将保持为常数.）

若我们形式地令 (2.5) 中的 $m(0)=+\infty$，则对于 $t>0$，$A(t)$ 变为零，这意味着 m 中的奇点对于解具有光顺效应. 这实际上是如下的情形：光顺的精确程度关键地取决于 m 中奇性的强度. Renardy (1982) 和 Hrusa & Renardy (1985) 给出了导致解中光顺程度变化的奇异记忆函数的一些明显例子.

若 m 为可积，则在区域 $0\leqslant x<ct$ 上 u 是解析的，而对于 $x>ct$ 有 $u=0$，其中 c 由(2.4)给出. Prüss (1987) 指出，当且仅当 $m(0)=+\infty$ 时，u 跨越 $x=ct$ 线时才是连续的（因而在四分之一平面 $x\geqslant0, t>0$ 上连续）. Desch & Grimmer (1988) 指出，当且仅当 m 具有一个比对数的奇性更强的奇性时，在四分之一平面 $x\geqslant0$，$t>0$ 上 u 才属于 C^∞ 类. 他们还指出，若 m 具有一个比对数的奇性更弱的奇性，则 u 跨越 $x=ct$ 线时不会是 C^1 类. Hrusa & Renardy (1985) 给出了一个具有对数奇性的记忆函数的例子，此例表明，在跨越 $x=ct$ 线时 u 的光滑度以正比于 t 的方式增大.

若在零处 m 具有不可积的奇性，则 (2.1) 的解在四分之一平面 $x\geqslant0$，$t>0$ 上是解析的. 由于 u 是解析的，故传播速率为无穷大.

总之，若 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑，则对于所有 $t>0$，在 $x=t=0$ 处的间断仍保持下来，但其幅度按指数式衰减. m 中的奇性对此间断有光顺效应，光顺的程度可以从无穷小（u 是连续的，但非 C^1）一直到解析地光顺. 光顺的程度随 m 中的奇性的强度而增大.

3 非线性和加速度波

线性波方面的结果表明记忆具有阻尼效应. 在没有记忆的情况下，非线性弹性响应可以导致在有限时间内由任意光滑的初始数据形成奇性；即使在小数据的情况下一般也会发生奇性的形成. 方程 (1.24) 包括了非线性瞬间弹性响应连同由于记忆引起的阻尼. Coleman & Gurtin (1965) 关于加速度波增长和衰减的工作提供了对非线性瞬间响应与记忆的阻尼效应之间的相互作用的大量深入理解.

我们考虑具有 $B=\mathbf{R}$ 和 $f\equiv0$ 的方程 (1.24)，即

$$u_{tt}(x,t)=\int_{-\infty}^{t} m(t-\tau)H(u_x(x,t),u_x(x,\tau))_x d\tau, \quad x\in\mathbf{R}, \quad t\geqslant0 \tag{3.1}$$

(Coleman & Gurtin 的分析是对于一般得多的一类本构方程作出的.) 本节自始至终我们都假定 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑，且 $m>0$，$H_{,1}>0$. 我们考虑 (3.1) 的一个解在光滑曲线 $t=\lambda(x)$ 的每一侧都属于 C^2 类，跨越该曲线时 u, u_x, u_t 都是连续的，但 u 的二阶导数有一个跳跃. 在解中的这样一种奇性称为加速度波. 我们假设，一加速度波正在传播进入静止的未变形介质中，假定对于 $t<\lambda(x)$ 有 $u(x,t)=0$，并假定 $\lambda'>0$. Coleman, Gurtin & Herrera (1965) 指出了 $\lambda'(x)=c^{-1}$，其中

$$c=\left(H_{,1}'(0,0)\int_0^\infty m(s)ds\right)^{1/2} \tag{3.2}$$

即加速度波以常速率传播.（此结论在很大程度上是以此波是传播入静止的未变形介质中的

假设为依据的.)

