

# 求解非比例阻尼体系复模态的实模态摄动法<sup>1)</sup>

楼梦麟<sup>2)</sup> 范么清

(同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘要** 根据工程结构的实际情况, 建立了非比例阻尼结构体系复模态特性的近似求解方法——实模态摄动法. 这一方法以复 Ritz 向量展开原理为基础, 把非比例阻尼结构体系复模态特性的分析过程分解为两个基本步骤, 首先以结构体系的实模态向量构建复 Ritz 向量的求解子空间, 然后通过非线性复代数方程组的求解代替扩阶后的复特征值方程的求解, 从而简化了计算过程. 通过两个算例表明: 这一方法不仅计算简便, 而且具有较高的计算精度和执行效率, 对于复杂的非比例阻尼系统是很适用的, 具有一定的工程应用价值.

**关键词** 非比例阻尼, 复模态, 模态摄动法, 复 Ritz 向量展开, 复杂结构

中图分类号: O327 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2007)01-0112-07

## 引 言

随着材料科学和技术的发展, 在大型土木工程结构中, 组合结构应用越来越广泛, 例如钢-钢筋混凝土组合结构、钢管混凝土拱桥梁等. 这些不同建筑材料组成的结构体系因不同材料的阻尼特性, 使得结构体系的阻尼矩阵很难再满足比例阻尼的假定, 即使同类材料的部件阻尼矩阵满足比例阻尼的假定, 也难形成结构体系的比例阻尼矩阵. 这类组合结构的动力分析问题是结构动力学中的非比例阻尼体系的动力分析问题. 当采用直接有限单元法分析土-结构相互作用体系的地震反应问题时, 也是非比例阻尼体系的动力分析问题. 在结构动力分析中, 采用比例阻尼的假定是为了充分利用实模态(即振型)正交性, 简化大型结构线性动力分析的计算. 目前各国结构抗震设计规范中广泛采用的反应谱理论是建立在振型叠加法的基础上, 其中一个重要假定为比例阻尼假定. 对于非比例阻尼体系的动力分析问题, 除采用直接积分的数值方法外, 由于阻尼矩阵不再满足关于体系无阻尼实模态的正交性, 因此传统的实模态叠加法不再适用. 为了利用振型正交性, 提出许多近似求解方法, 如忽略非比例阻尼的影响或其他修正的方法等, 常常不能全面地反映非比例阻尼对结构动力特性和地震反应的影响. 为了得到解耦的模态方程, 必须应用复模态方法. 虽

复模态分解法是数学意义上精确的求解方法, 但由于涉及复数运算特别是复特征值方程求解, 计算工作量大为增加, 因而复模态分解法在工程实际中应用不很普遍.

复模态解法目前常用的方法<sup>[1]</sup>有: 复数 Hessenberg 法、复数 Lanczos 法、复数逆幂法、模态 Hessenberg 法. 目前国外发展了一些其他的计算复模态的方法, Kasai 和 Link<sup>[2]</sup>提出一种由实模态导出对称模态阻尼矩阵的方法, 拓展了基于实验参数有限元算法程序解非比例阻尼体系的运动方程的应用范围. Dhikari<sup>[3]</sup>基于系统的运动方程, 给出由实模态求解复模态的方法, 从理论上解释了复模态可以看作是实模态的摄动. 国内多采用矩阵摄动法求解复模态<sup>[4~6]</sup>, 精度满足要求, 但计算过程复杂. 1994 年以来, 作者提出直接模态摄动法<sup>[7~9]</sup>, 该方法把新系统看作是在原系统基础上的微小改动, 因此其模态也可表示为在原系统模态上进行微小改动, 这一方法相比于小参数摄动法, 计算效率提高. 本文将应用这一基本思想, 以无阻尼结构体系作为基本系统, 有阻尼结构体系视为新系统, 新系统的复模态是在基本系统模态的基础上摄动而得, 由此建立求解大型非比例阻尼结构体系复模态的新途径.

