

## 非线性力学场论的几个基本课题\*

熊祝华

郑泉水

湖南大学工程力学系, 长沙 (邮政编码410082)

江西工业大学土建系, 南昌 (邮政编码330029)

**摘要** 最近10年, 在变形体转动的描述和应用, 应变的度量和应用, 以及应力、应变的客观性导数这三个非线性力学场论中互相关联的基本课题方面, 提出了许多新问题, 作出了大量的研究工作。本文综合介绍了其中一些方面的情况, 并概述了作者的相应工作。

**关键词** 非线性力学场论; 变形体局部转动; 变形体整体转动; 应变度量; 客观性导数; 广义Dienes问题; 率型本构方程; 主轴法; 拟主轴法

连续统 (continuum) 作为物质的唯象模型, 涉及广泛的研究领域。连续统力学或连续统物理不仅仅是众多学科的共同基础, 其本身也有着越来越重要和直接的工程实用价值, 已引起日益增多的力学家、数学家、物理学家、化学家以及各种工程学家的重视。在连续统力学领域, “经典场论”<sup>[1]</sup> 和 “非线性场论”<sup>[2]</sup> 这两部里程碑性的经典名著, 全面系统地总结了60年代中期以前场论方面的成就。从此连续统力学立足于坚实的基础上, 朝着更高层次和更广泛的领域迅速发展, 同时在上应用上也取得了越来越多的成果。70年代的四卷专著“连续统物理学”<sup>[3]</sup> 则是继 [1, 2] 后的又一包罗广泛研究成果的系统性总结。

描述连续统时空现象的工具是场论。转动、应变、客观性导数是场论的三个重要基础方面。近10年来在这三个方面出现了大量工作, 尤其是在转动和客观性导数方面取得了重要进展, 其中有我国学者的许多贡献。相对于转动和客观性导数而言, 应变度量研究的历史最长, 也最为成熟。在概念上, 应变的新发展是提出了许多 (一般不再具有对称性的) 非经典意义的应变度量, 但本文将限于讨论经典意义的应变。从理论上讲, 近10年来在 (经典) 应变方面的发展主要是关于应变的不变性表示。转动和客观性导数是两个关联十分密切的课题, 尽管它们在近10年间已取得重要进展, 但仍不很成熟。在转动方面, 象以转动作为基本变量之一的实用大变形理论 (如杆、壳非线性理论)、变形体的整体转动等都是有待继续研究的重要课题。在客观性导数方面, 如何获得对物质的有效旋率 (如塑性旋率) 的深切理解仍是一个难点, 而这是与率型本构方程的实用形式密切相关的。本文将分三节具体介绍这

\* 第3届全国近代数学和力学会议 (MMM III) (1989年5月25—30日, 江西庐山) 大会报告。

些方面的进展情况。

### 1 变形转动

变形体应变理论和转动理论都起源于Cauchy<sup>[4-6]</sup>的工作。他提出著名的Cauchy平均转动概念<sup>[6]</sup>来度量变形体的局部平均转动。Cauchy平均转动(及Новожилов平均转动)的现代描述见[1]。

变形体 $\mathcal{B}$ 在三维欧氏空间中变形运动,其物质典型点在 $\mathcal{B}$ 的初始构形和当前构形的位置矢量分别记为 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{x}$ ;  $\mathbf{X}$ 点处的物质线元 $d\mathbf{X}$ 及其变形 $d\mathbf{x}$ 由变形梯度 $\mathbf{F} = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{X}$ 关联为

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \quad (1)$$

任意给定一个方向(即一个单位矢量) $\mathbf{p}$ ,所有与 $\mathbf{p}$ 垂直的矢量构成的集合 $\Pi$ 便是 $\mathbf{p}$ 的法平面。把 $d\mathbf{X}$ 和 $d\mathbf{x}$ 都投影到 $\Pi$ 上分别得到 $\Pi$ 上的微矢量 $d\mathbf{X}^*$ 和 $d\mathbf{x}^*$ 。由 $d\mathbf{X}^*$ 的方向绕 $\mathbf{p}$ 右旋到 $d\mathbf{x}^*$ 的方向所转过的角度 $\theta_p^{(1)}$ 便叫物质线元 $d\mathbf{X}$ (绕 $\mathbf{p}$ 的)变形转角(图1)。

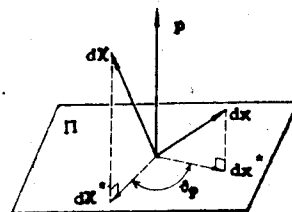


图 1

容易证明,  $\theta_p$ 仅仅与 $\mathbf{F}$ ,  $d\mathbf{X}$ 的方向和 $\mathbf{p}$ 有关,与 $d\mathbf{X}$ 的长度无关。给定 $\mathbf{F}$ , 选定 $\mathbf{p}$ , 则 $\theta_p$ 便只是方向的函数。引进由所有方向构成的方向集 $\mathcal{D}$ , 以及 $\mathcal{D}$ 中所有与 $\mathbf{p}$ 垂直的方向集 $\mathcal{D}_p$ , 则 $\theta_p$ 作为 $\mathcal{D}$ 上的函数, 它在 $\mathcal{D}$ 的子集 $\mathcal{D}_p$ 上的平均值便是著名的绕 $\mathbf{p}$ 的Cauchy平均转角

$$\overline{\theta_p} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}_p} \theta_p^{(1)} \quad (2)$$

上述定义表明, Cauchy平均转角的确是一个几何意义明确且很直观的变形体平均转动度量, 然而, 近一个半世纪以来却一直未能获得该平均转动的任何具体的表示公式。

1948年Новожилов<sup>[7]</sup>用 $\text{tg } \theta_p$ 的平均值

$$\text{tg } \tau_p = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}_p} \text{tg } \theta_p \quad (3)$$

替代 $\overline{\theta_p}$ , 获得了关于这个所谓变形体局部平均转动的Новожилов度量 $\text{tg } \tau_p$ 或Новожилов平均转角 $\tau_p$ 的赋值公式(详见本文公式(10))。这一结果被认为是关于变形体局部平均转动度量的最好结果<sup>[8]</sup>, 被普遍引用至今。[9]按照[1]的建议, 用 $\cos \theta_p$ 的平均值

$$\overline{\cos \theta_p} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{D}_p} \cos \theta_p \quad (4)$$

描述变形体的局部平均转动, 在几种特殊情形下给出了赋值表示公式。[10]最近完成了Cauchy平均转动的直接表示。上述事例表明, 研究变形体的转动相当困难([1], p275)。事实上, 讨论变形体的转动似乎从一开始便在概念上陷入了困境。严格地说, 转动是一个有着以刚体为背景的古老概念; 一个刚体只有一个转动, 它可以由一个转动张量描述(或用三个Euler-Rodrigues参数, 或用Gibbs矢量等描述, 参见[11]或[12]ch.14)。然而, 从刚体转动观念来看, 变形体内不仅不同点(一般)有不同的转动, 甚至同一点都可以有很多不同的转动度量; 从一定点出发的不同的物质线元的变形转动也(一般)不相同。变形体转动还有局部转动和整体转动, 纯几何意义的转动和材料本身内结构微定向(如晶体定向)转动之别。

1) 小号字母下有波线的与该字母的黑体相当; 小号字 $\mathcal{D}$ 应视为 $\mathcal{D}$ 。——编者

对变形梯度  $F$  作极分解

$$F = QU = VQ, \quad U = \sqrt{F^T F}, \quad V = \sqrt{FF^T} \quad (5)$$

其中  $Q$  是有限转动张量,  $U$  和  $V$  都是正定对称张量, 分别叫**右**和**左伸长张量**. 自从 [13] 把分离了转动与应变的极分解 (5) 应用于连续统力学, 尤其是 [14] 表明 (包含绝大多数实际材料的) **简单物质** 的本构方程可通过客观性原理, 把极分解中转动与应变的分离转变成本构方程中分离出转动和应变的影响之后, 极分解已成为连续统力学中最重要的基本公式之一. 然而, 对如此重要的极分解 (5) 中的有限转动张量  $Q$  的几何机理的了解却一直很少. 除众所周知的  $Q$  代表应变主轴的转动外<sup>1)</sup>, 只能再列举 [15] 的最小偏差意义和 [16] 指出的平面问题的  $Q$  等价于 Cauchy 平均转动. [17, 18] 得到了类似于 [15] 的结论, 即按照  $L^2$  模,  $Q$  在各种转动张量中最靠近  $F$ .

最近新发现  $Q$  的近 10 种重要几何意义. 这些新发现并综合  $Q$  的已有几何意义, 提供了足够的理由建议把  $Q$  正式命名为**主转动张量**. 若记  $Q$  的典则表示为 (例如参见 [19, 20])

$$Q = \cos\theta I + \sin\theta I \times l + (1 - \cos\theta) l \otimes l = I + \sin\theta L + (1 - \cos\theta) L^2 \quad (6)$$

$$(0 \leq \theta \leq \pi, \quad |l| = 1, \quad L = l \times l)$$

其中  $l$  为单位二阶张量, 反称张量  $L$  具有单位长度的轴矢量  $l$ . 这里相应地命名  $l$  为**主转动轴**,  $\theta$  为**主转动角**.

与位移、应变在连续统力学中被普遍作为基本未知参量不同, 转动似乎长期游离于连续统力学的直接应用之外. 80 年代之前只有很少论文报告了转动作为基本参量的工作. 可列举 [21—23] 用主转动张量  $Q$  表达非经典形式的协调条件, 更早的还可见 [24] 及其文献中的一些论文. [25] 探讨了刚性转动的虚运动对弹性稳定的能量判据的影响. [26] 首先采用主转动张量  $Q$  作为独立的基本变量之一 (其他的基本变量是第一 Piola-Kirchhoff 应力、右伸长张量  $U$  和位移  $u$ ), 给出了有限弹性的混合变分原理.

最近 10 年出现许多以主转动张量  $Q$  或与之等价的

$$\Omega = \sin\theta l, \quad \theta = 2 \operatorname{tg}(\theta/2) l, \quad \omega = \theta l \quad (7)$$

等等可统称为**主转动矢量**的量作为基本几何参量的理论与应用方面的工作. [27] (更早的还可见 [28]) 利用主转动张量表示的非经典协调条件 (例如参见 [22]), 估计小应变条件下转动可能达到的量值, [29] 则利用该非经典协调条件证明了只有杆、壳之类具有特殊几何构形的变形体才可能实现小应变伴随大转动变形. [30—35] 继续发展了以主转动张量  $Q$  为基本独立变量之一的各种 (关于有限弹性, 以及用于杆、板、壳非线性理论的) 非经典变分原理. [36—38] 表明采用转动作为独立变量在数值方法求解大变形问题时同样是卓有成效的. 关于有限转动的应用的更多文献可参见 [39].

[40, 41] 在 [42] 的应变主轴标架思想基础上系统地发展了非常有效的独特的**主轴法**: 主转动被两组应变主轴所替代而隐蔽起来, 使各种复杂应变、应变率、转动、转动率、应力、应力率等的表示变得形式简单, 从而获得一系列别的方法难于求得的重要基础性结果.

[43—46] 发展了所谓**伸长基**和**转动基**的方法, 同样可达到表述或隐蔽主转动张量的目的, 并在非线性壳体理论中获得了重要应用. 类似的工作还可参见 [39] 中的论文. 若采用拖

1) Cauchy 应变椭球概念事实上诱导了  $Q$  的该层几何意义.

