

槽道湍流近壁区多尺度输运特性研究¹⁾

贾宏涛 许春晓²⁾ 崔桂香

(清华大学航天航空学院, 北京 100084)

摘要 利用槽道湍流直接数值模拟的数据库和离散正交子波, 对近壁湍流的多尺度输运特性进行了研究. 通过在流向和展向分别进行子波多尺度分解, 得到了近壁区湍动能在流向和展向多尺度传输的不同性质, 发现流向传输以能量的反传为主, 而在展向能量存在明显的正传, 并且当过滤尺度较大时以正传为主. 近壁湍流能量传输的各向异性为进一步构造各向异性大涡模拟亚格子模式提供了必要的参考.

关键词 正交子波, 壁湍流, 多尺度输运

中图分类号: O357.5 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2007)02-0181-07

引 言

湍流流动是一种多尺度的复杂的流动现象, 高雷诺数时近乎无穷多的尺度是湍流研究、模拟和控制的主要困难. 由于湍流的直接数值模拟计算量巨大, 而雷诺平均的数值模拟普适性较差, 近年来, 湍流的大涡数值模拟发展迅速. 大涡模拟通过过滤, 将湍流脉动分解为大尺度(可解尺度)运动和小尺度(亚格子尺度)运动, 对大尺度运动直接数值求解, 小尺度运动对大尺度运动的影响通过亚格子模式给出, 因此合理的亚格子模式是成功实现湍流大涡模拟的关键, 而亚格子模式的建立依赖于人们对可解尺度和亚格子尺度之间湍流输运关系的正确认识.

目前, 近壁区湍流的模拟是湍流大涡模拟的主要困难之一. 随着与壁面的接近, 含能涡的尺度越来越小, 以至于含能尺度与耗散尺度相当; 由于湍动能主要产生在壁湍流的内层, 远离壁面区域的湍流脉动要靠近壁区传输过来的湍动能维持, 因此, 从全局来看, 存在着湍动能从小尺度脉动向大尺度脉动的反传过程; 由于壁面的不可穿透性, 使流动在壁面法向受到抑制, 从而使近壁区的湍流具有强烈的各向异性. 这些流动特点给壁湍流的大涡模拟带来了极大的困难, 严重阻碍了大涡模拟方法的进一步工程应用. 因此深入了解近壁区湍流的多尺度输运特性, 发展合理可行的近壁湍流模拟方法, 是目前湍流研究急需解决的问题.

本文将采用子波多尺度分析的方法, 从湍流输运的基本方程出发, 利用槽道湍流直接数值模拟的数据库, 对近壁湍流的多尺度输运特性进行研究. 子波分析是一种具有自适应窗口和平移功能, 能有效地进行多尺度细化分析的方法, 与传统的 Fourier 分析相比, 它所具有的时、频双局部性质使它成为湍流分析的有力工具. 在系统的子波多尺度分析方法建立不久, 子波分析的方法就被引入了湍流研究领域^[1]. 除了利用子波对湍流相干结构、湍流统计特性等进行研究以外, Meneveau^[2] 利用正交子波, 从 N-S 方程出发, 建立了湍流多尺度输运的基本研究框架, 在此基础上, Dunn 和 Morrison^[3,4] 利用二维正交子波对槽道湍流进行了研究, 在与壁面平行的平面内分析了湍动能的多尺度输运特性. 考虑到湍流在流向和展向的各向异性, 本文将利用正交子波, 对槽道湍流在流向和展向分别进行多尺度分解, 研究在不同方向湍流的多尺度输运性质, 为进一步构造各向异性的大涡模拟亚格子模式打下基础.

1 湍动能传输的子波多尺度分析

根据不可压缩牛顿流体的运动方程和连续性方程, 可以导出脉动运动方程

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle) \quad (1)$$

2006-03-28 收到第 1 稿, 2006-06-07 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10472053).

2) E-mail: xucx@tsinghua.edu.cn

其中 u_i 和 U_i 分别代表脉动速度和平均速度分量, p 为脉动压力, 密度 ρ 为常数, $\langle \rangle$ 表示系综平均, 因为充分发展的槽道湍流是统计定常的, 并且在 x 和 z 方向是统计均匀的, 因此本文中 $\langle \rangle$ 表示对 x, z 和 t 的平均.