## 1 非比例阻尼体系的振动方程与复模态分析

对于  $n$  个自由度的线性结构体系, 其运动方程

2006-04-17 收到第 1 稿, 2006-09-21 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (50538050).

2) E-mail: lml@mail.tongji.edu.cn

为

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = p(t) \quad (1)$$

式中  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  分别为体系的  $n$  维位移、速度和加速度向量. 实际工程结构的质量矩阵  $M$  一般是对称正定的, 阻尼矩阵  $C$  和  $K$  至少是对称非负定的,  $p(t)$  为作用在结构上的外部动力向量. 通常, 当结构为单一材料构建时, 假定阻尼矩阵为比例阻尼,  $C = \alpha M + \beta K$ . 应用振型正交性, 可由振型阻尼比确定比例系数  $\alpha$  和  $\beta$ . 对于线性体系, 可直接应用振型叠加法进行计算, 这时在实际应用中常取结构体系前  $m$  个低阶模态, 有效简化计算工作.

对非比例阻尼体系, 把式 (1) 和新增方程  $M\dot{x}(t) - M\dot{x}(t) = 0$  相结合, 写成状态方程可得

$$A\dot{u}(t) + Bu(t) = f(t) \quad (2)$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}, u(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{Bmatrix}$$

称为状态向量,  $f(t) = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

方程 (2) 为非比例阻尼结构体系用状态向量描述的振动方程. 与实模态理论中的振型叠加法 (简称实模态叠加法) 相对应, 非比例阻尼结构体系一般的求解方法为复模态叠加法. 通过复模态变换, 把结构动力反应方程解耦成若干个单自由度一阶复常微分方程.

令  $f(t) = 0$  即取  $p(t) = 0$ , 可得复特征值方程, 从而求得复特征值和复特征向量

$$(\gamma_l A + B)\psi_l = 0 \quad (3)$$

式中  $\gamma_l$  为体系的第  $l$  阶复特征值,  $\psi_l$  为对应的第  $l$  阶复特征向量. 对于工程结构体系, 式 (3) 的特征值和特征向量是共轭成对的, 即  $\bar{\gamma}_l$  和  $\bar{\psi}_l$  也是满足式 (3) 的解.

从式 (3) 可以看出, 与式 (1) 相比, 式 (2) 的自由度为  $2n$ , 扩大一倍, 而求解式 (3) 所表示的复特征值问题需要进行复数运算, 因而求解过程相对于实特征值问题求解所需时间显然要长得多.

## 2 求解复模态的实模态摄动法

如果令  $A_0 = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B_0 = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$ ,  $\Delta A = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 并把  $(A_0, B_0)$  定义为基本系统,

$(A = A_0 + \Delta A, B = B_0)$  可视为在基本系统基础上经过修改而产生的新系统. 由于工程结构的阻尼一般不大, 对结构振动特性的影响有限, 因此上述构成的问题满足摄动求解的基本条件.

### 2.1 基本系统的复频率和复模态

设基本系统第  $l$  阶复模态所对应的复频率为  $s_l$ , 复模态为  $\xi_l$ , 则基本系统的特征方程为

$$(s_l A_0 + B_0)\xi_l = 0 \quad (4)$$

其中

$$\xi_l = \begin{cases} \{\phi_l \ s_l \phi_l\}^T, & 1 \leq l \leq n \\ \{\phi_{l-n} \ \bar{s}_{l-n} \phi_{l-n}\}^T, & n+1 \leq l \leq 2n \end{cases}$$

且  $\bar{s}_{l-n} = s_l$ , “-” 表示复数共轭. 为利用实模态, 将式 (4) 中的第 1 项展开并令  $s_l = i\sqrt{\lambda_l}$ , 式中  $i = \sqrt{-1}$ , 则有

$$(K - \lambda_l M)\phi_l = 0 \quad (5)$$

式 (5) 为结构体系  $(M, K)$  的实特征值方程, 由此求出  $\phi_l$  和  $\lambda_l$  后, 可求得  $s_l, \xi_l$ .