带坐标系 $\{\theta^i\}$ , 并记 $\mathcal{B}$ 的初始和当前构形上的自然基矢分别为

$$\mathbf{G}_i = \partial \mathbf{X} / \partial \theta^i, \quad \mathbf{g}_i = \partial \mathbf{x} / \partial \theta^i \quad (8)$$

则局部变形(1)可等价描述为

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad (9)$$

注意到极分解(5), 可引进伸长基 $\{\mathbf{S}_i\}$ 和转动基 $\{\mathbf{r}_i\}$ 如下:

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i = \mathbf{Q} \mathbf{S}_i = \mathbf{V} \mathbf{r}_i, \quad (\mathbf{S}_i = \mathbf{U} \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{Q} \mathbf{G}_i) \quad (10)$$

[10]发表的 Cauchy 平均转动表示公式解决了一个半世纪未解决的非线性力学场论中的重要基本问题. 图1已解释过物质线元 $d\mathbf{X}$ 的绕 $\mathbf{p}$ 轴的变形转角 $\theta_p$ 的几何含义. 设 $\{\mathbf{e}_i\}$ 是标准正交基, 满足 $\mathbf{e}_3 = \mathbf{p} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ . 用单参数 $\varphi$ 表示 $\mathbf{p}$ 的法平面 $\Pi$ 上的方向即 $\mathcal{D}_p$ 中元素如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \mathbf{N}(\varphi) = & \cos(\varphi - \varphi_0) \mathbf{e}_1 \\ & + \sin(\varphi - \varphi_0) \mathbf{e}_2 \quad (-\pi < \varphi \leq \pi) \end{aligned} \quad (11)$$

可以证明, 方向 $\mathbf{N}(\varphi)$ 绕 $\mathbf{p}$ 的表形转角 $\theta_p$ 可以用变形转角圆的平面坐标系 $\{x, y\}$ 中的图象(图2)明显表出. 图2中, 圆心坐标 $(x_p, y_p)$ 及半径 $R_p$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} x_p &= \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{F} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \mathbf{p}) = 1 + \frac{1}{2}(\text{tr } \mathbf{E} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2}(F_{11} + F_{22}) = 1 + \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22}) \\ y_p &= \mathbf{w} \cdot \mathbf{p} = w_3 = W_{21} = (1/2)(F_{21} - F_{12}) \\ R_p &= \frac{1}{2} \sqrt{(F_{11} - F_{22})^2 + (F_{21} + F_{12})^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这里分量皆为相应基 $\{\mathbf{e}_i\}$ 的, 且已引用了变形梯度 $\mathbf{F}$ 的笛卡儿分解

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{E} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} - \mathbf{F}^T) = \mathbf{w} \times \mathbf{I} \quad (13)$$

从图2或用代数方法, 都可以证明, 图2中圆心 $(x_p, y_p)$ 的幅角 $\chi_p$

$$T_p \cos \chi_p = x_p, \quad T_p \sin \chi_p = y_p, \quad (T_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}) \quad (14)$$

正好等于绕 $\mathbf{p}$ 的 Cauchy 平均转角, 即

$$\bar{\theta}_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_p(\mathbf{N}(\varphi)) d\varphi = \chi_p \quad (15)$$

这便是[10]的主要结果. 称转轴为 $\mathbf{p}$ , 转角为 $\bar{\theta}_p$ 的转动张量为绕 $\mathbf{p}$ 的 Cauchy 平均转动张量.

绕 $\mathbf{p} = \mathbf{e}_3$ 的 Новожилов 平均转角 $\tau_p$ 的表示公式为<sup>[7,10]</sup>

$$\text{tg } \tau_p = \text{sgn}(x_p) \frac{W_{21}}{\sqrt{(1 + E_{11})(1 + E_{22}) - E_{12}^2}} = \text{sgn}(x_p) \frac{y_p}{\sqrt{x_p^2 - R_p^2}} \quad (16)$$

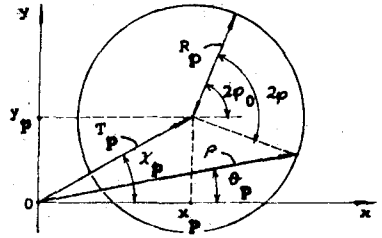


图 2

其中  $\text{sgn}(x_p)$  为数  $x_p$  的正、负符号。与 (16) 对照, 从 (14), (15) 有

$$\lg \bar{\theta}_p = \frac{W_{21}}{1 + \frac{1}{2}(E_{11} + E_{22})} = \frac{y_p}{x_p} = \frac{F_{21} - F_{12}}{F_{11} + F_{22}} \quad (17)$$

可见, Cauchy 平均转角不仅在几何意义上, 而且其表示公式都比 Новожилов 平均转角好得多。进一步, 公式 (16) 必须限于变形满足  $|x_p| > R_p$ , 才有意义, 而公式 (14), (15) 几乎不受到变形的限制, 只要是连续变形, 都可确定  $\bar{\theta}_p$ 。

[10] 中还特别证明了当  $p=1$  为主转动轴时  $\bar{\theta}_p = \Theta$  刚好是主转动角; 换言之, 主转动张量  $\mathbf{Q}$  的确确也是一个 Cauchy 平均转动, 相应的转轴为  $\mathbf{Q}$  的特征方向, 即主转动轴  $l$ 。

最近, [47] 对郑泉水和黄克智的结果 (17) 作了分析推导, 但是他们的推导实际上只是 [48, 49] 的全面复分析推导的特殊情况。[47] 中对变形作了限制, 用本文符号该限制便是

$$T_p > R_p, \text{ 即 } F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21} > 0 \quad (18)$$

此外, [50, 51] 曾未作解释地论及主转动  $\mathbf{Q}$  在一个平面 (如  $\Pi$ ) 上的“分量”, 再按照平面问题极分解 Biot 公式<sup>[42]</sup> (参见 [16]) 给出该“分量”的转角公式, 其形式与 (17) 一致。

Cauchy 平均转动, 以及由此派生的 Новожилов 平均转动等等都是基于变形转角 (或它的某种函数) 的平均定义的平均转动度量, 它们存在一个难于十分妥当处理的缺陷, 即变形转角一般仅仅被确定到可相差任何  $2\pi$  的整数倍。这种由变形转角出发的平均转动概念也很难作出实际可行的推广。比如, 空间全部方向集合  $\mathcal{D}$  的变形转角  $\theta_p$  的平均值

$$\bar{\theta}_{p, \mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \theta_p / \int_{\mathcal{D}} 1 \quad (19)$$

便得不到完整的赋值公式 (参见 [48, 49])。然而, 从概念上讲, 用  $\bar{\theta}_{p, \mathcal{D}}$  作为绕  $p$  的变形转角平均理应比  $\bar{\theta}_p$  (见式 (2)) 作为绕  $p$  的变形转角平均更好。进一步, 对一般的方向子集  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{D}$ , 可以想象, 几乎不可能求得平均值的表达式

$$\bar{\theta}_{p, \mathcal{G}} = \int_{\mathcal{G}} \theta_p / \int_{\mathcal{G}} 1 \quad (20)$$

设  $(\mathcal{G}, \mu)$  是方向集  $\mathcal{D}$  带测度  $\mu$  的方向子集,  $\mathbf{F}$  是给定的变形梯度,  $\mathbf{R}$  是有限转动张量。那么, 由  $L^2$  模可定义  $\mathcal{G}$  的实际变形  $\mathbf{F}\mathcal{G} = \{\mathbf{F}\mathbf{N}; \mathbf{N} \in \mathcal{G}\}$  和纯转动变形  $\mathbf{R}\mathcal{N} = \{\mathbf{R}\mathbf{N}; \mathbf{N} \in \mathcal{G}\}$  之间的一种偏差

$$E(\mathbf{R}, \mathcal{G}) = \int_{\mathcal{G}} |\mathbf{F}\mathbf{N} - \mathbf{R}\mathbf{N}|^2 d\mu \quad (21)$$

记  $\text{Rot}$  是转动张量群,  $\text{Rot}_p$  是  $\text{Rot}$  中转轴为  $p$  的全体转动张量构成的  $\text{Rot}$  的子集。郑泉水和黄克智<sup>[48, 49]</sup> 定义方向子集  $\mathcal{G}$  的 (相对测度  $\mu$  的) 广义局部平均转动  $\mathbf{R}_p$  为  $E(\mathbf{R}, \mathcal{G})$  作为  $\text{Rot}$  上函数的最小值点;  $\mathcal{G}$  的 (相对  $\mu$  的) 绕  $p$  的广义局部平均转动  $\mathbf{R}_{p, \mathcal{G}}$  则为  $E(\mathbf{R}, \mathcal{G})$  作为  $\text{Rot}_p$  上函数的最小值点。[48, 49] 的研究表明, 广义局部平均转动是 Cauchy 平均转动的

1) 凡小号字  $g$  均应视为  $\mathcal{G}$ 。——编者

一种非常自然的推广或延拓,体现在方向子集  $\mathcal{D}_p$  的绕  $p$  的广义局部平均转动正好等于绕  $p$  的 Cauchy 平均转动;且方向集  $\mathcal{D}$  的绕  $p$  的广义局部平均转动也等于绕  $p$  的 Cauchy 平均转动;任意标准正交标架的绕  $p$  的广义局部平均转动也等于绕  $p$  的 Cauchy 平均转动。求广义局部平均转动一般都比较容易。

根据 [10] 和广义局部平均转动概念, [48,49] 赋予了主转动张量  $Q$  近 10 种新的几何意义: ①  $Q$  代表任何标准正交标架的广义局部平均转动; ②  $Q$  代表方向集  $\mathcal{D}$  的广义局部平均转动; ③  $Q$  所代表的纯转动变形在所有纯转动变形中与实际变形在局部的偏差为最小; ④  $Q$  代表绕主转动轴向的 Cauchy 平均转动; ⑤  $Q$  代表方向集  $\mathcal{D}$  绕主转动轴向的广义局部平均转动; ⑥  $Q$  代表任何标准正交标架绕主转动轴向的广义局部平均转动; ⑦  $Q$  代表任何两个与主转动轴垂直,且各自垂直的方向的集合绕主转动轴的广义局部平均转动;等等。之所以建议把  $Q$  命名为**主转动**,包含  $Q$  代表**主轴转动**,代表各主要的平均转动等几何含意。

众所周知,在小变形时变形梯度  $F$  的反称部分  $W$  近似代表了平均变形转动;用平均转动精确表示式 (17) 可以更清楚地证明这一点。人们一直很关心大变形时  $W$  的作用。从 [10, 48,49] 的结果出发, [52] 证明了绕  $W$  的轴矢量  $w$  的方向  $\hat{w} = w/|w|$  的 Cauchy 平均转动在应变不大时是非常靠近主转动  $Q$  的。记 Biot 应变为  $\varepsilon = U - I$ , [52] 得到结果

$$0 \leq \Theta - \hat{\theta}_w \leq 2\|\varepsilon\|^2 \quad (22)$$

这项结果奠定了一种新的“中等应变伴随大转动变形”实用化理论的基础。关于主转动轴  $\hat{w}$  与  $w$  的偏差,有 [52]

$$\hat{w} - I = O(\|\varepsilon\|), (2w + Ew)/|2w + Ew| - I = O(\|\varepsilon\|^2) \quad (23)$$

变形体转动的另一个值得重视、尚很少开发的领域是整体平均转动的研究。有大量实际问题只关心整体平均,如体操运动员空翻转角,飞机的俯仰角、滚动角、偏航角,卫星在地球轨道上的方位等等。[53] 基于 Cauchy 平均转角及广义局部平均转动,从变形函数出发直接定义了一种**整体转动**(和整体变位);由变形前物体的质心惯性主轴标架  $\{N_k^{(1)}\}$  到变形后物体的质心惯性主轴标架  $\{n_k^{(1)}\}$  的转动定义了一种所谓**惯性主轴意义下的整体平均转动**  $R^{(1)}$  (图 3):

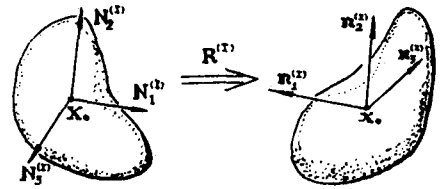


图 3

$$n_k^{(1)} = R^{(1)} N_k^{(1)}, \text{ 或 } R^{(1)} = \sum_{k=1}^3 n_k^{(1)} \otimes N_k^{(1)} \quad (24)$$