本文利用一维正交子波, 对流动的物理量在 x 和 z 方向分别进行展开, 从而进行多尺度分析. 下面以 x 方向的子波分析为例进行说明. 脉动速度 $u_i(x)$ 可以写为

$$u_i(x) = \sum_m \sum_j w_i^{(m)}[j] \psi^{(m)}[x - 2^m j] \quad (2)$$

其中 j 和 m 分别为位置和尺度指标, $w_i^{(m)}[j]$ 为 $u_i(x)$ 的子波系数

$$w_i^{(m)}[j] = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(x) \psi^{(m)}(x - 2^m j) dx \quad (3)$$

ψ 为子波函数, 它满足尺度和位置的双正交关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(m)}(x - 2^m i) \psi^{(n)}(x - 2^n j) dx = \delta_{mn} \delta_{ij} \quad (4)$$

本文采用 16 点 Daubechies 子波, 其衰减长度为 8, 如图 1 所示, 并采用 Mallat 提出的子波变换的快速算法 [7].

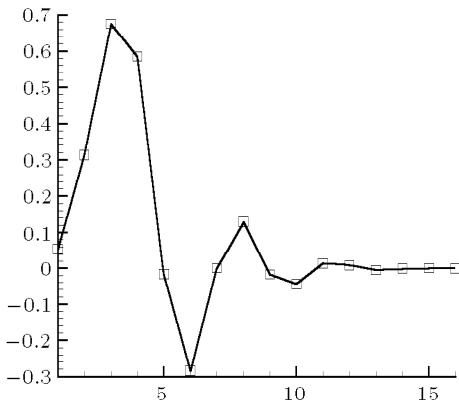


图 1 16 点 Daubechies 子波

Fig.1 16-points Daubechies wavelets

对方程 (1) 两边同时作子波变换, 并利用子波的正交性可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i^{(m)}}{\partial t} + \left\{ U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}^{(m)} = & \\ - \left\{ u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\}^{(m)} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\}^{(m)} - & \\ \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle) \right\}^{(m)} & \end{aligned} \quad (5)$$

在上式两边同乘 $w_i^{(m)}$, 可得

$$\frac{\partial e^{(m)}[j]}{\partial t} + C^{(m)}[j] = P^{(m)}[j] + V^{(m)}[j] + t^{(m)}[j] \quad (6)$$

其中

$$e^{(m)}[j] = \frac{1}{2} w_i^{(m)}[j] w_i^{(m)}[j] \quad (7)$$

$$C^{(m)}[j] = w_i^{(m)}[j] \left\{ U_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\}^{(m)} [j] \quad (8)$$

$$P^{(m)}[j] = -w_i^{(m)}[j] \left\{ u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right\}^{(m)} [j] \quad (9)$$

$$V^{(m)}[j] = \nu w_i^{(m)}[j] \left\{ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\}^{(m)} [j] \quad (10)$$

$$t^{(m)}[j] = -w_i^{(m)}[j] \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j - \langle u_i u_j \rangle) \right\}^{(m)} [j] \quad (11)$$

$e^{(m)}[j]$ 代表了位置 j 处尺度为 r_m 的子波动能密度, 为了更好地理解 $e^{(m)}[j]$ 的物理意义, 定义子波能谱

$$E(k_m) = \frac{\Delta}{2\pi \ln 2} \langle e^{(m)}[j] \rangle \quad (12)$$

其中 $k_m = 2\pi/r_m$, 类似于 Fourier 谱的波数; $r_m = 2^m \Delta$, $m = 1, 2, \dots, M$, 总的采样点数为 2^M ; Δ 为采样点间距, 对 x 方向进行子波分解时取为 Δx , 对 z 方向分解时取为 Δz , 根据子波的正交关系式 (4), 得到湍动能与子波能谱的关系

$$\frac{1}{2} \langle u_i^2(x) \rangle = \sum_{m=1}^M E(k_m) \Delta k_m \quad (13)$$