根据实模态正交性, 在正则实模态空间中, 广义质量矩阵、广义刚度矩阵、广义阻尼矩阵分别为

$$M^* = \Phi^T M \Phi = \text{diag}\{m_1^*, m_2^*, \dots, m_n^*\} = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\} \quad (6a)$$

$$K^* = \Phi^T K \Phi = \text{diag}\{k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*\} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (6b)$$

$$C^* = \Phi^T C \Phi = [c_{kl}^*] \quad (6c)$$

由于一般工程结构的复模态是共轭成对出现的, 为适应下文的复模态分析, 将基本系统的实模态广义质量、广义刚度扩展到  $2n$  维, 补充如下定义:  $m_{l+n}^* = m_l^*$  和  $k_{l+n}^* = k_l^*$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ).

利用实模态的正交性, 可进一步得出基本系统的复模态正交性质, 当  $k, l \leq m$  时, 有

$$\xi_k^T A_0 \xi_l = \begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k \phi_k \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ s_l \phi_l \end{Bmatrix} = \begin{cases} 2s_l m_l^*, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (7)$$

$$\xi_k^T B_0 \xi_l = \begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k \phi_k \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ s_l \phi_l \end{Bmatrix} = \begin{cases} k_l^* - s_l^2 m_l^*, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (8)$$

$$\xi_k^T \Delta A \xi_l = \begin{Bmatrix} \phi_k \\ s_k \phi_k \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_l \\ s_l \phi_l \end{Bmatrix} = \phi_k^T C \phi_l = [\Delta a_{kl}^*] \quad (9)$$

考虑到复模态的共轭性和实模态广义质量、广义刚度的拓展定义, 式 (7) 和式 (8) 对于任意复模态 ( $l = 1, 2, \dots, 2n$ ) 都是成立的. 此时式 (9) 中的  $\Delta a^*$  为  $[\Delta a_{kl}^*] = [\xi_1 \cdots \xi_k \cdots \xi_m]^T \Delta A [\xi_1 \cdots \xi_l \cdots \xi_m]$  中第  $k$  行第  $l$  列元素, 下面讨论  $\Delta a^*$  的特点. 显然它与结构在实模态空间内的广义非比例阻尼矩阵  $C^*$  中的元素  $c_{kl}^*$  有如下关系: ①当  $k, l \leq n$  时,  $\Delta a_{kl}^* = c_{kl}^*$ ; ②当  $k \leq n, l \geq n + 1$  时,  $\Delta a_{kl}^* = c_{k, l-m}^*$ ; ③当  $k \geq n + 1, l \leq n$  时,  $\Delta a_{kl}^* = c_{k-m, l}^*$ ; ④当  $k \geq n + 1, l \geq n + 1$  时,  $\Delta a_{kl}^* = c_{k-m, l-m}^*$ .

### 2.2 实际结构体系的复频率和复模态

按直接模态摄动法的基本原理, 实际结构体系 ( $A, B$ ) 的第  $l$  阶复频率和复模态 ( $\gamma_l, \psi_l$ ) 可在基本系统 ( $A_0, B_0$ ) 的第  $l$  阶复频率和复模态 ( $s_l, \xi_l$ ) 的基础上进行修改而得, 即

$$\left. \begin{aligned} \gamma_l &= s_l + \Delta s_l \\ \psi_l &= \xi_l + \Delta \xi_l = \xi_l + \sum_j^* \xi_j q_j \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中,  $\Delta s_l$  为复频率的摄动量,  $\Delta \xi_l$  为复模态向量的摄动量, 为除  $\xi_l$  外的其余 ( $m - 1$ ) 个复特征向量的线性组合,  $q_j$  为复模态线性组合系数,  $\sum_j^*$  表示求和,  $j = 1, \dots, m$ , 且  $j \neq l$ . 式 (11) 中的  $m$  为所取的基本系统的复模态数目, 当  $m$  取  $2n$  时, 表示复模态求解空间的等价变换.