记  $m$  为变形体的质量;  $v_c$  为变形体当前构形的平均速度(等于质心速度);

$$i_c = \sum_k a_k n_k^{(1)} \otimes n_k^{(1)} \quad (25)$$

为变形体当前构形相对质心的转动惯量;  $J_c$  为当前构形相对质心的动量矩。称  $v_c$  和  $w_c = i_c^{-1} J_c$  为整体速度和整体角速度。再引进惯性主轴标架  $\{n_k^{(1)}\}$  的旋率

$$\dot{n}_k^{(1)} = w_c \times n_k^{(1)} = \Omega_I n_k^{(1)}, \quad \Omega_I = \dot{R}_I R_I^T \quad (26)$$

则整体动力学方程为

$$m\dot{\mathbf{v}}_c = \mathbf{F}_R \quad (27a)$$

$$[\mathbf{i}_c \dot{\mathbf{w}}_c + \mathbf{w}_I \times \mathbf{i}_c \mathbf{w}_c] + \left[ \mathbf{w}_c \cdot \frac{\delta I}{\delta t} \mathbf{i}_c - \mathbf{i}_c (\mathbf{w}_I \times \mathbf{w}_c) \right] = \mathbf{M}_R \quad (27b)$$

其中 $\mathbf{F}_R$ 和 $\mathbf{M}_R$ 分别为作用在变形体上的外力合力和合矩； $\delta I/\delta t$ 为保持 $\{\mathbf{n}_R^{(1)}\}$ 不变的时间率。可见惯性主轴意义下的整体平均转动在整体动力学方程中起到重要作用。当且仅当

$$\mathbf{w}_I = \mathbf{w}_c, \quad \frac{\delta I}{\delta t} \mathbf{i}_c = 0 \quad (28)$$

(27b) 退化到刚体力学动量矩平衡方程。

塑性转动是不同于变形纯几何转动的重要课题。金属材料在局部意义上是各向异性的，分析它们各自的晶相轴构成，就可识别各自不同的各向异性种类（参见[54,55]等）。问题是如何描述金属在变形过程中晶格的转动。[56]从变形梯度 $\mathbf{F}$ 的弹塑性乘法分解<sup>[47]</sup>

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (29)$$

出发（这里 $\mathbf{F}_e$ 和 $\mathbf{F}_p$ 分别为弹性和塑性变形梯度），注意到塑形局部变形 $\mathbf{F}_p$ 源于金属位错等细观过程，不影响晶格的定向，指出晶格的转动由弹性局部变形 $\mathbf{F}_e$ 中的主转动 $\mathbf{Q}_e$ （ $\mathbf{Q}_e$ 为 $\mathbf{F}_e$ 的极分解 $\mathbf{F}_e = \mathbf{Q}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \mathbf{Q}_e$ 中的转动）所代表。

我们在后面还将介绍到有关转动课题的其他一些方面。

## 2 应力客观性导数和率型本构方程

率型本构方程在应用中是极为重要的本构方程类。对物理非线性问题以及对固体逐渐发生大变形的边值问题尤其重要。然而，与全量型本构方程相比较，率型本构方程长期存在一些混淆不清的问题；特别是在与率型本构方程密切相关的应力共旋率或更一般地，应力客观性导数方面近10年来出现了大量的研究和争议。

早在本世纪初，[58—60]就发现，分析应力的发展，必须计入转动的影响，并提出了著名的Zaremba-Jaumann应力率（现多称为Jaumann应力率）

$$\delta_J \boldsymbol{\sigma} / \delta t := \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \quad (30)$$

以在率型本构方程中恰当计入转动的影响。式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是真应力（即Cauchy应力）张量，上方的一点（如 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ）代表物质时间导数， $\boldsymbol{\Omega}$ 为物质旋率（material spin，为速度梯度 $\mathbf{G}$ 的反称部分）。Noll<sup>[14,61]</sup>在建立近代连续统力学严格数理基础的同时，考虑了应力客观导数的合理形式，获得了与(30)一致的结论。由于Noll这些工作的重要影响和在历史上提出过的众多应力共旋率（及物质导数）中(30)的形式最简单，(30)已成为最普遍被接受的应力共旋率。

这里需要指出，共旋率和客观性导数在概念上不是完全等同的。传统上，术语“共旋率”（co-rotational rate）是指在每一物质点上，观察者随之平动和旋转所观察到的时间率。这里涉及材料的平动和旋转概念，它们都是局部量；对于平动有着通常理解、公认的确切含义，但旋转的理解则有着众多的不同，从而可导致众多形式的共旋率。比共旋率含义更广泛的“客观导数”或称“客观率”也是一种时间率；一个客观性量的客观导数仍然是客观性量。共旋率应该是客观导数，否则所对应的“旋转”在概念上一定是不恰当的。

客观导数自然具有更为众多的不同形式，除Jaumann应力率外，拖带应力率或称

Oldroyd 应力率<sup>[62]</sup>和 Truesdell 应力率<sup>[63]</sup>也是被广泛应用的应力客观导数:

$$\text{拖带应力率 } \delta_o \sigma / \delta t := \dot{\sigma} - \sigma \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \sigma \quad (31)$$

$$\text{Truesdell 应力率 } \delta_T \sigma / \delta t := \dot{\sigma} + \sigma \text{tr} \mathbf{D} - \sigma \mathbf{G}^T - \mathbf{G} \sigma \quad (32)$$

这里  $\mathbf{G}$  为速度梯度,  $\mathbf{D}$  为变形率张量 (stretching tensor, 为  $\mathbf{G}$  的对称部分,  $\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}$ ), 算子 “ $T$ ” 和 “tr” 分别代表转置和求迹数。在每一个材料点上, 观察者随同物质点平动、旋转、和变形所观察到的时间率, 便是一般的“拖带导数” (convected derivative)<sup>[62,64]</sup>。因此, 对“旋转”的不同理解也将导致不同的拖带导数。

除 (30) — (32) 三种客观导数外, 历史上提出过众多形式的客观导数或共旋率。[65] 推广 [58,59] 的共旋标架概念。[66] 表明各种客观导数与曲线坐标系的协、逆、混变分量率相关。[67—70] 对 [66] 的工作作了一般化处理。[71] 指出, 在各种客观导数中, 唯有 Jaumann 应力率当其为零时应力不变量可出现驻值, 故 Jaumann 应力率适用于弹、塑性问题。Eringen<sup>[72]</sup> 则认为应力的不同客观性导数其实不存在实质差异, 它们都只相差一个可以合并到一般率型本构泛函中去的项。[2] 具体考虑了应力的不同客观导数变换时次弹性本构形式的变换。[73] 明确指出了主旋率

$$\mathbf{\Omega}^P := \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \quad (\mathbf{Q} \text{ 为主转动张量}) \quad (33)$$

与物质旋率  $\mathbf{\Omega}$  的不同, 从而 Dienes 应力率<sup>[74]</sup>

$$\delta_D \sigma / \delta t := \dot{\sigma} + \sigma \mathbf{\Omega}^P - \mathbf{\Omega}^P \sigma \quad (34)$$

与 Jaumann 应力率  $\delta_J \sigma / \delta t$  不同, 并初步分析了  $\mathbf{\Omega}^P$  与  $\mathbf{\Omega}$  的关系。70 年代关于如何具体选用不同应力客观导数 (或共旋率), 以适应特定的场合和材料的研究工作, 可参见 [75, 76] 及它们所列参考文献。关于 70 年代及以前的对应力客观性导数的综评可参见 [1] (第 148—151 节) 和 [74], 更新的综述可见于 [77, 78] 等工作。

近 10 年来对应力客观性导数的讨论相当热烈, 其直接起因是 [74] 的工作, 其中实际上提出了下述问题: 若 (例如通过本构实验) 已获得无旋的率型本构方程为

$$\dot{\sigma} = \phi(\sigma, \mathbf{D}) \quad (35)$$

则当变形包含有旋转时, 应该用什么共旋应力率 (或应力客观导数) 替代 (35) 左边的  $\dot{\sigma}$ , 以给出相应的本构方程? 这是一个非常实际的问题, 我们称之为 Dienes 问题。

过去, 尤其是在应用上, 对 Dienes 问题的回答是相当含糊的。很多作者认为应该由 Jaumann 应力率  $\delta_J \sigma / \delta t$  替代  $\dot{\sigma}$ ; 一般都认为无论采用哪种应力客观导数替代  $\dot{\sigma}$ , 问题都不大, 仅会带来 (不同的) 小误差 (例如参见 [79])。Dienes<sup>[74]</sup> 第一次提出了不同的看法, 他认为必须采用 Dienes 应力率  $\delta_D \sigma / \delta t$  替代  $\dot{\sigma}$ 。他用各向同性线性次弹性模型, 在研究相当于简单剪切发展变形的问题时, 发现用 Jaumann 应力率  $\delta_J \sigma / \delta t$  替代 (35) 中的  $\dot{\sigma}$  给出本构方程, 将导致剪力为剪切量的振荡函数这个差不多完全出人意料、难于作出合理物理解释的奇怪现象, 现统称为“振荡现象”。只当采用 Dienes 应力率  $\delta_D \sigma / \delta t$  替代  $\dot{\sigma}$  时, 剪力才是剪切量的单调函数。

[80] 把 Dienes 问题更加一般化, 提出: 对于简单物质, 若已知无旋的某种类型的本构方



程, 如何简捷地获得当变形实际包含有旋转时的精确本构方程? 我们称此问题为**广义Dienes问题**。

现在需要特别明确的一点是, Dienes问题并不只是单纯地问: 在与(35)对应的有旋本构方程中, 用哪个应力共旋率(或应力客观导数)才行? [2](第99节)以及[72]早就明确了用哪个应力共旋率或客观导数不是问题的实质, 因为各应力客观性导数之间一般只相差可合并到本构泛函中去的项。比如, 我们有 $\delta_t \sigma / \delta t = \delta_j \sigma / \delta t - \sigma \mathbf{D} - \mathbf{D} \sigma$ , 其中 $\sigma \mathbf{D} + \mathbf{D} \sigma$ 便可归并到 $\psi(\sigma, \mathbf{D})$ 中去。然而, 各种应力客观导数都可以(在数学意义上)等价地应用于率型本构方程并不能否定Dienes问题的实际重要意义(的确有部分作者对Dienes问题持虚无态度), 因为由于技术上的限制, 以及本构实验的巨大复杂性, 实际本构方程无一不是通过尽可能简单的本构实验(一般都是无旋变形实验)得出的。这种必然是客观现象近似化的本构方程在形式上已经尽量简化了, 以求可用一些简单函数加以表达。如果再任意选择一种应力客观导数, 通过精确数学代换, 由原来的(近似的)无旋形式导出相应的有旋形式的本构方程, 势必使得本构泛函形式大大复杂起来(然而却仍然是近似的, 甚至精度更差)。可见, Dienes问题, 尤其是广义Dienes问题若能完美地得到解决, 是具有重大实际意义的, 后面将介绍笔者在这方面的努力<sup>[80]</sup>。