我们用 $A(t)$ 表示 u_{tt} 在跨越曲线 $t=\lambda(x)$ 时的跳跃. Coleman & Gurtin 指出 A 满足常微分方程

$$\frac{dA}{dt}=\alpha A^2-\beta A \tag{3.3}$$

其中

$$\alpha=-\frac{1}{2c^3}\left(H_{,11}(0,0)\int_0^\infty m(s)ds\right) \tag{3.4}$$

$$\beta=-\left(\frac{m(0)}{2c^2}\right)H_{,2}(0,0) \tag{3.5}$$

微分方程 (3.3) 可以以显式解出. (3.3) 的下列两个推论有着特别意义. 我们假定 $\alpha\neq0$ 和 $\beta>0$,

(i) 若 $|A(0)|<\beta/|\alpha|$, 则当 $t\to\infty$ 时 $A(t)\to0$;

(ii) 若 $|A(0)|>\beta/|\alpha|$, 且 $\alpha A(0)>0$, 则 $A(t)$ 在有限时间内变为无穷大.

上述结果意味着若数据是小的, 则方程 (3.1) 中记忆的阻尼效应将占支配地位, 而当数据大时, 则瞬间弹性响应中非线性将占支配地位. 遵循这些思路的若干最近的结果将在下面两节中讨论.

我们指出, 对于纯弹性材料 $H_{,2}\equiv0$, 因此 $\beta=0$. 由方程 (3.3) 得出, 若 $\alpha A(0)>0$, 则在有限时间内 $A(t)$ 变为无穷大. 由此, 任意小初幅度的加速度波可以在有限时间内发生爆炸.

Pipkin(1966) 给出了非线性粘弹性材料中加速度波的一个明显例子. 接着, Greenberg (1967) 对于很一般类型的粘弹性材料给出了具有定常加速度波的解的存在性.

Coleman & Gurtin 的结果要求 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑. 在线性情形中奇性核导致间断的瞬间阻尼. 因此期望非线性问题中奇性核也可能导致强得多的阻尼类型是很自然的. 然而, 迄今尚未获得这种性质的结果.

4 奇性的形成

若 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑且 $m>0$, $H_{,1}>0$, 则可用较直截了当的迭代法给出 (1.24) 的经典解的局部 (在时间上) 存在性, 只要给定的数据足够光滑. 解将一直存在到一个最大时间 $T_{\max}\leqslant\infty$; 若 $T_{\max}<\infty$, 则 u 的二阶导数当 $t\uparrow T_{\max}$ 时将变为无穷大.

Coleman & Gurtin (1965) 关于加速度波的工作提出, 若数据足够大, 则 $T_{\max}$ 将为有限, 即在有限时间内局部解将得出奇性. 情况确实如此, 在过去几年里已得到了这种性质的几个结果. 为了进行对比, 我们由评述 Lax (1964) 关于拟线性波方程的一个经典结果开始. 考虑初值边值问题

$$u_{tt}=\varphi(u_x)_x,\qquad 0\leqslant x\leqslant1,\quad t\geqslant0 \tag{4.1$_1$}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad t\geqslant0 \tag{4.1$_2$}$$

$$u(x,0)=0,\qquad u_t(x,0)=u_1(x) \tag{4.1$_3$}$$

其中 $\varphi'>0,\varphi''>0$, 而 u_1 光滑且在端点 $x=0,1$ 处为零. [为简单起见我们只取 $u(x,0)=0$; 而 Lax 的论证应用于一般的初数据.] 问题 (4.1) 在最大时间区间 $[0,T_{\max})$ 上具有唯一的

一个经典解．Lax 指出，若 $u_1(x)\neq 0$ 则 $T_{max}<\infty$，即在有限时间内解得出奇性，除非 u_1 恒等于零（在此情况下解也恒等于零）．当 $t\uparrow T_{max}$ 时，u 的二阶导数变为无穷大．若 $u_1(x)\neq 0$，则

$$A=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}u_1'(x)>0 \tag{4.2}$$

因 $u_1(0)=u_1(1)=0$．当 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|u_1(x)|$ 足够小时 T_{max} 的有效近似式为

$$T_{max}\approx 4\varphi'(0)[A\varphi''(0)]^{-1} \tag{4.3}$$

在对 φ 的前述假定和边界条件 $(4.1)_2$ 下，对于一般初数据的结果如下：在有限时间内解将得出奇性，除非 u 和 u_t 的初数据都恒等于零．（对于一般数据，(4.3) 的类似式更为复杂．）若以 $\varphi''<0$ 代替假定 $\varphi''>0$，则情况是相似的．