将式 (10) 代入式 (3), 左乘  $\xi_k^T$  并化简得

$$(s_l + \Delta s_l) \sum_j^* \Delta a_{lj} q_j + 2s_l \Delta s_l + \Delta a_{ll} \Delta s_l = -s_l \Delta a_{ll}, \quad k = l \quad (11a)$$

$$(s_l + \Delta s_l) \sum_j^* \Delta a_{kj} q_j + 2s_k (s_l - s_k + \Delta s_l) q_k + \Delta a_{kl} \Delta s_l = -s_l \Delta a_{kl}, \quad k = 1, \dots, m; k \neq l \quad (11b)$$

式 (11) 表明: 在基本系统复模态张成的求解空间内确定非比例阻尼结构体系的复模态时, 式 (10) 中的  $m$  个未知数可从式 (12) 表示的非线性复代数方程组求出, 从而避免了复特征值方程的求解.

### 2.3 复模态摄动解的求解

把式 (11) 合并写成矩阵方程的形式为

$$((s_l + \Delta s_l) \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2(\Delta s_l) + \mathbf{H}_3) \mathbf{q} = \mathbf{e} \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{H}_1 = \Delta \mathbf{a}^{*(l)}$ ,  $\Delta \mathbf{a}^{*(l)}$  表示令广义阻尼矩阵  $\Delta \mathbf{a}^*$  中的第  $l$  列元素全部为零时所得到的新矩阵.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(\Delta s_l) &= \text{diag}(2s_1(s_l - s_1 + \Delta s_l), \dots, \\ &2s_k(s_l - s_{l-1} + \Delta s_l), \\ &2s_l, 2s_k(s_l - s_{l+1} + \Delta s_l), \dots, \\ &2s_m(s_l - s_m + \Delta s_l)) \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}_3 = \Delta \mathbf{a}^* - \Delta \mathbf{a}^{*(l)}$$

$$\mathbf{q} = \{q_1 \cdots q_{l-1} \Delta s_l q_{l+1} \cdots q_m\}^T$$

$$\mathbf{e} = \{-s_l \Delta a_{1l} \cdots -s_l \Delta a_{ll} \cdots -s_m \Delta a_{ml}\}^T$$

式 (12) 所描述的  $m$  阶非线性复代数方程组可以下列迭代格式完成求解.

$$((s_l + \Delta s_l^k) \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2(\Delta s_l^k) + \mathbf{H}_3) \mathbf{q}^{k+1} = \mathbf{e} \quad (13)$$

当  $\mathbf{q}$  中的  $m$  个未知数求出, 由式 (10) 获得非比例阻尼结构体系的第  $l$  阶复频率和复模态, 令  $l = 1, 2, \dots, m$ , 可依次由式 (13) 求得非比例阻尼体系的各阶复频率及复模态. 并利用共轭特性获得共轭复频率和复模态. 由于实际结构一般只要不多的低阶模态信息就能很好地描述结构振动状况, 因此上述  $m$  取值可以远小于  $n$ , 同时由于只求一半的复模态, 上述解题规模实际很小, 从而极大提高计算效率.

### 3 复模态摄动的一阶近似

在式 (10) 中, 当  $m = 2n$  时, 基本系统的复模态  $\xi_j (j = 1, 2, \dots, 2n)$  已经形成一个完备的向量解空间, 因此可以将式 (3) 的任意特征向量  $\psi_l$  看作  $\xi_j$  的线性组合. 对于一般小阻尼的结构体系, 式 (3) 的解将和式 (4) 的解较为接近, 因此可以假设以下特征向量求解形式

$$\psi_l = \sum_{j=1}^{2n} q_j \xi_j \quad (14)$$

其中  $q_1 = 1$ , 且  $|q_j| \ll 1 (j \neq 1)$ .