塑性力学中关于应力共旋率合理形式的争论大概是最为热烈的。[81]首先发现, 采用随动硬化塑性模型处理简单剪切问题, 若由 $\delta_j \sigma / \delta t$ 直接替代 $\dot{\sigma}$ , 也出现了振荡现象; 随后[82—84]给出了类似的结论。[81]认为, 振荡现象是Ziegler随动硬化模型失效引起的; 但[82]认为是由于塑性诱导的旋转对各向异性材料的塑性行为的影响导致的, 通过选择背移的最大特征值方向为旋转轴, 作为背移的Jaumann导数, 可以避免振荡现象; [83]则给出了对应各种共旋应力率的振荡曲线的解析形式, 并利用各向同性张量函数表示定理讨论了包括结构内变量在内的由塑性旋率参与的率形式本构方程<sup>[85-87]</sup>; [88]也得到同Dafalias类似的结论, 表明通过采用Mandel<sup>[89]</sup>方向子的方法可以避免振荡现象。[90, 87]指出, 为了定义塑性旋率, 不必引进Mandel方向子。[91]通过运用Cauchy应力表示屈服条件并变换到Lagrange参考标架, 也可避免出现振荡现象。[92]表明, 即使附加“阻尼”项, 也不能避免Jaumann应力率引发的振荡现象。[93, 94]发现以前的那些共旋率构造虽避免了振荡, 但它们所预测的正应力、正应变却比实验值大出1到2个数量级; 他们提出一个类似于次弹性的随动硬化模型, 也避免了振荡现象。[77]再次强调用Dienes应力率的随动硬化模式可以避免振荡。[95]从刚塑性Mises随动模型出发展示了通过调整本构模式参数对不同共旋应力率都可以避免振荡现象。[56]认为对于晶体材料, 由于晶格定向的转动是弹性变形 $\mathbf{F}_e$ 造成的(参见(29)上下文), 与塑性变形 $\mathbf{F}_p$ 无关, 故材料旋率的有效代表是弹性变形的材料旋率

$$\Omega_e = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (36)$$

相应的应力共旋率则为 $\dot{\sigma} + \sigma \Omega_e - \Omega_e \sigma$ 。

[77]总结了关于共旋应力率合理形式问题的主要不同的观点, 再次强调了Dienes应力率的合理性, 论述了[96]等认为各种不同共旋率无本质区别的观点欠缺现实考虑; 指出[83]等所认为的Dienes应力率仅适用于次弹性的观点是片面的理解。总的看来, 弹塑性问题中应力客观导数合理形式的争论尚未趋向一致, 恐怕也难于一致。但得到公认的是, 对于弹塑性大

变形, Jaumann 应力率是不恰当的; 对于小变形 (或变形不大), 采用各种不同的应力客观导数的确仅仅只会带来相差很小 (可以略去不计) 的差异。

从前面的论述中已经看到, 在 Dienes 问题甚至广义 Dienes 问题中, 首先需要回答的是“无旋”、“有旋”等的明确含义; 对旋转的不同理解, 构成了 Dienes 问题乃至广义 Dienes 问题答案恰当与否的分水岭。由此也表明, 变形体转动的研究在本构理论中有着重要意义。

本文第 1 节业已表明, 变形梯度  $\mathbf{F}$  极分解 (5) 中的主转动  $\mathbf{Q}$  是局部变形转动的最主要代表。因此, 主旋率  $\dot{\Omega}^P = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$  理所当然很重要。在 [48] 中, 还求得了绕方向  $\mathbf{p}$  的 Cauchy 平均转角  $\bar{\theta}_p$  的速率精确公式为

$$\dot{\bar{\theta}}_p = 2 \frac{(\text{tr} \mathbf{F} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{w}} - (\text{tr} \mathbf{G} \mathbf{F} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{G} \mathbf{F} \mathbf{p}) \mathbf{p} \cdot \mathbf{w}}{(\text{tr} \mathbf{F} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{F} \mathbf{p})^2 + 4(\mathbf{w} \cdot \mathbf{p})^2} \quad (37)$$

其中  $\hat{\mathbf{w}}$  是  $\mathbf{G}\mathbf{F}$  反称部分的轴矢量,  $\mathbf{w}$  是  $\mathbf{F}$  反称部分 ( $\mathbf{W}$ ) 的轴矢量。特别地, 如果以当前构形为参考构形, 那么  $\mathbf{F} = \mathbf{I}$  (相应地  $\mathbf{w} = 0$ ,  $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{w}$  为  $\Omega$  的轴矢量, 即旋度矢量 vorticity vector), 代入 (37) 得到绕  $\mathbf{p}$  的相对 Cauchy 平均转角速率如下:

$$\dot{\bar{\theta}}_p^R = \dot{\bar{\theta}}_p \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{p} \quad (38a)$$

或

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^3 \bar{\theta}_{\varepsilon_i}^R \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 w_i \mathbf{e}_i \quad (38b)$$

(38) 表明, 旋度  $\mathbf{w}$  的确是相对平均角速度。

物质旋率  $\Omega$  (或旋度  $\mathbf{w}$ ) 和主旋率  $\Omega^P$  (或主转动  $\mathbf{Q}$ ) 是变形转动的主要代表。用 Hill 的主轴法 (参见本文第 3 节) 可以很简单地求得  $\Omega$  与  $\Omega^P$  之间的关系。[74] 首先给出了用物质旋率  $\Omega$  和变形率  $\mathbf{D}$  (以及左伸长张量  $\mathbf{V}$ ) 求算主旋率  $\Omega^P$  的不变性算法公式; [97—98] 从不同途径给出了 Dienes 算法形式不同的不变性算法公式。其实, 综合 [74] 和 [97], 可以给出下述形式上似乎更好的结果:

$$\Omega^P = \Omega + (\mathbf{I} \mathbf{II} - \mathbf{III})^{-1} \{ (\mathbf{I}^2 - \mathbf{II}) \mathbf{Z} - (\mathbf{V}^2 \mathbf{Z} + \mathbf{Z} \mathbf{V}^2) \} \quad (39a)$$

$$\mathbf{Z} := \mathbf{D}\mathbf{V} - \mathbf{V}\mathbf{D} \quad (39b)$$

其中  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{II}$ ,  $\mathbf{III}$  是左伸长张量  $\mathbf{V}$  的三个主不变量。

为了解决广义 Dienes 问题, 郑泉水<sup>[80]</sup> 首先考察了按照  $\mathbf{Q}$  (或  $\Omega^P$ ) 以及按照  $\Omega$  (或  $\mathbf{w}$ ) 意义下的无旋在变形几何上的含义。不失一般性, 不妨只考虑均匀变形:  $\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{X}$ 。令  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$  (即按照主转动意义为无旋), 则变形梯度的一般形式为

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (40)$$

把 (40) 代入  $\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ , 并求  $\mathbf{G}$  的对称部分  $\mathbf{D}$  和反称部分  $\Omega$ , 可得

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i - \left[ \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2\lambda_1 \lambda_2} w_3 (\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_1) \right] \Big|_{(1,2,3)} \quad (41)$$

$$\dot{\Omega} = - \left[ \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2\lambda_1\lambda_2} w^L (\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_1) \right] \Big|_{(1,2,3)} \quad (42)$$

其中  $|_{(1,2,3)}$  表示轮换指标 1, 2, 3 后求和,  $w^L$  为主轴标架 (Lagrange 标架)  $\{\mathbf{N}_i\}$  的角速度

$$\dot{\mathbf{N}}_i = \Omega^L \mathbf{N}_i = \mathbf{w}^L \times \mathbf{N}_i \quad (43)$$

$w_i^L$  为  $w^L$  相应  $\{\mathbf{N}_i\}$  的分量。(42) 的下述无旋 (对应  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$ ) 变形特别有趣: ① 从 (42) 可见, 在保持可实现任意伸长比的条件下,  $\dot{\Omega} = 0$  的充要条件是  $w^L = 0$ , 即简单三向拉压变形;

② 在 (42) 中令  $w_1^L = w_2^L = 0$  (等价于  $\dot{\mathbf{N}}_3 = 0$ ), 但  $w_3^L = w^L \neq 0$ , 这时

$$\dot{\Omega} = - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2\lambda_1\lambda_2} w^L (\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_2 \otimes \mathbf{N}_1) = - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2\lambda_1\lambda_2} w^L \varepsilon \mathbf{N}_3 \quad (44)$$

其中  $\varepsilon$  为置换张量。[99] 给出过 (44) 这一特殊结果。

用简单剪切复合刚性转动变形可方便地实现  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  或  $\dot{\Omega} = 0$  两种无旋。这时变形函数为

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 + K X_2 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

这些  $\{X_i\}$  和  $\{x_i\}$  是重叠的笛卡儿坐标系,  $(X_1, X_2, X_3)$  和  $(x_1, x_2, x_3)$  分别为材料点在变形前、后的坐标,  $K = \text{tg} \gamma$  为剪切  $\gamma$  的正切。由 (45) 可得到变形梯度  $\mathbf{F}$  的分量矩阵为

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

此时, 主转动轴显然沿  $X_3$  方向, 从而主转动角  $\Theta$  就是绕  $X_3$  方向的 Cauchy 平均转角 (参见 [10], 或本文第 1 节), 按照 (46), (17) 又可求得

$$\text{tg} \Theta = \frac{F_{21} - F_{12}}{F_{11} + F_{22}} = \frac{2\sin \varphi - K \cos \varphi}{2\cos \varphi + K \sin \varphi} \quad (47)$$

因此, 实现无旋  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$  (即  $\Theta \equiv 0$ ) 的充要条件是不断调整刚性转角  $\varphi$  使之满足

$$2\text{tg} \varphi = K = \text{tg} \gamma \quad (48)$$

另一方面, 由 (46) 可求得速度梯度  $\mathbf{G} \equiv \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$  的分量矩阵, 继而得到

$$[\dot{\Omega}] = \left( \dot{\varphi} - \frac{\dot{K}}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

因此, 实现无旋  $\dot{\Omega} \equiv 0$  的充要条件是

$$2\dot{\varphi} = \dot{K} \quad (50)$$

(48) 和 (50) 清楚地表明了主转动意义下的无旋 ( $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , 为全量无旋) 与物质旋率意义下的无旋 ( $\dot{\Omega} = 0$ , 为相对无旋或瞬时无旋) 的区别。

总而言之, 在谈论一个本构方程来源于无旋实验时, 必须严格区分无旋是  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$  意义还是  $\dot{\Omega} \equiv 0$  意义; 又因为  $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{I}$  且同时  $\dot{\Omega} \equiv 0$  的变形是简单三向拉压变形, 而这种变形一般地不

足以确定本构泛函（各向同性弹性问题属例外），因此在进行无旋本构试验前就必须事先确定对  $Q \equiv I$  或  $Q \equiv 0$  的选择。

满足客观性原理的简单物质的纯力学本构方程为<sup>[14]</sup>

$$\sigma = Q \mathcal{C}(U_t) Q^T \quad (51)$$

这里  $U_t$  为右伸长张量在现时刻  $t$  以前的历史。该本构定理表明主转动的过去历史对当前应力  $\sigma$  不起作用；用纯变形历史本构实验（即  $Q \equiv I$  意义下的无旋本构实验）就可以完全确定本构泛函  $\mathcal{C}$ 。另一方面，用  $Q \equiv 0$  意义的无旋本构实验是否可以完全确定本构泛函呢？笔者尚未发现这方面的严格理论性工作。再一个值得重视的事实是，具体设计实施  $Q \equiv I$  的实验比设计实施  $Q \equiv 0$  的实验似乎要容易一些。上述讨论再一次充分肯定了解决（广义）Dienes 问题的重要性。[80] 尝试从客观性原理着手寻求广义 Dienes 问题的解决。设  $\Phi$  和  $\Phi^*$  是四维时空的两个时空系，记它们之间的变换为（参见[2,19,100]）

$$x^* = x_0^*(t) + R(t)(x - x_0), \quad t^* = t + a \quad (52)$$

这里  $(x, t)$  和  $(x^*, t^*)$  分别是时空中同一事件在  $\Phi$  和  $\Phi^*$  上的观测量，相应于时空系变换  $\Phi \rightarrow \Phi^*$ ，有下列变换关系成立：

$$\begin{aligned} F^* &= RF, \quad Q^* = RQ, \quad U^* = U, \quad V^* = RVR^T \\ D^* &= RDR^T, \quad (\Omega^P - \Omega)^* = R(\Omega^P - \Omega)R^T, \quad \sigma^* = R\sigma R^T, \dots \end{aligned} \quad (53)$$

简单物质最一般的纯力学本构方程为  $\sigma = \mathcal{C}(F_t)$ ，这里  $F_t$  是  $F$  的历史。形式上，我们可用一个张量泛函方程

$$\mathcal{S}(A, \dots; B_t, \dots) = 0 \quad (54)$$

一般表示各类更具体的简单物质的本构方程。其中  $A, \dots$  是一些当前时刻的状态量， $B_t, \dots$  则是一些状态量的历史。本构方程 (54) 服从客观性原理是指对任何时空系变换  $\Phi \rightarrow \Phi^*$ ，本构泛函  $\mathcal{S}$  的形式保持不变，即

$$\mathcal{S}(A^*, \dots; B_t^*, \dots) = 0 \quad (55)$$

现在广义 Dienes 问题可以表述为：若由无旋（ $Q \equiv I$  意义，或纯变形意义）本构实验确定得本构方程为 (54)，试求相应的一般形式的本构方程。