Lax 的论证关键地利用了下列事实：对于 $0\leqslant x\leqslant 1$ 和 $0\leqslant t\leqslant T_{max}$，量 $\varphi''(u_x(x,t))$ 总不为零．当 φ 具有拐点时，对于方程 (4.1) MacCamy & Mizel (1967) 和Klainerman & Majda (1981) 给出了证实奇性形成的结果．

在合适的符号假定下，(1.24) 中的记忆引起了一个与非线性瞬间弹性响应的不稳定效应相竞争的耗散机理．若解是小的，则耗散占支配地位；若解是大的，则弹性响应占支配地位．对于 (1.24) 的解人们仍然可以证实在有限时间内奇性的形成，但必须假定数据足够大，以致瞬间响应占支配地位．下面的结果是 Dafermos (1986) 的定理的特殊情形．考虑问题

$$u_{tt}(x,t)=\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)H(u_x(x,t),u_x(x,\tau))_x d\tau,\qquad x\in\mathbf{R},\ t\geqslant 0 \tag*{$(4.4)_1$}$$

$$u(x,t)=0,\qquad x\in\mathbf{R},\ t<0 \tag*{$(4.4)_2$}$$

$$u(x,0)=0,\qquad u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in\mathbf{R} \tag*{$(4.4)_3$}$$

其中 u_1 光滑且在某一有界区间之外恒等于零（即 u_1 具有紧支座）．我们假定 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑，$m>0$，$H_{,1}^{*}>0$ 和 $H_{,11}(0,0)>0$．问题 (4.4) 具有唯一的一个经典解，它一直存在到最大时间 $T_{max}\leqslant\infty$．Dafermos 证明了，给定任何数 $N,T>0$，就有相应的数 $\delta,M>0$，使得当

$$\max_{x\in\mathbf{R}}|u_1(x)|<\delta,\qquad \max_{x\in\mathbf{R}}u_1'(x)>M,\qquad \min_{x\in\mathbf{R}}u_1'(x)>-N$$

时，有 $T_{max}\leqslant T$．当 $t\uparrow T_{max}$ 时，u 的二阶导数变为无穷大．Kosinski (1977)，Slamrod (1978)，Gripenberg (1982)，Hattori (1982)，Nohel & Renardy (1987) 和 Rammaha (1987) 获得了类似性质的一些结果；关于奇性形成的一些数值工作见 Markowich & Renardy (1984)．

所有关于方程 $(4.4)_1$ 奇性形成的结果都要求当 $s\downarrow 0$ 时 $m(s)$ 保持有界．对于具有奇性核的非线性问题，了解奇性是否能由光滑数据形成很有意义．此问题目前正在研究之中．

5 全局存在性

本节讨论光滑解的全局存在性和渐近行为（当 $t\to\infty$ 时）．我们始终假定 m 满足

$$m(t)\geqslant 0,\qquad m'(t)\leqslant 0,\qquad \forall t>0 \tag*{$(5.1)_1$}$$

$$m\neq 0 \tag*{$(5.1)_2$}$$

对于本构关系（1.22）即对于运动方程

$$u_{tt}(x,t)=\varphi(u_x(x,t))_x-\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)\phi(u_x(x,\tau))_x d\tau+f(x,t) \tag{5.2}$$

已经进行了很多关于全局存在性的工作．我们假定在 $t=0$ 时之前 u 恒等于零，且在 $t=0$ 时给 u 和 u_t 以非平凡数据．于是我们考虑下列形式的初值问题：

$$u_{tt}(x,t)=\varphi(u_x(x,t))_x-\int_{0}^{t}m(t-\tau)\phi(u_x(x,\tau))_x d\tau+f(x,t),\quad x\in B,t\geqslant 0 \qquad (5.3)_1$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in B \qquad (5.3)_2$$

连同适当的边界条件．我们假定

$$\int_0^{\infty}m(t)dt<\infty,\qquad \int_0^{\infty}tm(t)dt<\infty \tag{5.4}$$

$$\varphi(0)=\phi(0)=0 \qquad (5.5)_1$$

$$\varphi'(0)>0,\ \phi'(0)>0,\ \varphi'(0)-\left(\int_0^{\infty}m(t)dt\right)\phi'(0)>0 \qquad (5.5)_2$$