将式 (10) 第 1 式代入式 (3), 左乘  $\xi_l^T$ , 利用式 (4) 并忽略  $\Delta a$  和  $q_j$  的二阶项, 将所得结果按二阶 Taylor 级数展开得

$$\gamma_l \approx s_l - \frac{\Delta a_{ll}}{2} + \frac{(\Delta a_{ll})^2}{4s_l} \quad (15)$$

忽略小量  $\Delta a_{ll}$  的两次平方, 得一阶 Taylor 级数近似

$$\gamma_l \approx s_l - \frac{\Delta a_{ll}}{2} \quad (16)$$

将式 (14) 代入式 (3), 左乘  $\xi_l^T (k \neq l)$  忽略  $q_j$  与  $\Delta a_{kj} (j = 1, 2, \dots, 2n)$  的二次项, 可得

$$q_k = -\frac{\gamma_l \Delta a_{kl}}{(2s_k \gamma_l - 2s_k^2)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n; k \neq l \quad (17)$$

由式 (16) 和式 (17) 可以看到, 当系统阻尼很小时, 复模态广义阻尼矩阵  $\Delta a^*$  很小, 因此可以将新系统的频率看作是原系统的微小摄动, 其复频率和复模态的摄动量分别为

$$\Delta s_l = -\frac{\Delta a_{ll}}{2} \quad (18)$$

$$\Delta \xi_l = \sum_k^* q_k \xi_k \quad (19)$$

可以看出, 一阶近似值的求解非常简单.

#### 4 实模态摄动法的精度

第  $l$  阶复频率的计算相对误差  $e$  可表示为

$$e = \frac{|\gamma_l - \tilde{\gamma}_l|}{|\tilde{\gamma}_l|} \approx b^2 / \sqrt{(1 - b^2)^2 + b^2} \approx b^2 / (1 - b^2) \quad (20)$$

式中,  $b = \Delta a_{ll} / 2\sqrt{\lambda_l}$ ;  $\tilde{\gamma}_l$  为系统第  $l$  阶复频率, 按式 (15) 计算,  $\gamma_l$  为一阶近似, 按式 (16) 计算.

假设系统为比例阻尼系统, 则根据  $\Delta a_{ll}$  的定义, 有  $b = 2\omega_l \xi_l / 2\sqrt{\omega_l^2} = \xi_l$ . 若把  $\xi_l$  看作非比例

阻尼系统中最大阻尼子系统的模态阻尼比, 那么, 上式可写为

$$e \leq \xi^2 / (1 - \xi^2) \quad (21)$$

当  $\xi$  较小时,  $e = \xi^2$ . 此式可作为误差上限的近似估计.

#### 5 算例

下面通过两个算例验证本文提出的直接模态摄动法的计算精度和效率.

**算例 1** 图 1 所示为 6 层框架组合结构, 每层 6 根柱子, 相邻柱子的间距均为 4m, 第 1 层到第 3 层的柱子为混凝土柱, 梁为混凝土梁, 截面分别为 0.5m×0.5m, 0.4m×0.4m; 第 4 层到第 6 层柱子为钢柱, 梁为钢梁, 截面为 0.24m×0.24m, 0.18m×0.18m. 楼板均为厚 0.15m 的混凝土楼板. 模型用通用有限元软件 ANSYS 建立, 加深的颜色表示钢框架, 楼层的每根梁、柱、每块板为 1 个有限单元. 取钢的阻尼比为 0.02、混凝土为 0.05. 按本文方法的计算结果与精确解法的计算结果对比如表 1, 表中仅列出前 10 阶复模态和前 5 阶实模态 (实际计算 28 阶复