其中 $\Delta k_m = 2\pi \ln 2 / r_m$. 图 2 显示了一个一维随机信号子波能谱, 并和 Fourier 能谱进行了比较, 从

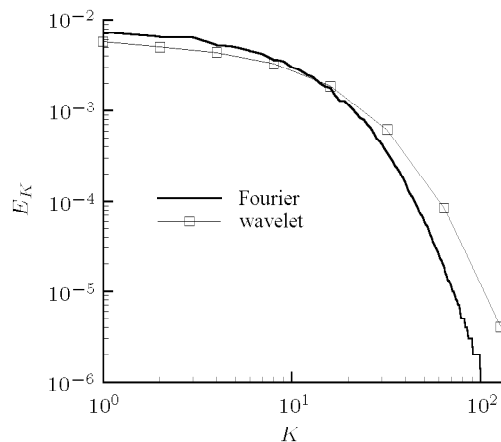


图 2 一维 Fourier 能谱和子波能谱

Fig.2 One-dimensional Fourier and wavelet energy spectra

图上看出这两种能谱具有一定的相似性。

方程 (6) 中的 $C^{(m)}$, $P^{(m)}$, $V^{(m)}$ 和 $t^{(m)}$ 分别代表位置 j 处 r_m 尺度上对流、产生、黏性和传输对动能密度的贡献, 对于湍流的大涡模拟, 人们更关心湍动能在不同尺度间的传输性质, 因此, 下面着重对传输项 $t^{(m)}[j]$ 进行讨论和分析。

根据式 (2) 的子波分解, 可以将脉动速度 $u_i(x)$ 分解为小尺度脉动 $u_i^{<m}(x)$ 和大尺度脉动 $u_i^{>n}(x)$

$$u_i(x) = u_i^{<n}(x) + u_i^{>n}(x) = \sum_{m=1}^n u_i^{(m)}(x) + \sum_{m=n+1}^M u_i^{(m)}(x) \quad (14)$$

其中 $u_i^{(m)}(x)$ 代表 r_m 尺度的脉动速度

$$u_i^{(m)}(x) = \sum_j w_i^{(m)}[j] \psi^{(m)}[x - 2^m j] \quad (15)$$

由此 Meneveau^[2] 将亚格子应力定义为

$$\tau_{ij}^{(n)} = u_i u_j - u_i^{>n} u_j^{>n} \quad (16)$$

类似地将脉动压力 $p(x)$ 也分解为小尺度部分和大尺度部分,

$$p(x) = p^{<n}(x) + p^{>n}(x) = \sum_{m=1}^n p^{(m)}(x) + \sum_{m=n+1}^M p^{(m)}(x) \quad (17)$$

并由此考察亚格子尺度和可解尺度之间的能量传输。Meneveau^[2] 定义

$$t^{(m,n)}[j] = -w_i^{(m)}[j] \left\{ \frac{\partial \tau_{ij}^{(n)}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^{<n}}{\partial x_i} \right\}^{(m)} [j] \quad (18)$$

它代表了位置 j 处 r_m 尺度向所有小于 r_n 的尺度所传输的能量 ($r_m > r_n$), $t^{(m,n)}[j] > 0$ 代表能量由大尺度向小尺度传输, 而 $t^{(m,n)}[j] < 0$ 代表能量的反传。在 $t^{(m,n)}[j]$ 中, 对所有可解尺度的传输求和 (对 m 求和), 就得到了位置 j 处可解尺度到亚格子尺度传输的能量通量

$$\pi_{\text{sgs}}^{(n)}[j] = \sum_{m=n+1}^M 2^{(M-m)} t^{(m,n)}[2^{(n-m)} j] \quad (19)$$

对位置 j 做平均, 得到分尺度的亚格子传输谱

$$T^{(m,n)}(k_m) = \frac{\Delta}{2\pi \ln 2} \langle t^{(m,n)}[j] \rangle \quad (20)$$

以及可解尺度和亚格子尺度间的能量通量谱

$$\Pi_{\text{sgs}}(k_n) = 2^{-n} \langle \pi_{\text{sgs}}^{(n)}[j] \rangle \quad (21)$$