为了解决上述问题，[80] 引进了一个称为形式无旋化的概念。一个状态量  $A$  的形式无旋化  $\bar{A}$  是与  $A$  同类型的状态量，即  $\bar{A}$  为  $A$  和变形历史（简单物质的变形历史由  $F_t$  代表）的张量值泛函，满足①  $\bar{A}$  在任何时空系变换  $\Phi \rightarrow \Phi^*$  下保持不变，即

$$(\bar{A})^* = \bar{A} \quad (56a)$$

② 当（在某个时空系下观察）变形历史为无旋  $Q \equiv I$  时， $\bar{A}$  等同于  $A$ ，即

$$\bar{A} = A \quad (\text{当 } Q \equiv I \text{ 时}) \quad (56b)$$

设状态量  $A$  的形式无旋化  $\bar{A}$  存在，则它的形式无旋化的唯一性可以按照下述思路证明<sup>[80]</sup>：设  $\bar{A}_1 = R_1(A, F_t)$  和  $\bar{A}_2 = R_2(A, F_t)$  是  $A$  的两个形式无旋化。当  $Q \equiv I$  时，由 (56b)，故  $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$ 。对一般变形历史，作时空系变换  $\Phi \rightarrow \Phi^*$  使得 (52) 中的  $R(t) = Q^T$ ，那么  $F_t^* = U_t$ ，是一个无旋变形历史，再由 (56b)，得知  $\bar{A}_1 = \bar{A}_2$ 。进一步，还可以证明对

任何时空系变换 $\Phi \rightarrow \Phi^*$ 成立

$$(\overline{\mathbf{A}^*}) = (\overline{\mathbf{A}})^* \quad (\text{记为 } \mathbf{A}^*) \quad (57)$$

容易证明

$$\left. \begin{aligned} \overline{\mathbf{F}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}, \quad \overline{\mathbf{U}} = \mathbf{U}, \quad \overline{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{V} \mathbf{Q} = \mathbf{U} \\ \overline{\mathbf{D}} &= \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q}, \quad \overline{\boldsymbol{\Omega}^P - \boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Omega}^P - \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{Q}, \quad \overline{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

分别是  $\mathbf{F}, \mathbf{U}, \dots, \boldsymbol{\sigma}$  的形式无旋化; 而

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{Q}^T (\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\Omega}^P - \boldsymbol{\Omega}^P \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \frac{\delta_D \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} \mathbf{Q} \\ \dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{V}} + \mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}^P - \boldsymbol{\Omega}^P \mathbf{V}) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \frac{\delta_D \mathbf{V}}{\delta t} \mathbf{Q} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

分别是  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  和  $\dot{\mathbf{V}}$  的形式无旋化, 等等.

现在, 就可以给出对应无旋本构方程 (54) 的广义Dienes问题的答案为

$$\mathcal{F}(\overline{\mathbf{A}}, \dots; \overline{\mathbf{B}}_i, \dots) = 0 \quad (60)$$

易证 (60) 与客观性原理等价<sup>[80]</sup>. 事实上, 由 (56a), 故 (60) 当然服从客观性原理.

记无旋时的本构方程(54)在有旋时的一般形式为 $\widehat{\mathcal{F}}(\mathbf{A}, \dots; \mathbf{B}_i, \dots) = 0$ . 当 $\widehat{\mathcal{F}}$ 满足客观性原理时, 对任何时空系变换 $\Phi \rightarrow \Phi^*$ 都成立 $\widehat{\mathcal{F}}(\mathbf{A}^*, \dots; \mathbf{B}_i^*, \dots) = 0$ , 特别地, 若取 $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T$ , 则 $\mathbf{A}^*, \dots$ 对应无旋变形历史, 故由 (56b), 此时 $(\overline{\mathbf{A}^*}) = \mathbf{A}^*$ . 但由性质 (57) 及 (56a), 故进一步有 $(\overline{\mathbf{A}^*}) = \overline{\mathbf{A}^*} = \overline{\mathbf{A}}$ , 以及 $\mathcal{F}(\overline{\mathbf{A}}, \dots; \overline{\mathbf{B}}_i, \dots) = 0$ . 最后令变形无旋, 有 $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \dots, \overline{\mathbf{B}}_i = \mathbf{B}_i, \dots$ , 就导出 $\widehat{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ .

下面应用上述基本结果论证Dienes的Dienes问题答案<sup>[74]</sup>的正确性. 由 (35), (57)–(60) 得到Dienes问题的一般答案为

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{Q}^T \frac{\delta_D \boldsymbol{\sigma}}{\delta t} \mathbf{Q} = \phi(\overline{\boldsymbol{\sigma}}, \overline{\mathbf{D}}) = \phi(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q}) \quad (61)$$

因为次弹性材料的本构泛函 $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ 一般理解为 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\mathbf{D}$ 的各向同性函数 (参见[2]第99节), 故 $\phi(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \mathbf{Q}$ , 代入 (61) 得 Dienes 答案

$$\delta_D \boldsymbol{\sigma} / \delta t = \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \quad (62)$$

如果 $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ 关于 $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$ 为各向异性, 则必须用 (61) 才行. [80] 取 $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) = \mathcal{L}[\mathbf{D}]$ 为 $\mathbf{D}$ 的线性正交异性为例, 仍然讨论简单剪切发展问题. 对这个问题若仍然采用 Dienes 答案, 则只能反映出剪切模量的影响 (与[74]相同), 而不能反映拉伸模量的影响, 不符合 $\mathcal{L}$ 为正交异性这一基本事实. 采用精确答案 (61) 后, 拉伸模量的影响就可反映出来; 剪力作为剪切量的函数, 一般仍然是单调的.

关于客观导数的合理形式, Stickforth 和 Wegener<sup>[99]</sup>还提出了下列分级要求:

- (a) 客观导数应该是真正的导数, 即可实行Leibniz求导链法则;
- (b) 对称张量的客观导数应该仍是对称的;

(c) 客观性量的客观导数仍应是客观性的,

(d) 具有一定的物理几何含义。

其中 (c) 是我们对客观导数下过的定义条件。对于共旋率, 根据定义, 一般对称张量  $S$  的共旋率形式为

$$\frac{\delta S}{\delta E} = \dot{S} + SA - SA \quad (63)$$

这里反称张量  $A$  是某种代表观察者随物质点转动的旋率, 容易验证共旋率全都满足 (a)–(c), 因此只要对  $A$  可作出合适的物理几何意义的解释, 则 (63) 便是 [99] 意义下的合理共旋率。Jaumann 共旋率, Dienes 共旋率, Aifantis 共旋率 (对应  $A = \Omega_*$ ) 都满足 (d)。而 Hallenx 和 Donea 共旋率

$$\delta S / \delta t = \dot{S} + S(a\Omega + b\Omega^P) - (a\Omega + b\Omega^P)S \quad (64)$$

中的  $A = a\Omega + b\Omega^P$  ( $a, b$  为常数) 不能够作出合理的材料旋率解释, 故 (64) 不满足 [99] 提出的条件 (d)。在共旋率之外, 其他客观导数 (如拖带导数, Truesdell 导数) 都满足不了条件 (a) [然而, 加上条件 (a) 到底有多大的实在意义, 尚不清楚]。

[101] 在讨论非线性弹性剪切模量的各向异性时, 附带发现了应力客观导数的不同选择对剪切模量的矩阵对称性有着值得重视的影响。采用某种应力客观导数  $\delta\sigma/\delta t$  给出一般率型本构方程为  $\delta\sigma/\delta t = K[D]$ , 这里  $K$  是以  $\sigma, F$  等为参量的关于  $D$  的线性对称张量值函数, 即剪切模量。研究表明, 对各向同性超弹性材料, 当且仅当  $\delta\sigma/\delta t$  含有  $\sigma \text{ tr } D$  项时,  $K$  作为对称张量的线性变换, 其矩阵才是对称的。我们知道, 在计算力学中, 剪切模量是否矩阵对称意味着计算工作量大幅度的差异, 因此 [101] 的上述研究便实际建议了对各向同性超弹性材料 (甚至一般材料) 的率型本构方程中的应力客观导数最好包含有  $\sigma \text{ tr } D$  项。

Hill 的主轴法在客观导数的构造等方面有着独特的重要贡献。采用主轴法, [41, 40; 102, 103; 104, 108] 系统构造了一大类广义应力率或广义 Jaumann 应力率 [102]。关于如何选择共旋率的工作, [108] 的原则是共旋率的选择应与具体本构方程匹配。如, 对于各向同性弹性材料, 应力  $\sigma$  的主向与应变 (如  $V$ ) 的主向一致, 这时选择所谓 Euler 共旋率 ([108] 叫 E 率)

$$\delta_E S / \delta t = \dot{S} + S\Omega^E - \Omega^E S \quad (65)$$

将是最好的, 因为此时  $\delta_E \sigma / \delta t$  及  $\delta_E V / \delta t$  都将继续保持具有  $V$  (或  $\sigma$ ) 的主向 (Dienes 率和 Jaumann 率都没有这种性质)。 (65) 中,  $\Omega^E = R^E R^E$  为 Euler 旋率,  $R^E$  代表 Euler 标架 (即  $V$  的主轴标架) 的转动。

对于任何对称张量场  $S$ , 由  $S$  的谱表示 (例如参见 [19])

$$S = S_1 n_1 \otimes n_1 + S_2 n_2 \otimes n_2 + S_3 n_3 \otimes n_3 \quad (66)$$

给出所谓  $S$  的主轴标架  $\{n_i\}$ 。当  $S$  随时间  $t$  变化时,  $\{n_i\}$  将发生转动。由

$$\dot{n}_i = A n_i = a \times n_i \quad (67)$$

给出标架  $\{n_i\}$  的旋率  $A$  或旋转角速度  $a$ 。模式 (66), (67) 反映了一大类材料旋率的来源, 如 Euler 旋率  $\Omega^E$ , Lagrange 旋率  $\Omega^L$  等。还可以定义应力  $\sigma$  的主轴标架旋率和变形率

$D$  的主轴标架旋率等。[109] 提出的“固化物质导数”概念的实际背景就是主轴标架旋率。他们发现变形率  $D$  的主轴标架旋率并不等于物质旋率  $\Omega$  这一事实；接着[110]由此更明确意识到长期以来已经作为“定理”形式固定下来的物质旋率（[110] 称作自旋）等于变形率主轴标架旋率的观念是完全错误的，自旋与变形率主轴标架旋率实际上是没有多少关联的两个独立概念。

应变率也是引人关注的问题。除主轴法在这方面的大量工作外，[97,102,98,49]讨论了应变率的一般不变性算法。[111,112]讨论了对数应变的物质导数与变形率的关系。[106]表明，用  $E$  率给出客观性应变的共旋率将一般具有最简单的表示形式。[113]分析了伸长和剪切的时间率。

### 3 主轴法和拟主轴法。应变度量和在大变形实用化理论

求各种应变的表示，以及从变形梯度分离出转动和应变部分，不仅具有理论上的重要意义，在实用上也是很重要的。如在本构方程方面，实际上只会对少数几种应变与应力的对应关系做一些简单实验，以确定在一定本构模型下待定材料的本构常数或函数。一方面是工程实际的需要，另一方面则由于非线性本构实验的极大复杂性，在目前阶段我们只能给出一些形式较简单的本构关系，这意味着具体本构关系一般都是与本构关系中的应力、应变、转动（或应力率、变形率、旋率）的形式密切相关的近似关系。在此基础上按照本构公理等严格地转换应力、应变、转动（或应力率、变形率、旋率）度量所得到的本构关系一般都是复杂的（且依然是近似的），不适于工程界应用。因此，过去很多文献倾向于直接替代而不是严格地转换变形度量。最近10年，人们发现，这样处理问题，在大变形时可能不仅引起误差，更重要的是可能从本质上改变问题的定解性质，如[74,81]等发现弹、塑性材料纯剪切变形时的奇怪“振荡”现象。因此，10年来在应变、转动、应变率和转动率的表示方面出现了大量的工作（参见第1及第2节），解决好这些问题也是把大变形纯理论推向实用理论（如杆、板、壳理论）的关键因素之一。