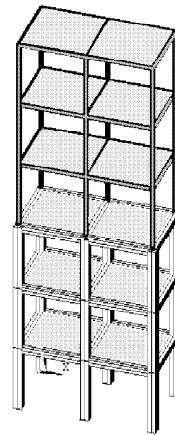


图 1 6 层混合结构有限元模型

Fig.1 FEM model of six floor complicated structure

表 1 框架组合结构的前 10 阶复特征值两种求解方法的对比

Table 1 Comparison between two methods for solving the first ten complex eigen-value of complicated frame structure

Modal order	Iteration solution	Approximate solution	Exact solution	The first five real eigenvalue
1, 2	-0.378 5 ± 13.768 0i	-0.378 8 ± 13.778 0i	-0.378 8 ± 13.773 5i	13.777 9
3, 4	-0.424 6 ± 15.943 1i	-0.424 8 ± 15.953 6i	-0.424 8 ± 15.949 1i	15.953 6
5, 6	-0.444 2 ± 17.150 7i	-0.444 4 ± 17.161 2i	-0.444 4 ± 17.157 0i	17.161 2
7, 8	-1.361 2 ± 39.256 4i	-1.362 8 ± 39.303 1i	-1.362 9 ± 39.284 2i	39.303 1
9, 10	-1.470 3 ± 41.741 0i	-1.472 2 ± 41.793 6i	-1.472 3 ± 41.771 2i	41.793 6

模态和 18 阶实模态). 采用摄动法时, 求实模态的时间为 0.125 s, 解摄动方程输出结果 0.171 s, 摄动法所需总时间 0.296 s. 从状态方程直接计算输出结果需 0.407 s.

**算例 2** 设有一 20 m×20 m 平面应变问题, 计算单元为三角形单元, 计算模型如图 2. 每个节点两个自由度, 纵坐标为 0 的所有节点完全约束. 材料属性 (弹性模量、泊松比、质量密度、单元厚度、阻尼比) 如下: 第 1 层,  $E_1 = 1.734 \times 10^8$  Pa,

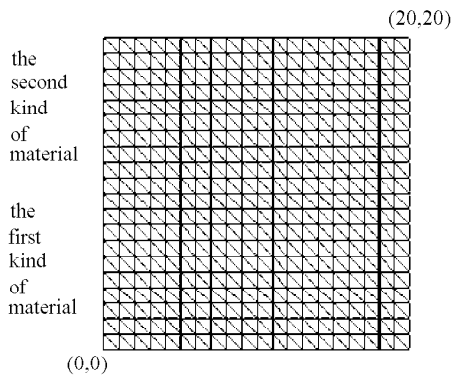


图 2 两种不同材料土层的有限元计算模型  
Fig.2 FEM model of soil layer with two different material attribute

$\mu_1 = 0.4, \rho_1 = 1890 \text{ kg/m}^3, t_1 = 1 \text{ m}, \xi_1 = 0.06$ ; 第 2 层,  $E_2 = 9.1 \times 10^7 \text{ Pa}, \mu_2 = 0.3, \rho_2 = 1950 \text{ kg/m}^3, t_2 = 1 \text{ m}, \xi_2 = 0.04$ . 阻尼采用瑞雷阻尼.

采用摄动法提取前 20 阶模态, 并与状态方程直接求解模态的方法进行对比. 采用摄动法时, 求实模态的时间 1.657 s, 解摄动方程输出结果 0.296 s, 摄动法总时间 1.953 s. 从状态方程直接计算输出结果需 11.938 s. 经过 2 次迭代求解的数值结果见表 2, 同算例 1, 表中只列出前 10 阶复模态和前 5 阶实模态.