2 近壁湍流多尺度传输特性

利用无限大平行平板间充分发展的槽道湍流直接数值模拟的数据库, 对近壁湍流的多尺度输运特性进行了研究。该数据库是通过采用谱方法直接数值求解不可压缩牛顿流体的控制方程建立的, 其基本参数如表 1 所示, 其中 $Re_\tau = u_\tau \delta / \nu$, u_τ 为壁面摩擦速度, δ 为槽道的半宽度, x 和 z 分别代表流向和展向, y 为壁面法向, 相应的脉动速度分量在下文中分别用 u , v 和 w 表示。数值方法详见文献 [5], 该数据库的统计结果与文献 [6] 进行了对比, 它们都符合得很好, 充分证明了本数据库的可靠性。

表 1 槽道湍流数据库基本参数

Table 1 Basic parameter of turbulent channel flow database

Reynolds number	Calculation domain	Grids	Spatial resolution
$Re_\tau = 395$	$2\pi\delta \times 2\delta \times \pi\delta$	$256 \times 193 \times 256$	$\Delta x^+ = 9.7$
			$\Delta z^+ = 4.8$
			$\Delta y_{\min}^+ = 0.05$
			$\Delta y_{\max}^+ = 6.5$

本文利用离散正交子波分别对 x 方向和 z 方向进行了尺度分解, 数据库在 x 方向和 z 方向的网格点数均为 $256 = 2^8$, 因此可以分别分为 8 个尺度, 所对应的 r_m 见表 2。其中 3, 4, 5 三个尺度对应于大涡模拟常用的过滤尺度, 下面对这 3 个尺度下湍流的传输特性进行分析。

表 2 不同尺度指标所对应的尺度

Table 2 The length scale for different scale index

m	1	2	3	4	5	6	7	8
r_m^+ (x direction)	19.4	38.8	77.6	155	310	620	1241	2482
r_m^+ (z direction)	9.7	19.4	38.8	77.6	155	310	620	1241

首先分析不同的特征尺度下分别在 x 方向和 z 方向过滤对亚格子应力影响。如图 3 所示, 图 3(a)~图 3(c) 显示了 $n = 3, 4, 5$ 时沿 x 方向尺度分解得到的平均亚格子应力 $\langle \tau_{ij}^{(n)} \rangle$ 随 y^+ 的分布, 图 3(d)~图 3(f) 则显示了相应尺度下沿 z 方向分解的结果。从图 3 上可以看出, 与 x 方向的过滤相比, z 方向过

滤得到的亚格子应力更集中在近壁区. x 方向过滤得到的 $\langle \tau_{11}^{(n)} \rangle$ 与 $\langle \tau_{22}^{(n)} \rangle$, $\langle \tau_{33}^{(n)} \rangle$ 幅值比较接近, 而 z 方向过滤得到的 $\langle \tau_{11}^{(n)} \rangle$ 远大于相同尺度下其它的应力分量, 并且其幅值比 x 方向过滤的结果大得多, 表明 x 方向 $\langle u^2 \rangle$ 主要包含在大尺度中. x 方向过

滤时, $\langle \tau_{33}^{(n)} \rangle$ 始终大于 $\langle \tau_{22}^{(n)} \rangle$, 但 z 方向过滤时, $\langle \tau_{22}^{(n)} \rangle$ 与 $\langle \tau_{33}^{(n)} \rangle$ 的关系随着 y^+ 而变化: 在近壁区 $\langle \tau_{33}^{(n)} \rangle > \langle \tau_{22}^{(n)} \rangle$, 随着与壁面距离的增加, $\langle \tau_{22}^{(n)} \rangle$ 变得大于 $\langle \tau_{33}^{(n)} \rangle$.