[40,41]在[42]的应变主轴标架思想基础上系统发展起来的“主轴法”独辟捷径，在应变、转动，应变率、转动率及共旋率等的表示方面非常有效。用主轴法已经获得了丰富的、其他方法难于达到的重要基础性结果。《力学进展》1983年第1期发表的郭仲衡和 Dubey 的文章<sup>[102]</sup>向国内读者系统地介绍过主轴法。主轴法利用了下述两个最重要的基本特性：

- ①在应变主轴标架下各种应变具有最简单的表示形式；
- ②主转动在主轴标架下有着十分简单的形式，并可以隐蔽起来。

然而，从实用观点看，主轴法面临几乎回避不了的困难——必须事先已知应变主轴。而对绝大多数实际问题，应变主轴是有待求解的几何方面之一。若直接采用应变主轴作为基本未知变量，则同样有许多困难，因为大变形问题一般只能用数值分析方法（如有限单元法）求解，这时根本不可能确保变形体各点都能求得应变主轴，从而主轴法在近似分析中如何应用，依然存在许多理论问题有待解决，这大概也是至今未见这方面的实际工作的原因之一。

以上困境启发我们提出了拟主轴法<sup>[114,115]</sup>以克服主轴法的上述缺点，并将主轴法作为拟主轴法的特例。

记  $\{E_i\}$  是一个标准正交基， $U$  是右伸长张量， $C = U^2 = F^T F$  是右 Cauchy-Green 应变张量。按照有限变形理论<sup>[1,19]</sup>， $E_i$  方向伸长比  $\lambda_i$  与  $E_j$  和  $E_k$  方向剪切  $\gamma_{jk}$  与  $C$  的关系为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= \sqrt{\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{C} \mathbf{E}_i} = \sqrt{C_{ii}}, \quad (i \text{ 不求和}) \\ \lambda_j \lambda_k \sin \gamma_{jk} &= \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{C} \mathbf{E}_k = C_{jk}, \quad (j \neq k) \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

在拟主轴法<sup>[114,115]</sup>中, 标架总剪切

$$\gamma = \sqrt{\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2} = \gamma(\{\mathbf{E}_i\}) \quad (69)$$

是最重要的参数之一。如果  $\gamma = 0$ , 则  $\{\mathbf{E}_i\}$  是 Lagrange 型应变主轴标架, 记为  $\{\mathbf{N}_i\}$ , 又叫 Lagrange 标架。在 Lagrange 标架下,  $\mathbf{U}$  及  $\mathbf{C}$  等有谱表示

$$\mathbf{U} = \sum_i \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i, \quad \mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \sum_i \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (70)$$

记  $\mathbf{Q}$  为主转动,  $\mathbf{n}_i = \mathbf{Q} \mathbf{N}_i$ , 则  $\{\mathbf{n}_i\}$  是 Euler 型应变主轴标架, 又叫 Euler 标架。在  $\{\mathbf{n}_i\}$  下左伸长张量  $\mathbf{V}$  及左 Cauchy-Green 应变  $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$  有谱形式

$$\mathbf{V} = \sum_i \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \sum_i \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (71)$$

在主轴法中, 主转动  $\mathbf{Q}$  可以通过两组主轴标架表示

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (72)$$

而隐蔽起来; 变形梯度  $\mathbf{F}$  也可表示为

$$\mathbf{F} = \sum_i \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (73)$$

Hill 的主轴法便是建立在 (70) — (73) 的简单表示基础上的。

按照应变等价性定理<sup>[1]</sup>,  $\mathbf{U}$  的任何各向同性、单值可逆函数都可以作为应变度量。对正实半轴  $R^+$  上的任何满足下列条件

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=1} = 1 \quad (74a)$$

的严格单调增函数  $f(x)$  而言, 下述  $\mathbf{U}$  的张量函数

$$\mathbf{S} = f(\mathbf{U}) = \sum_i f(\lambda_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad (74b)$$

都可作为应变度量, 叫 Hill 类应变。如进一步取

$$f_n(x) = \frac{1}{2n}(x^{2n} - 1), \quad f_0(x) = \lim_{n \rightarrow 0} f_n(x) = \ln x \quad (75)$$

则由  $\mathbf{S}_n = f_n(\mathbf{U})$  给出 Seth 类应变<sup>[116]</sup>。特别地,  $\mathbf{S}_{(1)}$ ,  $\mathbf{S}_{(1/2)}$  和  $\mathbf{S}_{(0)}$  分别为工程上最常用的 Green 应变、Biot (或工程) 应变和对数应变。

当标架总剪切  $\gamma(\{\mathbf{E}_i\}) \ll 1$  时, 称  $\{\mathbf{E}_i\}$  为一个 Lagrange 型拟主轴标架, 或拟 Lagrange 标架 ([114] 曾称之为小剪切标架)。由于  $\gamma(\{\mathbf{N}_i\}) = 0$  是一个不受变形限制的基本概念, 及  $\gamma(\{\mathbf{E}_i\})$  对  $\{\mathbf{E}_i\}$  的连续性, 故当  $\{\mathbf{E}_i\}$  足够靠近  $\{\mathbf{N}_i\}$  时,  $\{\mathbf{E}_i\}$  必定可作为拟主轴标架。事实上, 若记  $\mathbf{R}$  为从  $\{\mathbf{N}_i\}$  到  $\{\mathbf{E}_i\}$  的转动 (或正交张量), 即  $\mathbf{E}_i = \mathbf{R} \mathbf{N}_i$ ,  $\beta$  为  $\mathbf{R}$  的转角, 则可证明<sup>[116]</sup>

$$\gamma = O(\beta \varepsilon_0), \quad \text{或} \quad \gamma = O(\beta \theta_0) \quad (76)$$



其中  $\epsilon_0$  为  $\mathbf{U}$  或工程应变  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$  的偏张量的范数;  $\theta_0$  为线素的最大纯应变转角。因此, 对于小应变 (可以是转动) 变形问题, 这时  $\|\boldsymbol{\epsilon}\|$  (自然还有  $\epsilon_0$ )  $\ll 1$ , 故任何标准正交标架都可作为拟主轴标架。这一特性对拟主轴法应用于大转动变形的板壳理论尤其有用。比如, 我们不妨取壳体初始构型的中曲面的法向和两个主曲率线方向构成的标准正交基作为拟 Lagrange 标架。这一标架事先就给定, 且不随壳体变形发展而变化; 然后, 应用拟主轴法所得各种关系, 构造出结构形式较简单的大转动壳体理论<sup>[117]</sup>。

在拟主轴标架下, [114, 115] 对应变、转动、应变率、转动率及各种旋率、共轭应力、应力客观率等等作了平行于主轴法的系统推导, 得到平行于主轴法的一系列近似结果及相应的误差估计。

对于 Hill 类应变  $\mathbf{S} = f(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{S}$  在拟主轴标架  $\{\mathbf{E}_i\}$  下的分量为 [略去了  $O(\gamma^2)$ ]

$$S_{11} = f(\lambda_1), \quad S_{12} = \phi_{12}\gamma_{12}/2 \quad (77a)$$

等等, 其中

$$\phi_{ij} = \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j} \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} \quad (77b)$$

对于小应变 (今后都理解为  $O(\gamma)$  量级的应变) 大转动变形问题, 由于 (74a), 故 [略去了  $O(\gamma^2)$ ]

$$S_{11} = \lambda_1 - 1, \quad S_{12} = (1/2)\gamma_{12} \quad (78)$$

等等, 是工程中常用应变。

主转动  $\mathbf{Q}$  在拟主轴标架  $\{\mathbf{E}_i\}$  下的分量矩阵为 [略去了  $O(\gamma^2)$ ]

$$\begin{pmatrix} \frac{F_{11}}{\lambda_1} & \frac{F_{12}}{\lambda_2} & \frac{F_{13}}{\lambda_3} \\ \frac{F_{21}}{\lambda_1} & \frac{F_{22}}{\lambda_2} & \frac{F_{23}}{\lambda_3} \\ \frac{F_{31}}{\lambda_1} & \frac{F_{32}}{\lambda_2} & \frac{F_{33}}{\lambda_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{12}\zeta_{21} + F_{13}\zeta_{31} & F_{11}\zeta_{12} + F_{13}\zeta_{32} & F_{11}\zeta_{13} + F_{12}\zeta_{23} \\ F_{22}\zeta_{21} + F_{23}\zeta_{31} & F_{21}\zeta_{12} + F_{23}\zeta_{32} & F_{21}\zeta_{13} + F_{22}\zeta_{23} \\ F_{32}\zeta_{21} + F_{33}\zeta_{31} & F_{31}\zeta_{12} + F_{33}\zeta_{32} & F_{31}\zeta_{13} + F_{32}\zeta_{23} \end{pmatrix} \quad (79a)$$

其中 [略去  $O(\gamma^2)$ ]

$$\zeta_{jk} = -\gamma_{jk}/(\lambda_j + \lambda_k), \quad (j \neq k) \quad (79b)$$

当转动张量  $\bar{\mathbf{Q}}$  与主转动  $\mathbf{Q}$  偏差为  $\|\bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{Q}\| = O(\gamma^2)$  时, 称  $\bar{\mathbf{Q}}$  为拟主转动。这时由拟 Lagrange 标架  $\{\mathbf{E}_i\}$  和  $\bar{\mathbf{Q}}$  构成的标架

$$\{\mathbf{e}_i\}, \quad (\mathbf{e}_i = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{E}_i) \quad (80)$$

叫 Euler 型拟主轴标架或拟 Euler 标架。易证, 在  $\{\mathbf{e}_i\}$  下的 Euler 型标架总剪切为  $O(\gamma)$  小量。引进三种旋率  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^P, \bar{\boldsymbol{\Omega}}^E, \bar{\boldsymbol{\Omega}}^L$  如下:

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^P = \dot{\bar{\mathbf{Q}}}\bar{\mathbf{Q}}^T, \quad \dot{\mathbf{e}}_i = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^E\mathbf{e}_i, \quad \dot{\mathbf{E}}_i = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^L\mathbf{E}_i \quad (81)$$

分别称之为拟主旋率、拟 Euler 旋率和拟 Lagrange 旋率, 它们之间存在关系

$$\bar{\boldsymbol{\Omega}}^E = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^P + \bar{\mathbf{Q}}\bar{\boldsymbol{\Omega}}^L\bar{\mathbf{Q}}^T, \quad \text{或 } \bar{\Omega}_{ij}^E = \bar{\Omega}_{ij}^P + \bar{\Omega}_{ij}^L \quad (82)$$

其中  $\bar{\Omega}_{ij}^P, \bar{\Omega}_{ij}^E$  为  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^P$  和  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^E$  在  $\{\mathbf{e}_i\}$  下的分量,  $\bar{\Omega}_{ij}^L$  为  $\bar{\boldsymbol{\Omega}}^L$  在  $\{\mathbf{E}_i\}$  下的分量。

记  $\dot{\mathbf{U}}$  在  $\{\mathbf{E}_i\}$  下的分量为  $\lambda_{ij}$ , 变形率张量  $\mathbf{D}$  (速度梯度  $\mathbf{G}$  的对称部分) 和物质旋率  $\Omega$  ( $\mathbf{G}$  的反称部分) 在  $\{\mathbf{e}_i\}$  下的分量分别为  $D_{ij}$  和  $\Omega_{ij}$ , 则可以证明[略去  $O(D\gamma)$ ]

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{ij} &= \frac{2\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}D_{ij}, \text{ 以及 } \lambda_{ii} = \dot{\lambda}_i \\ \Omega_{ij} &= \bar{\Omega}_{ij}^p + \frac{\lambda_i-\lambda_j}{\lambda_i+\lambda_j}D_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

其中  $D$  为拟主轴法中的另一个基本参数:

$$D = \|\mathbf{D}\| + \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon_0^2} \|\Omega^L\| \quad (84)$$