从表 2 可以看出, 对于这一规模不大的算例, 采用实模态摄动法提取复模态, 不仅计算精度满足要求, 而且计算效率比直接由状态方程求出复特征值和特征向量的效率要高. 实模态摄动法所花时间为 1.953 s, 直接求复模态所花时间为 11.938 s, 后者计算时间是前者计算时间的 6 倍多. 这主要因为实模态摄动法是从  $n$  维实数空间中求解 18 阶实模态, 而状态方程是从  $2n$  维空间中求解 28 阶复模态, 前者求解工作量远小于后者. 随着求解规模的增大, 这一方法的优越性将更加突出.

表 2 不同材料平面应变问题的前 10 阶复特征值两种求解方法的对比

Table 2 Comparison between two methods for solving the first ten complex eigen-value of soil layer with different material attributes

Modal order	Iteration solution	Approximate solution	Exact solution	The first five real eigenvalue
1, 2	$-1.2818 \pm 28.8122i$	$-1.2843 \pm 28.8690i$	$-1.2843 \pm 28.8409i$	28.8690
3, 4	$-2.7062 \pm 68.0588i$	$-2.7102 \pm 68.1639i$	$-2.7103 \pm 68.1141i$	68.1639
5, 6	$-3.1590 \pm 75.0295i$	$-3.1643 \pm 75.1593i$	$-3.1645 \pm 75.0984i$	75.1593
7, 8	$-4.0217 \pm 100.9072i$	$-4.0278 \pm 101.0647i$	$-4.0279 \pm 100.9893i$	101.0647
9, 10	$-5.1098 \pm 112.5825i$	$-5.1201 \pm 112.8115i$	$-5.1201 \pm 112.7034i$	112.8115

从前两个算例可看出, 复模态摄动的一阶近似解具有很好的精度. 为了考察结构体系的阻尼比增大时本文方法的有效性, 成倍增加算例 2 中两种材料的阻尼比参数, 采用本文方法 (迭代 2 次) 和 Foss 状态向量法分别求解, 表 3 列出了  $\xi_1, \xi_2$  取值不同时用本文方法求解的计算精度, 包括体系前 10 阶的自振频率的计算精度和等效模态阻尼比的计算精度.

同算例 1, 此处列出前 5 阶自振频率结果. 所谓体系各阶自振频率和等效振型阻尼比是根据复频率实部和虚部数值计算的:  $\gamma_l = \xi_l \omega_l + i \omega_l \sqrt{1 - \xi_l^2}$ , 其中,  $\omega_l = |\gamma_l|, \xi_l = Re(\gamma_l) / \omega_l$ . 在土木工程结构中, 模态阻尼比一般在 1%~10%, 很少会超过 20%, 因此, 从表 3 中可看出本文方法适用于大型复杂结构的复模态分析. 表中相对误差符合式 (21) 的近似估计.

表 3 不同阻尼条件下实模态摄动法的计算精度 (各阶模态频率和阻尼比的相对误差, %)  
Table 3 Computational precision of real modal perturbation with different damping value  
(relative error percentage of every modal frequency and damping ratio)

Modal order $l$	$\xi_1 = 0.12, \xi_2 = 0.08$		$\xi_1 = 0.18, \xi_2 = 0.12$		$\xi_1 = 0.24, \xi_2 = 0.16$		$\xi_1 = 0.36, \xi_2 = 0.24$	
	$\omega_l$	$\xi_l$	$\omega_l$	$\xi_l$	$\omega_l$	$\xi_l$	$\omega_l$	$\xi_l$
1, 2	0.395 9	0.391 1	0.884 6	0.872 8	1.851 9	1.788 9	3.411 0	3.360 3
3, 4	0.324 7	0.289 2	0.727 3	0.644 8	1.412 9	1.329 8	2.840 4	2.506 7
5, 6	0.366 2	0.321 9	0.819 7	0.718 2	1.555 1	1.509 4	3.194 7	2.781 9
7, 8	0.302 1	0.308 7	0.726 1	0.638 5	1.533 5	1.450 5	2.816 6	2.480 1
9, 10	0.427 8	0.374 7	0.955 2	0.834 9	1.911 1	1.797 1	3.667 9	3.153 7