我们指出，我们的假定允许核 m 在零处具有可积奇性．

为获得全局存在性，我们要求 u_0,u_1 和 f 是小的且与边界条件相容．若 m 在〔0,∞）上光滑，则上节结果表明我们必须限制数据的大小以避免在有限时间内形成奇性．对于 $m(0)=+\infty$，尚不知道对于任意大的数据人们是否能获得全局存在性．

我们先从 $B=[0,1]$ 的情形开始．为度量数据的大小我们定义

$$U(u_0,u_1)=\int_0^1\Big[[u_0(x)^2+u_0'(x)^2+u_0''(x)^2+u_0'''(x)^2$$
$$+u_1(x)^2+u_1'(x)^2+u_1''(x)^2\Big]dx \qquad (5.6)_1$$

$$F(f)=\int_0^{\infty}\int_0^1\left\{f^2+f_x^2+f_t^2+f_{xt}^2+f_{tt}^2\right\}(x,t)dxdt \qquad (5.6)_2$$

对于 Dirichlet 边界条件

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{5.7}$$

若我们假定

$$u_0(0)=u_0(1)=u_1(0)=u_1(1)=0 \qquad (5.8)_1$$

$$u_0''(0)=u_0''(1)=f(0,0)=f(1,0)=0 \qquad (5.8)_2$$

相容条件将得到满足．我们指出，若 m 在〔0,∞）光滑，则 $(5.8)_2$ 可以减弱（参阅RHN 的定理 Ⅳ.5）．存在性定理为：存在一常数 $\mu>0$，使当 u_0,u_1 和 f 满足（5.8）且

$$U(u_0,u_1)+F(f)\leqslant\mu \tag{5.9}$$

时，则对于所有 $t\geqslant 0$ 初值边值问题（5.3），（5.7）（具有 $B=[0,1]$）有唯一的一个光滑解 u．而且，当 $t\to\infty$ 时，$u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}$ 对 x 一致收敛于零．

对于 Neumann 条件

$$u_x(0,t)=u_x(1,t)=0,\qquad t\geqslant 0 \tag{5.10}$$

将有很类似的结果成立．［我们指出，（5.10）等价于 $\sigma(0,t)=\sigma(1,t)=0$，$t\geqslant 0$；例如，参阅 Dafermos & Nohel (1981) 的第 3 节．］边界条件（5.10）允许非平凡的刚性运动．

为消除这种运动的可能性，我们将数据归一化，使

$$\int_0^1 u_0(x)dx=\int_0^1 u_1(x)dx=0 \tag{5.11$_1$}$$

$$\int_0^1 f(x,t)dx=0, \quad \forall t>0 \tag{5.11$_2$}$$

作（5.11）的假定并不丧失一般性，因为具有一般数据的问题总是可以转化为一个等价问题，其中数据满足（5.11）[例如，参阅Dafermos & Nohel（1981）的第1节]. 代替（5.8），现在我们假定

$$u_0'(0)=u_0'(1)=u_1'(0)=u_1'(1)=0 \tag{5.12}$$

则存在性定理为：存在一常数 $\mu>0$，使当 u_0,u_1 和 f 满足（5.9），（5.11），（5.12）时，对于所有 $t\geqslant0$，初值边值问题（5.3），（5.10）有唯一的一个光滑解 u. 而且，当 $t\to\infty$ 时，$u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt}$ 对 x 一致收敛于零.

若将（5.10）用下式代替：

$$u_x(0,t)=u(1,t)=0, \qquad t\geqslant0 \tag{5.13}$$

[或 $u(0,t)=u_x(1,t)=0$]，类似结果仍成立. 由于边界条件（5.13）不允许非平凡的刚性运动，所以没有理由要求（5.11）. 应当假定适当"混合"型的（5.8），（5.12）条件.