证明了  $t + \Delta t$  和  $t$  时刻的标架总剪切之间的关系为

$$\gamma|_{t+\Delta t} = \gamma|_t + O(D\Delta t) \quad (85)$$

故若增量  $\Delta t$  小至  $O(\gamma/D)$ , 则  $t$  时刻的拟主轴标架  $\{\mathbf{E}_0\}$  在  $[t, t + \Delta t]$  时间区间可固定不变。这一特征使得拟主轴法可应用于有限变形问题的增量法。进一步, 总剪切  $\gamma$  关于空间的连续性使得拟主轴法也适用于有限单元法等数值分析技术。

[114, 115] 还给出了 Hill 类应变  $\mathbf{S} = f(\mathbf{U})$  的物质时间导数  $\dot{\mathbf{S}}$  在拟主轴标架  $\{\mathbf{E}_i\}$  下的分量表示 [略去  $O(D\gamma)$ ]

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathcal{K}^{-1}[\mathbf{D}] = \sum_{i,j} \phi_{ij} D_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \quad (86)$$

这里  $\mathcal{K}$  是一个可逆的线性算子, 由 (86) 第二等式确定。按照功率共轭

$$\dot{w} = \mathcal{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{S}} \quad (87)$$

其中  $\boldsymbol{\sigma}$  为 Cauchy 应力,  $\mathcal{J} = \det \mathbf{F}$  为变形体积比, 即可引进并求算与  $\mathbf{S}$  功共轭的应力  $\mathbf{T}$  [分量公式略去了  $O(D\gamma)$ ]:

$$\mathbf{T} = \mathcal{J} \mathcal{K}[\boldsymbol{\sigma}] = \sum_{i,j} T_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j, \quad T_{ij} = \mathcal{J} \phi_{ij}^{-1} \sigma_{ij} \quad (88)$$

再按照

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{J} \mathcal{K}[\delta \boldsymbol{\sigma} / \delta t] \quad (89)$$

就引进了 [102] 所说的广义 Jaumann 导数 [误差为  $O(D\gamma)$ ]

$$\delta \boldsymbol{\sigma} / \delta t = \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \text{tr} \mathbf{D} + \mathcal{M}[\boldsymbol{\sigma}] \quad (90a)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \overline{\ln \mathcal{K}}, \text{ 或 } \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{M} \mathcal{K} \\ \mathcal{M} &= \sum_{i,j} M_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned} \quad (90b)$$

$$M_{ij} = -\overline{\ln \phi_{ij}} + \phi_{ij} \sum_m [\phi_m^{-1} (\Omega_{im}^L + \Omega_{im}^E) + \phi_m^{-1} (\Omega_{jm}^L + \Omega_{jm}^E)]$$

最近, 王文标和段祝平<sup>[118]</sup> 求得了主轴标架旋率的不变性表示, 并应用这一结果, 进而给出了 Hill 类应变率、以及与 Hill 类应变功共轭的应力的应力率的不变性表示。他们的这些形式虽是复杂的, 然而却是不变性形式的结果, 是 Hill 的主轴法一方面的完善。

在不变性算法方面, [119] 首先尝试给出变形梯度极分解 (5) 的不变性算法, 但该文关于三维的结果不完备。在 [119] 之前, [120—122] 都采用先计算主伸长比的方法给出极分解 (都是不变性算法), 其中 [121] 所给的结果比较充分。不过 Ting 所得到的几个常见各向同性张量函数表示, 只是 [123] 更早获得的一般各向同性张量函数表示的几个特例。 [124] 给出了极分解完备的不变性算法, 并根据 [123] 给出了一般 Hill 类应变的不变性算法通式以及它们在小应变中等转动情况下的近似化简。 [125] 给出了当变形梯度和分解中的“应变”和“转动”分别消失时极分解的简单、精确算法公式。 [126] 讨论了有限变形最大正交剪切的表示公式。

有限变形的应变和转动在不同量级情况下的化简问题几乎是每本有关固体力学的著作都要讨论, 且至今仍在深入研究的重要课题。如早期的 [7, 127, 1, 2], 近期的 [19, 128]。这一事实, 既反映了人们对线性化理论 (对应于小变形问题) 所取得的巨大成就的难于忘怀, 记录了处理不同程度非线性问题能力的提高过程, 同时也反映了针对不同特殊问题类型 (如杆、板、壳问题) 寻求最佳效率的努力。 [28, 129] 讨论了小应变伴随中等转动变形的一般理论, 并建立了相应的壳体理论; [130] 建立了上述变形及物理非线性的弹性近似理论, 他们通过扣除一点的转动, 从而实现一套新的不变性理论 (指刚性转动对方程无影响) 的构造。 [131] 表明, 把应变分解成弹性部分和塑性部分之和 (这是经典塑性理论基础概念之一) 的作法仅当变形为小应变、中等转动时才实际有效, 误差不至于太大。 [8] 以延伸度  $E$  和“平均转动”  $W$  的量级变化为基础讨论了 Green 应变在小、中、大和超应变时的表示, 并在一定精度控制下给出了各自的适用范围。最近, [132] 在 Green 应变及主转动表示的基础上对应变和转动的量级给出了明确的分类。 [29, 52] 给出了小应变、大转动变形和中等应变, 大转动变形的高精度简单算法。 [33, 50, 51, 133] 讨论了转动 (及共旋应力率) 的近似算法问题。在绝大多数非线性板、壳理论中<sup>[134—145]</sup>, 首先要做的就是对应变和转动的近似处理。通过把主转动分解为杆的横截面的整体转动和局部转动的复合, 利用局部转动很小或中等小, [146, 147] 导出了很简洁的新的杆理论。

### 参 考 文 献

- 1 Truesdell C, Toupin R. The Classical Field Theories. Encyclopedia of Physics, vol III/1, ed. Flugge S. Springer-Verlag (1961): 226—902
- 2 —, Noll W. The Non-Linear Field Theories. *ibid.*, vol III/3, ed. Flugge S. Springer-Verlag (1965): 1—602
- 3 Eringen A C. Continuum Physics. Vol I—IV. Academic Press (1971—1976)
- 4 Cauchy A L. *Bull. Soc. Philomath.* (1823): 9—13
- 5 —. *Ex. ed Math.*, 2 (1827): 60—69
- 6 —. *Ex. d'an Phys. Math.*, 2 (1841): 302—330
- 7 诺沃日洛夫 (朱兆祥译). 非线性弹性力学基础. 科学出版社 (1958)
- 8 朱兆祥. 力学进展, 13 (1983): 259—272
- 9 Marzano S. *Meccanica*, 22 (1987): 223—226
- 10 郑泉水, 黄克智. 科学通报, 33 (1988): 1705—1707
- 11 Cheng H, Gupta K C. *J. Appl. Mech.*, 56 (1989): 139—145
- 12 Korn A, Korn M (周民强等译). 数学手册. 工人出版社 (1987)
- 13 Richter H. *Math. Nachr.*, 8 (1952): 65—73
- 14 Noll W. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 2 (1958): 197—226
- 15 Grioli G. *Boll. Un. Mat. Ital.*, 2 (1940): 452—455

- 16 郑泉水, 熊祝华. 江西工业大学学报, **10** (1988): 8—21
- 17 Mardins L C, Podio-Guidugli P. *Rend. Acad. Naz. Lincei*, **66** (1979): 487—493
- 18 —, —. *Amer. Math. Month.*, **87** (1980): 288—290
- 19 郭仲衡. 非线性弹性理论. 科学出版社 (1980)
- 20 熊祝华, 郑泉水. 应用数学和力学, **10** (1989): 85—90
- 21 Ferrarese G. *Atti. Acad. Naz. Linzer., Rend. Cl. Fis. Mat. Natur., ser. 8*, **36** (1964): 629
- 22 Shield R T. *J. Appl. Mech.*, **25** (1973): 483—491
- 23 Shamina V A. *Izv. AN SSSR, Mekh. Tv. Tela*, **1** (1974): 14—22
- 24 Guo Z-H (郭仲衡). *Arch. Mech. Stos.*, **15** (1963): 475—505
- 25 Beatty M F. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **19** (1965): 167—188
- 26 Fraeijis de Veubeke B. *Int. J. Engng. Sci.*, **10** (1972): 745—763
- 27 John F. *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961): 391—413
- 28 Naghdi P M, Vongsarnpigoon L. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **80** (1982): 263—294
- 29 熊祝华, 郑泉水. 江西工业大学学报, **8** (1986): 1—29
- 30 Atluri S N, Murakawa H. *Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, vol 1, ed. Bergan P G et al., Norway (1977): 3—41
- 31 Wempner G. *Variational Methods in the Mechanics of Solids*, ed. Nemat-Nasser S, Pergamon Press (1980): 127—135
- 32 Wunderlich W, Obrecht H. *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. Wunderlich W, Stein E, Bathe K J, Springer-Verlag (1981): 185—216
- 33 Atluri S N. *Comp. Str.*, **18** (1984): 93—116
- 34 Buefler H. *Finite Rotations in Structural Mechanics*, ed. Pietraszkiewicz W, Springer-Verlag (1986): 82—100
- 35 Recke L, Wunderlich W. *ibid* (1986): 239—258
- 36 Sander G, Carnoy E. *Proc. Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Solid & Structural Mechanics*, Norway (1977)
- 37 Murakawa H, Atluri S N. *J. Appl. Mech.*, **45** (1978): 539
- 38 Basar Y. *Int. J. Sol. Str.*, **23** (1987): 1401—1415
- 39 Pietraszkiewicz W (ed). *Finite Rotations in Structural Mechanics*, Springer-Verlag (1986)
- 40 Hill R. *Adv. in Appl. Mech.*, **18** (1978): 1—75
- 41 —. *Proc. Roy. Soc. Lond., A* **314** (1970): 457—472
- 42 Biot M A. *Mechanics of Incremental Deformation*, John Wiley & Son (1965)
- 43 Pietraszkiewicz W. *Finite Rotations and Lagrangean Description in the Nonlinear Theory of Shells*, Polish Scientific Pub., Warszawa (1979)
- 44 —. *Theory of Shells*, ed. Koiter W T, Mikhailov G K, North-Holland (1980): 445—471
- 45 —, Badur J. *Int. J. Sol. Str.*, **21** (1985): 1097—1115
- 46 —, *ibid*, **19** (1983): 115—139
- 47 L C, Podio-Guidugli P. On the local measures of mean rotation in continuum mechanics. AMS (MOS) Subject Classification: 73J35. (1989)
- 48 郑泉水, 黄克智. 变形体的广义局部平均转动 I. MMM II, 上海 (1987)
- 49 —, —. 变形体的广义局部平均转动 II. MMM II, 上海 (1987)
- 50 Sowerby R, Chu E. *Int. J. Sol. Str.*, **20** (1984): 1037—1048
- 51 Chu E. *Acta Mechanica*, **59** (1986): 103—113
- 52 熊祝华, 郑泉水. 中等应变伴随大转动变形. MMM III, 庐山, 科学出版社 (1989): 498—502
- 53 郑泉水. 整体平均转动. 第6届华东地区固体力学讨论会, 镇江 (1989)
- 54 Nye J F. *Physical Properties of Crystals*, Oxford (1957)
- 55 蒋民华. 晶体物理. 山东科学技术出版社 (1980)
- 56 Aifantis E C. *Int. J. Plasticity*, **3** (1987): 211—247
- 57 Lee E H, Liu D T. *J. Appl. Phys.*, **38** (1967): 19—27
- 58 Zaremba S. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, (1903): 594—614
- 59 —. *Mem. Sci. Math.*, No. 82 (1937)
- 60 Jaumann G. *Sitzber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, **120** (1911): 385—530
- 61 Noll W. *J. Rat. Mech. Anal.*, **4** (1955): 3—81
- 62 Oldroyd J G. *Proc. Roy. Soc. (London)*, **A200** (1950): 523—541
- 63 Truesdell C. *J. Rat. Anal.*, **2** (1953): 593—616
- 64 Cotter B A, Rivlin R S. *Quart. Appl. Math.*, **13** (1955): 177—182