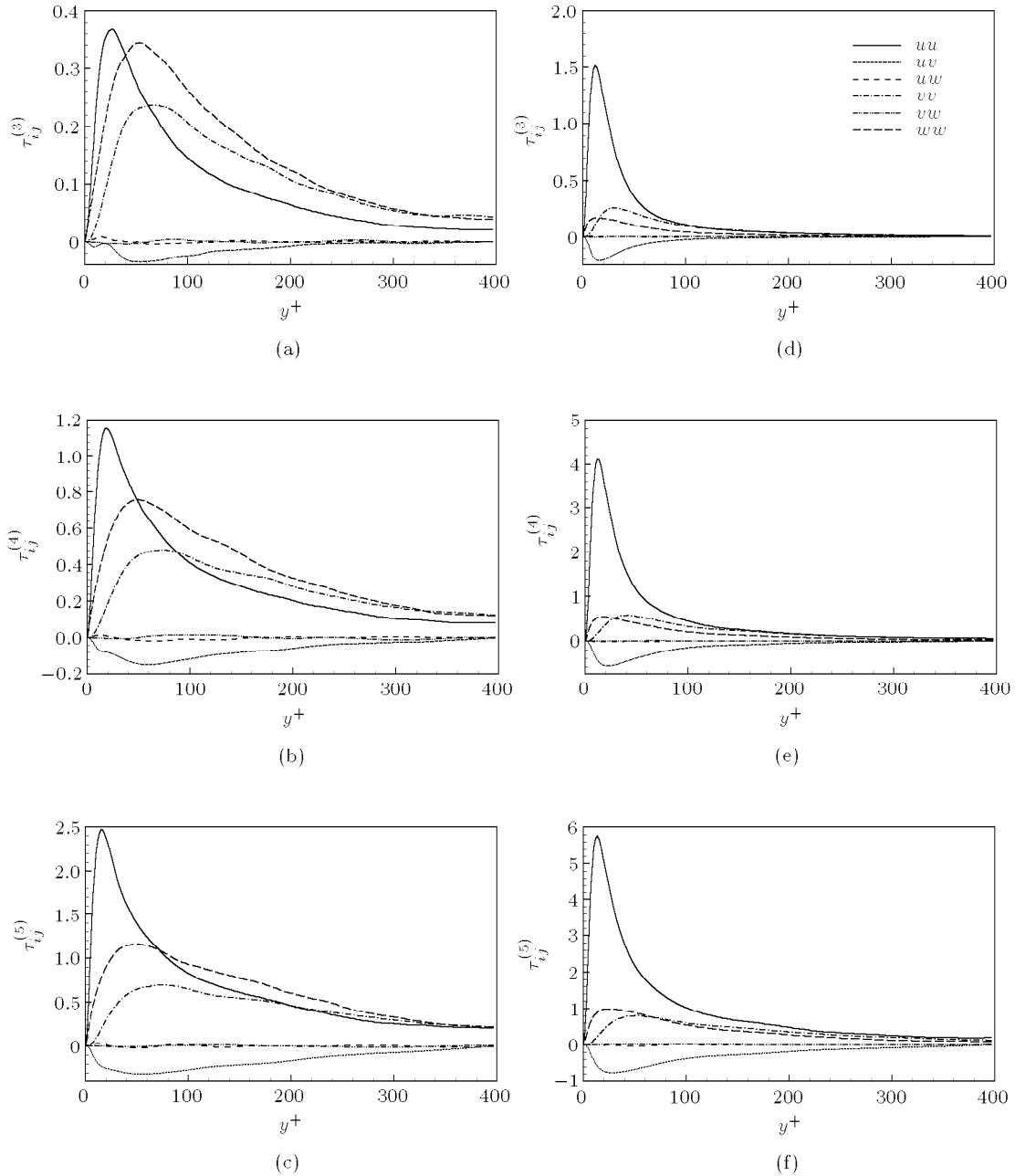


图 3 亚格子应力 $\langle \tau_{ij}^{(n)} \rangle$ 随 y^+ 的变化, $n = 3, 4, 5$, $\langle \tau_{ij}^{(n)} \rangle$ 用 u_τ^2 进行无量纲化. (a)~(c): 沿 x 方向进行尺度分解; (d)~(f): 沿 z 方向进行尺度分解

Fig.3 Distribution of the sub-grid stress $\langle \tau_{ij}^{(n)} \rangle$ as a function of y^+ , $n = 3, 4, 5$, $\langle \tau_{ij}^{(n)} \rangle$ is normalized by u_τ^2 . (a)~(c): scale decomposition in x direction; (d)~(f): scale decomposition in z direction