## 6 结 论

本文建立了求解非比例阻尼结构体系复模态特性的近似计算方法——实模态摄动法。应用这一方法，以无阻尼结构体系的实模态为基础，结合非线性复代数方程组的求解，可推导出非比例阻尼体系的复模态特性。在这一算法中，用  $n$  维体系的  $m$  阶实特征值问题和  $m(m \ll n)$  阶复代数方程组的求解代替  $2n$  维体系的  $2m$  阶复特征值问题的求解，简化了计算过程。两个算例的计算结果表明，这一方法计算简便，计算效率高，有很好的精度，对于工程实际中的非阻尼系统的动力特性计算是很适用的。

## 参 考 文 献

- 1 Komzsik L. Numerical Methods User's Guide. MSC. Nas-tran, 2001
- 2 Kasai T, Link M. Identification of non-proportional modal damping matrix and real normal modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2002, 16(6): 921~934
- 3 Dhikari SA. Calculation of derivative of complex modes using classical normal modes. *Computer and Structures*, 2000, 77: 625~633
- 4 桂国庆, 何玉敦. 非比例阻尼结构复模态问题求解的矩阵摄动法. 同济大学学报 (自然科学版), 1996, 24(6): 613~618 (Gui

Guoqing, He Yuao. Matrix perturbation method for solving the complex modal problem of non-proportionally damped structures. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 1996, 24(6): 613~618(in Chinese))

- 5 徐伟华, 刘济科. 阻尼系统振动分析的复模态矩阵摄动法. 中山大学学报, 1998, 37(4): 50~54(Xu Weihua, Liu Jike. Matrix perturbation method of complex modes in vibration analysis of damped system. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 1998, 37(4): 50~54(in Chinese))
- 6 刘济科, 徐伟华, 蔡承武. 一种通用的复模态矩阵摄动法. 应用数学和力学, 2001, 22(3): 314~320 (Liu Jike, Xu Weihua, Cai Chengwu. A universal matrix perturbation technique for complex modes. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(3): 314~320(in Chinese))
- 7 楼梦麟. 线性广义特征值问题在模态子空间中的摄动解. 同济大学学报 (自然科学版), 1994, 22(3): 268~273 (Lou Menglin. Perturbation method for the linear generalized eigenvalue problem in modal subspace. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 1994, 22(3): 268~273 (in Chinese))
- 8 Lou M, Chen G. Modal perturbation method and its applications in structural systems. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 2003, 169(8): 935~943
- 9 Lou M, Duan Q, Chen G. Modal perturbation method for the dynamic characteristics of Timoshenko beams. *Shock and Vibration*, 2005, 12(6): 425~434

## MODAL PERTURBATION METHOD FOR OBTAINING COMPLEX MODAL CHARACTERISTICS OF NON-PROPORTIONAL DAMPING SYSTEMS<sup>1)</sup>

Lou Menglin<sup>2)</sup> Fan Yaoqing

(*State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China*)

**Abstract** An approximate approach based on the direct modal perturbation method is suggested for analyzing the complex modal characteristics of non-proportional damping structure systems. The proposed approach uses the expansion of complex Ritz vectors. The procedure is in two steps. First, the subspace of the solution based on the complex vectors is formed by using the conventional real modes of the structure. Then, a set of solutions of non-linear complex algebraic equations is established to displace the solution of the complex eigen-value equations. The results of two numerical examples show that the suggested method simplifies the solving procedure and is of high precision and efficiency. It can be used for the solution of the complex modal characteristics and dynamic responses of non-proportional damping structure systems.

**Key words** non-proportionally damping, complex modal characteristics, modal perturbation method, expansion of complex Ritz vectors, complicated structure

---

Received 17 April 2006, revised 21 September 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (50538050).

2) E-mail: lml@mail.tongji.edu.cn