- 65 Thomas T Y. *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U. S.*, **41** (1955) : 762—770
- 66 Sedov L I. *Prikl. Mat. i Mekh.*, **24** (1960) : 393—398
- 67 Naghdi P M, Wainwright W L. *Quart. Appl. Math.*, **19** (1961) : 95
- 68 Masur E F. *ibid.*, **19** (1961) : 160
- 69 Guo Z-H. *Arch. Mech. Stos.*, **1** (1963) : 131—161
- 70 Bolder H. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **35** (1969) : 321—340
- 71 Prager W. *Quart. Appl. Math.*, **18** (1961) : 403—407
- 72 Eringen A C. *Mechanics of Continua*. Wiley (1967)
- 73 Green A E, Melniss B C. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A* **57**. Part III (1967) : 220—230
- 74 Dienes J K. *Acta Mechanica*, **32** (1979) : 217—232
- 75 Osias J R, Swedlow J L. *Int. J. Sol. Str.*, **10** (1974) : 321—339
- 76 Willis J R. *J. Mech. Phys. Solids*, **23** (1965) : 405—419
- 77 Dienes J K. *Acta Mechanica*, **65** (1986) : 1—11
- 78 郭仲衡. 应用数学和力学, 4 (1983)
- 79 孟凡中. 弹塑性有限变形理论和有限元方法. 清华大学出版社 (1985)
- 80 郑泉水. 简单物质的本构方程从无旋实验形式到一般形式. 第6届华东地区固体力学讨论会, 镇江 (1989)
- 81 Nagtegaal J C, de Jong J E. *Proc. of Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain*, ed. Lee E H, Mallet R L, Stanford University (1981)
- 82 Lee E H. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 554—560
- 83 Dafalias Y F. *ibid.*, **50** (1983) : 561—565
- 84 Johnson G C, Bammann D J. *Int. J. Sol. Str.*, **20** (1984) : 725—737
- 85 Dafalias Y F, No. 351 *Colloque Int. du C. N. R. S.*, ed. Boehler J P, Villard-de-Lans, Paris (1983)
- 86 —. *Mechanics of Materials*, vol 3 (1984) : 223—233
- 87 —. *Constitutive Equations: Macro and Computational Aspects*, ed. William K J, ASME (1984) : 25—40
- 88 Loret B. *Mechanics of Materials*, vol 2. (1983) : 287—304
- 89 Mandel J. *CIMS Courses and Lectures No97*, udlin, Springer-Verlag (1971)
- 90 Dafalias Y F. A Three-Part Report No. 83-1-2-3. Dept. of Civil Engineering, University of California at Davis (1983)
- 91 Voyiadjis G Z, Kiousis P D. *Int. J. Sol. Str.*, **23** (1987) : 95—109
- 92 Haupt P, Tsakmakis C. *Int. J. Plasticity*, **2** (1986) : 279—293
- 93 Reed K W, Atluri S N. *ibid.*, **1** (1985) : 63—87
- 94 Atluri S N. *Compt. Meths. Appl. Mech. Engng.*, **43** (1984)
- 95 黄筑平, 史帆. *MMM II*, 上海 (1987) : 79—81
- 96 Nemat Nasser S. *J. Appl. Mech.*, **50** (1983) : 1114—1126
- 97 Guo Z-H. *J. Elasticity*, **14** (1984) : 263—267
- 98 Hoger A, Carlson D E. *ibid.*, **14** (1984) : 329—336
- 99 Stickforth J, Wegener K. *Acta Mechanica*, **74** (1988) : 227—234
- 100 德冈辰雄. 理性连续介质力学入门. 科学出版社 (1982)
- 101 郑泉水, 扶名福. 物性非对称程度和非对称敏感度. *MMM III*, 庐山. 科学出版社 (1989) : 440—444
- 102 郭仲衡, Dubey R N. *力学进展*, **13** (1983) : 1—17
- 103 Guo Z-H, Dubey R N. *SM Archives*, **9** (1984) : 53—61
- 104 Dubey R N, Lehmann Th, Mayers A. *ibid.*, **7** (1982) : 363
- 105 —, Guo Z-H. *Trans. Can. Soc. Mech. Engng.*, **7** (1983) : 132
- 106 —. *Int. Sym. on Current Theories of Plasticity and Their Applications*, Norman, Oklahoma (1984)
- 107 —. *SM Archives*, **10** (1985) : 245—255
- 108 —. *ibid.*, **13** (1987) : 233—244
- 109 程莉, 黄克智. *力学学报*, **19** (1988) : 524—528
- 110 郭仲衡. *应用数学和力学*, **9** (1988) : 1045—1048
- 111 Gurtin M E, Spear K. *Int. J. Sol. Str.*, **19** (1983) : 437—444
- 112 Hoger A. *ibid.*, **22** (1986) : 1019—1032
- 113 Hayes M. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **100** (1988) : 265—273
- 114 Zheng Q-S (郑泉水), Xiong Z-H (熊祝华). *Approximate geometric theory of finite deformation*, 1st World Cong. Comput. Mech., Austin, Texas (1986)

- 115 郑泉水. 连续介质力学中的几个基本问题. 清华大学博士学位论文 (1989): 67—89
- 116 Seth B R. Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity, and Fluid Dynamics, ed. Reiner M, Abir D, Macmillan (1964)
- 117 郑泉水. 大转动壳体理论在拟主轴法下的构造. (待发表)
- 118 Wang W-B (王文标), Duan Z-P (段祝平). On the invariant presentation of spin tensors with applications. (待发表)
- 119 Hoger A, Carlson D E. *Quart. Appl. Math.*, **42** (1984): 113—117
- 120 Marsden J E, Hughes T. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall (1983): 55
- 121 Ting T C T. *J. Elasticity*, **15** (1986): 319—323
- 122 Sawyers K. *Quart. Appl. Math.*, **44** (1986): 309
- 123 郑泉水, 戴天民. *应用数学和力学*, **5** (1984): 1—8
- 124 Xiong Z-H, Zheng Q-S. *Acta Mechanica Sinica*, **4** (1988): 175—181
- 125 Martins L C, Oliveira R F, Podio-Guidugli P. *J. Elasticity*, **17** (1987): 189
- 126 Hayes M. *ibid*, **18** (1987): 279—282
- 127 Truesdell C. *J. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1952): 197—226
- 128 Ogden R W. *Non-Linear Elastic Deformations*. John Wiley (1984)
- 129 Naghdi P M, Vongsarnpigoon L. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **83** (1983): 245—283
- 130 Casey J, Naghdi P M. *ibid*, **88** (1985): 59—82
- 131 —. *Int. J. Sol. Str.*, **21** (1985): 671
- 132 郑泉水. 非线性弹性力学. 江西工业大学研究生讲义 (1988)
- 133 Seaman L. *Int. J. Sol. Str.*, **24** (1988): 735—750
- 134 Karman von T. *Encykl. d. Math. Wiss.*, **4** (1910): 311—385
- 135 Reissner E. *Proc. Symp. Appl. Math.*, **3** (1950): 27—52
- 136 Koiter W T. *Proc. Kon. Ned. Ak. Wet.*, Ser. B, **69** (1966): 1—54
- 137 Naghdi P M. *The theory of shells and plates*. *Handbuch der Physik*, vol. VIa/2. Springer-Verlag (1972): 435—640
- 138 Wempner G A. *Mechanics of Solids with Applications to the Thin Bodies*. McGraw-Hill (1973)
- 139 Koiter W T, Simmonds J G. *Foundations of Shell Theory*. Springer-Verlag (1980)
- 140 Librescu L. *Noordhoff Int.*, Leyden (1975)
- 141 Koiter W T, Mikhailov G. *Theory of Shells*. North-Holland (1980)
- 142 Olszak W. *Thin shell theory, new trends and applications*. CISM Courses and Lectures No 240. Springer-Verlag (1980)
- 143 Axelrad E L. *Theory of Flexible Shells*. North-Holland (1987)
- 144 Chia C-Y. *Appl. Mech. Rev.*, **41** (1988): 439—451
- 145 Schmidt R, Reddy J N. *J. Appl. Mech.*, **55** (1988): 611—617
- 146 Danielson D A, Hodges D H. *ibid*, **54** (1987): 258—262
- 147 —, —. *ibid*, **55** (1988): 179—184

## SOME FUNDAMENTAL PROBLEMS IN NONLINEAR FIELD THEORIES OF MECHANICS

Xiong Zu-hua

Department of Engineering Mechanics, Hunan University

Zheng Quan-shui

Department of Civil Engineering, Jiangxi Polytechnic University

**Abstract** The descriptions and applications of the rotations and spins of deforming bodies, the measures and applications of strains and strainings, and the objective derivatives of stresses are three interrelated important aspects in nonlinear field theories of mechanics. During the last ten years, they have been extensively studied and great progress has been made. In this paper a comprehen-

sive review on those three aspects is given, which includes also contributions of the authors.

**Keywords** *nonlinear field theories of mechanics; local rotations of deforming bodies; global rotations of deforming bodies; strain measures; objective derivatives of stresses; generalized Dienes' problem; method of principal axes; method of quasi-principal axes*

## 第1届全国环境流体力学学术会议

(1990年12月4—9日, 广州)

会议由中国力学学会流体力学专业委员会工业与环境流体力学专业组主办, 中山大学应用力学与工程系负责筹办。参加会议的学者112人, 香港大学、香港科技大学也有学者出席会议, 并作了学术报告。

20世纪的流体力学是紧密地联系着当代重大工程技术而发展的。前半叶主要围绕着航空与航天技术的需要而发展, 到60和70年代, 海洋工程和海洋开发的需要是促进流体力学发展的重要方面。70年代后期以来, 人类生存的环境成为人们日益关注的问题。而人类生存的环境, 无论是大气环境、海洋环境、地面或地下土壤环境, 或者是全球性的气候变化, 局部地区的环境污染, 台风、风暴潮、泥石流等自然灾害等等, 无不关联到流体力学问题。所以近10多年的流体力学研究, 已明显向人类生存环境方面倾斜。可以预言, 正像本世纪前半叶空气动力学是流体力学发展主流一样, 环境流体力学将成为今后流体力学发展的主流。这次在我国举行首次全国性的环境流体力学学术会议就是在这样的形势下召开的。

会议共录用了学术论文95篇。8位学者在大会上作了综述报告, 其余论文分组交流。企业界、工程界的代表提出了一系列实际问题, 希望与高校、科研、设计部门合作, 学术讨论气氛活跃。会议交流的论文大体上可分为如下几个方面。一是**大气环境和风环境**。大气环境包括小区域的大气污染, 烟囱排放废气的气流与扩散, 爆炸造成的环境问题, 城市汽车排气的扩散等。风环境主要是高层建筑和冷却塔风场、风载的研究和应用。二是**水质和水环境**。水环境方面主要是各种不同类型水域, 如明渠、江河、近海、河口、湖泊等水域中热水排放和污染物质排放的对流扩散的研究及应用, 但主要是远场的研究, 近场研究较少。水质方面主要是河网、湖泊的水质数学模型和数值模拟的研究和应用, 但工作不多。三是**降低噪声**。主要是围绕着通风和若干流体机械如风机、喷气发动机、空压机、水力机械、高速风洞、水洞等噪声治理进行流体力学分析和研究。四是**除尘**。一方面是对各种除尘和吸尘装置进行流场分析和除尘原理、效果的理论分析, 另一方面是围绕着粉尘的控制问题进行诸如粉尘起动、粉尘扩散等基本理论研究。除上述4个方面外, 还有少量论文涉及环境污染与土壤水运动问题, 土壤水盐运动问题, 地下水渗流问题, 泥石流问题, 风沙灾害治理和低重力环境问题等。在所有论文中数值模拟和工程应用占着重要位置。

从广义来说, 环境流体力学的研究领域涉及气候、生态、污染、灾害、工程等重大环境问题, 包括大气环流, 海洋环境, 大气海洋中的涡旋、湍流, 海-气相互作用, 污染物质与

(下转第309页)