图 4 显示了分尺度亚格子传输谱 $T^{(m,n)}$ 随 y^+ 的分布. 在 x 方向, 能量的正传只局限在黏性底层内, 在黏性底层以外则全部是能量的反传, 而且反传的能量要远大于正传的能量; 当过滤尺度 $n = 3$ 时, 从亚格子尺度向可解大尺度传输能量的极值位置随着可解尺度的增大而逐渐远离壁面, 而在 $n = 4, 5$ 时, 反传能量的极值位置则都位于 $y^+ \approx 15$ 附近. 在 z 方向, 情况则完全不同, 能量传输更靠近壁面, 主

要在 $y^+ < 50$ 以内; 当过滤尺度 $n = 3$ 时, 只在两个与过滤尺度相邻的尺度 $m = 4, 5$ 上能量反传明显, 其极值也位于 $y^+ \approx 15$ 附近, 随着 m 的增加, 反传量减少, 而能量的正传略有增加, 并且峰值位置略有外移; 当 $n = 4$ 时, 只有相邻尺度 $m = 5$ 时有明显反传, 其它尺度都以正传为主, 并且正传区域已不局限于黏性底层, 而扩展至 $y^+ < 30$ 以内; 当过滤尺度再增加至 $n = 5$ 时, 整个 $y^+ < 50$ 以内基本