对于当 $B=\mathbf{R}$ 时的情形，我们引入

$$U_0^*(u_0,u_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[u_0'(x)^2+u_0''(x)^2+u_0'''(x)^2+u_1(x)^2+u_1'(x)^2+u_1''(x)^2\right]dx \tag{5.14$_1$}$$

$$F^*(f)=\left[\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(x,t)^2dx\right)^{1/2}dt\right]^2$$

$$+\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{f_x^2+f_t^2+f_{xt}^2+f_{tt}^2\right\}(x,t)dx\,dt \tag{5.14$_2$}$$

来度量数据，而存在性定理则为：存在一常数 $\mu^*>0$，使当

$$U_0^*(u_0,u_1)+F^*(f)\leqslant\mu^* \tag{5.15}$$

时，对于所有 $t\geqslant0$，初值问题（5.3）（具有 $B=\mathbf{R}$）有唯一的一个光滑解 u. 而且，当 $t\to\infty$ 时，u_x，u_t，u_{xx}，u_{xt}，u_{tt} 对 x 一致收敛于零. [我们指出，即使人们在（5.14）的被积式中加上 $u_0(x)^2$，此定理也不能提供有关 $t\to\infty$ 时位移 $u(x,t)$ 的行为的任何信息.]

上面引用的各定理是综合了 Dafermos & Nohel（1981），Hrusa & Nohel（1985），Hrusa & Renardy（1986）和 Hrusa（1988）的结果. 对于（5.3）第一个全局存在性结果是 MacCamy（1977）对 $\phi=\varphi$ 的特殊情形证实的. 对于此特殊情形的存在性定理也已由 Dafermos & Nohel（1979）和 Staffans（1980）获得. Greenberg（1977）获得了对于（5.2）具有 $m(t)=\exp(-\alpha t)$ 情况的全局估计.

上面所描述的结果可推广到本构关系（1.17），只要 m 满足（5.1）和（5.4）. 代替（5.5），应假定

$$H(0,0)=0 \tag{5.16}$$

$$H_{,1}(0,0)>0, \qquad H_{,2}(0,0)<0 \tag{5.17$_1$}$$

$$H_{,1}(0,0)+H_{,2}(0,0)>0 \tag{5.17$_2$}$$

对于在 $[0,\infty)$ 上光滑的记忆函数，Hrusa (1983, 1985) 讨论了更一般类型的本构关系。Hrusa & Renardy (1988) 讨论了 m 中可积奇性的情形。

Renardy (1988) 证实了对本构关系 (1.16) 当 m 在零处具有不可积的奇性时的一个全局存在性定理。他考虑了问题

$$u_{tt}(x,t)=F(u_x(x,t))_x+\int_{-\infty}^{t}m(t-\tau)$$

$$\times M(u_x(x,t),u_x(x,\tau))_x d\tau+f(x,t),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ t\geqslant 0 \qquad (5.18)_1$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0,\qquad t\geqslant 0 \qquad (5.18)_2$$

$$u(x,t)=w(x,t),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\ t<0 \qquad (5.18)_3$$

$$u(x,0^+)=w(x,0^-),\ u_t(x,0^+)=w_t(x,0^-),\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (5.18)_4$$

其中 w 为给定的光滑函数，它满足 $t\leqslant 0$ 时的方程 $(5.18)_1$ 和边界条件 $(5.18)_2$。当然，通过适当定义 $t\leqslant 0$ 时的 $f(x,t)$，人们总可以使历史 w 满足 $t\leqslant 0$ 时的运动方程 $(5.18)_1$。然而，这假定了跨越 $t=0$ 时 f 为光滑，而且这代表了 $t>0$ 时解与给定历史的相容性。[我们指出，当 m 有不可积的奇性时，必须要求 $w(x,0^-)=u(x,0^+)$。]

关于 F 和 M 的假定为

$$F(0)=0,\quad M(p,p)=0,\qquad \forall p\in\mathbf{R} \qquad (5.19)_1$$

$$F'(0)>0,\quad M_{,1}(p,p)=-M_{,2}(p,p)>0,\quad \forall p\in\mathbf{R} \qquad (5.19)_2$$

记忆函数 m 假定满足

$$m(t)>0,\qquad m'(t)<0,\qquad \forall t>0 \qquad (5.20)_1$$

$$\int_0^\infty tm(t)dt<\infty \qquad (5.20)_2$$

且满足附加的一个频域型条件。为说明此条件我们令

$$K(t)=\int_t^\infty m(s)ds,\qquad \forall t>0 \qquad (5.21)_1$$

$$\hat K(i\omega)=\int_0^\infty e^{-i\omega t}K(t)dt,\qquad \forall \omega\in\mathbf{R} \qquad (5.21)_2$$

我们假定存在一常数 $C>0$，使

$$|\mathrm{Re}\hat K(i\omega)|\geqslant C|\mathrm{Im}\hat K(i\omega)|,\qquad \forall\omega\in\mathbf{R} \qquad (5.22)$$