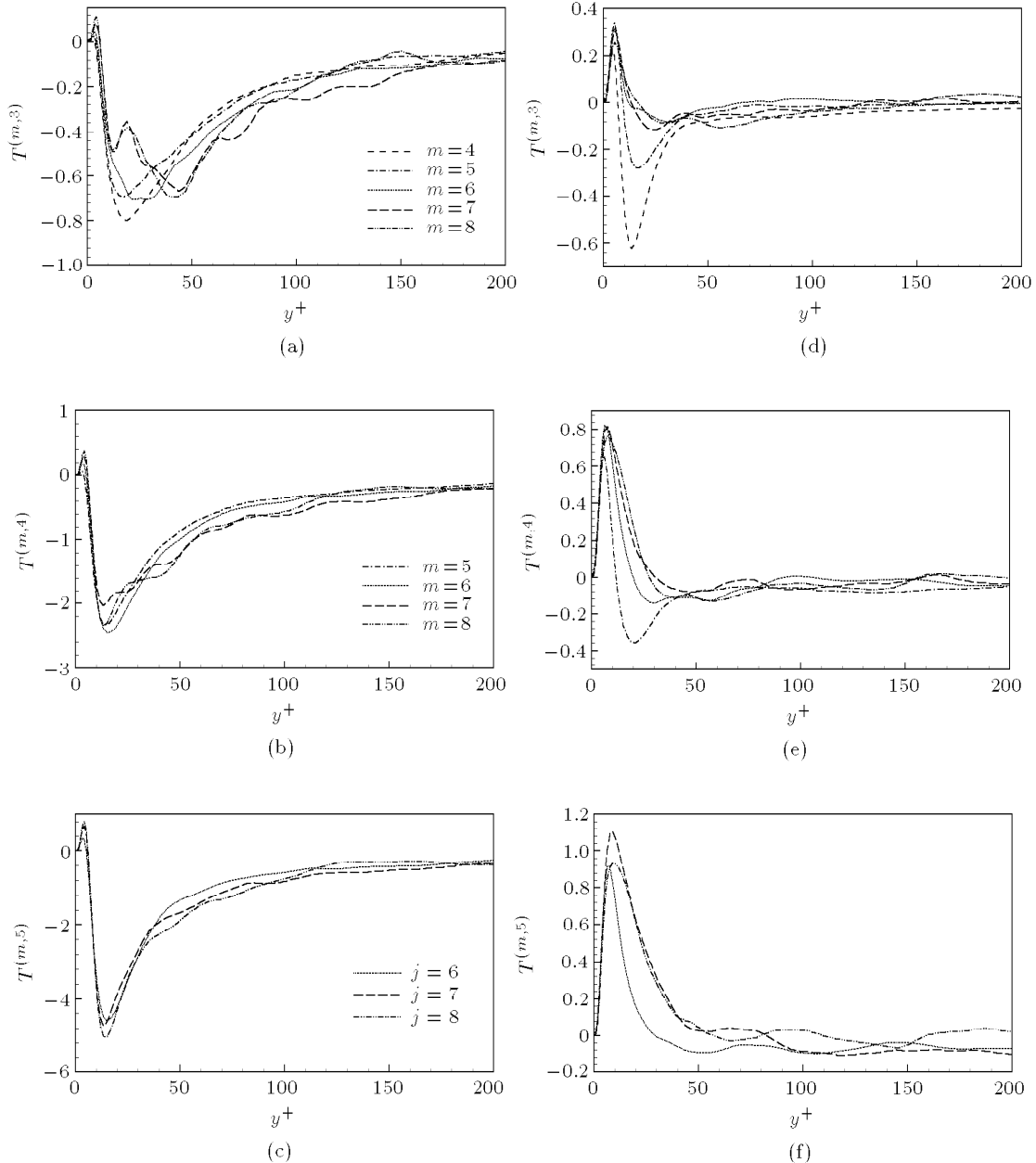


图 4 分尺度亚格子传输谱 $T^{(m,n)}$ 随 y^+ 的分布, $n = 3, 4, 5$. $T^{(m,n)}$ 用 u_τ^2/δ 进行无量纲化. (a)~(c): 沿 x 方向进行尺度分解; (d)~(f): 沿 z 方向进行尺度分解

Fig.4 Distribution of sub-grid scale energy transfer $T^{(m,n)}$ as a function of y^+ , $n = 3, 4, 5$. $T^{(m,n)}$ is normalized by u_τ^2/δ . (a)~(c): decomposition in x direction; (d)~(f): decomposition in z direction

上都是正传, 能量的反传已不明显.

可解尺度与亚格子尺度间能量通量谱 Π_{sgs} 随 y^+ 的分布显示于图 5 中. 在 x 方向, 除了在黏性底层内有很小的正传以外, 整个区域上都是能量的反传为主, 并且随着过滤尺度 n 的增大, 反传能量的最大位置逐渐靠近壁面, 当过滤尺度 $n = 3$ 时反

传能量最大, 其极值出现在 $y^+ \approx 20$ 附近. 在 z 方向, 可解尺度与亚格子尺度间的能量传输主要发生在 $y^+ < 50$ 以内, 正传和反传的区域随着过滤尺度的不同而有所变化. 在大涡模拟的通常采用的过滤尺度 $n = 3$ 时, 在靠近壁面处 ($y^+ < 10$) 存在显著的正传, 在 $10 < y^+ < 50$ 范围内存在强烈的反传, 反

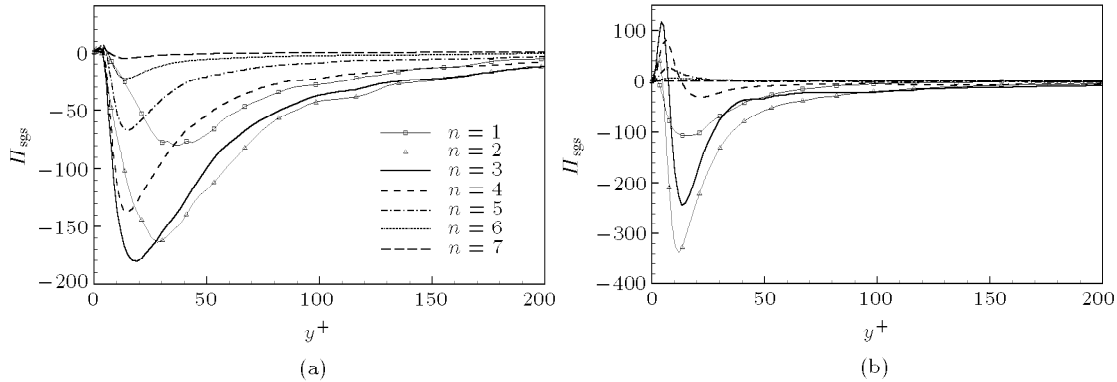


图 5 可解尺度与亚格子尺度间能量通量谱 Π_{sgs} 随 y^+ 的分布. Π_{sgs} 用 u_τ^3/δ 进行无量纲化.

(a) 沿 x 方向进行尺度分解; (b) 沿 z 方向进行尺度分解

Fig.5 Distribution of sub-grid scale energy flux Π_{sgs} as a function of y^+ . Π_{sgs} is normalized by u_τ^3/δ .

(a) decomposition in x direction; (b) decomposition in z direction

传的极值出现在 $y^+ \approx 15$ 附近.

3 结论和讨论

本文利用离散正交子波, 对槽道湍流在流向和展向进行了多尺度分析, 研究了近壁区湍流在流向和展向多尺度传输的不同特性. 与流向过滤相比, 展向过滤的亚格子应力以及能量传输更集中在近壁区, 主要传输区域位于 $y^+ < 50$ 以内. 在流向, 能量主要是从亚格子尺度向可解尺度反传, 能量的正传主要集中在黏性底层内, 并且幅值很小; 而在展向, 正传比较明显, 正传的区域也并不限制在黏性底层内, 它随着过滤尺度的不同而有所变化, 当过滤尺度 $n \leq 3$ 时存在较为显著的反传现象, 而当过滤尺度 $n > 3$ 时反传很小, 主要以能量的正传为主. $n = 3$ 这个尺度是大涡模拟常用的过滤尺度, 因此, 在构造各向异性大涡模拟亚格子模式时, 应当充分考虑不同方向多尺度传输的不同特点. 上述流向和展向传输性质的不同, 说明近壁湍流中可能存在这样一种物理过程: 在流向能量从小尺度向大尺度传输而形成一些大尺度结构, 例如条带结构, 而这种

大尺度结构又在展向向小尺度传输能量, 能量的多尺度传输与近壁湍流动力学过程的关系将是进一步的研究内容.

参 考 文 献

- 1 Farge M. Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annu Rev Fluid Mech*, 1992, 24: 395~457
- 2 Meneveau C. Analysis of turbulence in the orthonormal wavelet representation. *J Fluid Mech*, 1991, 232: 469~520
- 3 Dunn DC, Morrison JF. Anisotropy and energy flux in wall turbulence. *J Fluid Mech*, 2003, 491: 353~378
- 4 Dunn DC, Morrison JF. Analysis of the energy budget in turbulent channel flow using orthogonal wavelets. *Comp & Fluids*, 2005, 34: 199~224
- 5 许春晓. 槽道湍流的直接数值模拟. [博士论文]. 北京: 清华大学, 1995 (Xu Chunxiao. Direct numerical simulation of turbulent channel flow. [Ph D thesis]. Beijing: Tsinghua University, 1995 (in Chinese))
- 6 Moser RD, Kim J, Mansour NN. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Phys Fluids*, 1999, 11(4): 943~945
- 7 Mallat SG. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE Tran Patt Ana Mach Inte*, 1989, 11(7): 674~693

MULTI-SCALE ENERGY TRANSFER IN NEAR-WALL REGION OF TURBULENT CHANNEL FLOW ¹⁾

Jia Hongtao Xu Chunxiao²⁾ Cui Guixiang

(*School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

Abstract The multi-scale energy transfer in near-wall turbulence is studied by orthonormal wavelets and the database of channel turbulence obtained by direct numerical simulation. By a multi-scale decomposition of the flow field in streamwise and spanwise directions, the difference of energy transfer between these two directions is investigated. It is found that the energy transfer in the streamwise direction is dominated by back scatter, while in the spanwise direction, there is an obvious forward transfer, which is not confined in the viscous sublayer only like that in the streamwise direction. With a larger filter width, the forward energy transfer in the spanwise direction becomes dominant.

Key words orthogonal wavelets, wall turbulence, multi-scale energy transfer

Received 28 March 2006, revised 7 June 2006.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10472053).

2) E-mail: xucx@tsinghua.edu.cn