[例如，当 $t\to 0^+$ 时若 $m(t)\sim t^{-\alpha}$，则对于 $1<\alpha<2$ 的某一 α 值此假定将得到满足。] 在上述假定下，存在一常数 $\nu>0$，使当 f 在 $[0,1]\times\mathbf{R}$ 上为平滑且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\left\{f^2+f_t^2+f_{tt}^2\right\}(x,t)dx\,dt\leqslant\nu \qquad (5.23)$$

时，问题 (5.18) 有唯一的一个光滑的和小的解（在适当的函数空间中）；且对于所有 $t\geqslant 0$ 它都存在。而且，当 $t\to\infty$ 时，u, u_x, u_t 对 x 一致收敛于零。

在 (5.23) 的意义上假定 f 是小的意味着给定的历史 w 必须是小的。尚不知道对于大的数据情形全局解是否存在。此问题目前正在研究之中。Renardy (1988) 给出了大数据时的一个局部（在时间上）存在性定理。Hrusa & Renardy (1988) 给出了一个相关的局部存在性定理。

6 关于弱解的一些说明

所谓弱解指的是允许应变 u_x 和速度 u_t 具有间断的一个位移场 u，且在分布的意义上它满足运动方程. 从实验中观察到了由间断的应变场和速度场很好模拟了的运动［例如，参阅 Nunziato, Walsh, Schuler & Barker (1974) 和 Walsh (1985)］. 而且，根据有关奇性形成的结果，若对于大数据的情形期望有全局存在性，则必须考虑弱解［至少当 $m(0)$ 为有限时］.

已有许多关于粘弹性介质中激波的正规研究［参阅 Chen (1973) 的在"物理百科全书"中的文章和其中引用的文献］. 然而，尽管它很重要，但关于弱解的存在性仍然知道得比较少.

对于很一般类型的本构关系（具有光滑记忆函数），Greenberg (1967) 证实了具有定常激波的一种特殊类型弱解的存在性，这种弱解即形式为 $u(x,t)=g(x+ct)$ 的解，其中 c 为常数，而 g' 有一跳跃间断. 在 RHN 的 Ⅱ.6 节中已指出，在对 H 的适当假定下，当 m 有一可积奇性时，Greenberg 的证明可应用于本构关系 (1.17).

对于具有可积奇性的记忆函数，Londen (1978) 和 Engler (1988) 已证实了弱解的全局（在时间上）存在性. 他们的结果适用于很一般类型的数据（它允许初应变和初速度是间断的）；不需要限制数据的大小. 然而，对于本构函数需要增长条件（对于大应变情形）；实验数据表明，这种增长条件可能不总是合适的. Londen 考虑了在 $\phi=\varphi$ 的特殊情形下的初值边值问题 (5.3)，(5.7)（具有 $B=[0,1]$）. Engler 研究了本构关系 (1.17). 他还研究了 K-BKZ 材料的某些反平面剪切运动，这种材料可认为是 (1.17) 的 3 维比拟. 为使这种运动成为可能，对本构关系需要有一个限制. Londen 和 Engler 的论证基本上利用了 $m(0)=+\infty$ 这个假定.

最近，Nohel, Rogers & Tzavaras (1988) 对 $\phi\equiv\varphi$ 的特殊情形下具有 $B=\mathbb{R}$ 的初值问题 (5.3) 证实了弱解的（在时间上是全局的）存在性. 他们假定 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑，$\varphi'>0$，且 φ 恰好有一个拐点. 他们的定理适用于很一般类型的初数据（它允许初应变和初速度是间断的）. 证明基本上利用了 m 在 $[0,\infty)$ 上光滑且 $\phi\equiv\varphi$ 的假定；似乎并不能直截了当地推广到更一般类型的本构方程中去.

弱解的更完善的存在性理论的进一步发展问题目前正在积极研究之中. 作为起步，一些作者已研究了（标量的）一阶积分微分方程的弱解［例如，参阅 Greenberg, Hsiao & MacCamy (1981) 和 Dafermos (1988)］.

参 考 文 献（61篇，略）

钟宏九译自：*Appl. Mech. Rev.*, **41**, 10 (1988)：371—378.

（程屏芬 董务民校）