

不确定非线性结构动力响应的区间分析方法¹⁾

邱志平²⁾ 马丽红 王晓军

(北京航空航天大学固体力学研究所, 北京 100083)

摘要 研究多自由度非线性不确定参数系统的动力响应问题. 以区间数学为基础, 将不确定性参数用区间进行定量化, 借助一阶 Taylor 级数, 给出了近似估计非线性振动系统动力响应范围的区间分析方法. 从数学证明和数值算例两方面, 将其与概率摄动有限元法进行了比较, 结果显示区间分析方法对不确定参数先验信息具有要求较少、精度较高的优点.

关键词 动力响应, 非线性振动系统, 区间分析方法, 概率摄动有限元法, 不确定参数

中图分类号: O327 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)05-0645-07

引 言

在大量的工程结构中, 由于材料的误差或结构在制造安装过程中的误差, 使结构的物理和几何参数带有一定程度的不确定性, 从而使结构的刚度、质量和阻尼成为上述不确定参数的函数. 正确估计这些不确定参数对结构的振动特性和响应特性的影响, 对于工程设计实践具有十分重要的指导意义. 分析不确定参数结构响应问题的传统方法是随机有限元方法^[1~3], 它是将不确定参数处理成随机变量. 尽管在随机参数假设下的系统响应分析的理论和方法已经相当成熟, 但不确定参数的概率统计信息常常是缺乏的, 甚至在很简单的情况下其分布也是有争议的. 不确定参数的界限通常比其统计约束更容易获得, 且在某些情况更加合理. 基于这种不确定但有界 (UBB) 参数假设出现了另一类处理不确定性的方法——区间分析方法^[4,5], 它只需要知道不确定参数的界限, 得到的是与不确定参数界相容的响应集合.

近年来, 具有不确定参数的线性系统的动力响应分析已经取得很多成果^[2,4,5], 发展得较为成熟. 然而, 在实际中, 结构的动力响应的非线性特性更加普遍, 目前关于具有不确定参数非线性系统动力响应的文献还比较少. 张义民等^[6]提出了概率摄动有限元法, 将不确定结构参数处理成随机变量, 给出了结构动力响应的均值和方差. 本文将不确定参

数用区间来描述, 与一阶 Taylor 级数相结合, 提出了估计非线性振动系统动力响应范围的区间分析方法. 从数学证明和数值算例两方面与概率摄动有限元法进行了比较.

1 问题的描述

考虑 n 自由度非线性结构系统的动力微分方程

$$M\ddot{x}(t) + f(x(t), \dot{x}(t)) = F(t) \quad (1)$$

式中 M , $f(x(t), \dot{x}(t))$, $x(t)$ 和 $F(t)$ 分别为广义质量矩阵, 非线性函数向量, 位移向量和外载荷向量. 上标 “.” 和 “..” 分别代表位移对时间的一阶和二阶导数. 当结构系统的参数为不确定参数时, 结构系统的非线性运动方程可以表示为

$$M(B)\ddot{x}(B, t) + f(B, x(B, t), \dot{x}(B, t)) = F(B, t) \quad (2)$$

式中 $B = (b_{ij})_{r \times s}$ 为描述不确定性参数的 $r \times s$ 阶矩阵, 可以包含不确定载荷参数和不确定结构参数.

如果已知不确定参数的概率统计特性或信息, 可以通过文献 [6] 的方法确定出非线性结构系统响应的概率统计信息. 例如, 如果已知不确定参数矩阵 B 的均值和标准差, 即

$$\mu_B = (\mu_{b_{ij}})_{r \times s}, \quad \sigma_B = (\sigma_{b_{ij}})_{r \times s} \quad (3)$$

2005-07-21 收到第 1 稿, 2006-04-10 收到修改稿.

1) 国家杰出青年科学基金 (10425208), 国家自然科学基金委与中国工程物理研究院联合基金 (10376002) 资助项目.

2) E-mail: zpqi@buaa.edu.cn

就可以确定出非线性结构系统响应的均值和标准差, 即

$$\mu_x = (\mu_{x_j})_n, \quad \sigma_x = (\sigma_{x_j})_n \quad (4)$$

然而, 在有些情况下, 不确定参数的概率统计特性是不知道的, 知道的只是不确定参数所在的区间或范围, 即

$$\underline{B} \leq B \leq \bar{B} \quad (5a)$$

或元素形式

$$b_{ij} \leq b_{ij} \leq \bar{b}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (5b)$$

其中 $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{r \times s}$ 和 $\underline{B} = (b_{ij})_{r \times s}$ 分别为具有不确定性的参数矩阵 $B = (b_{ij})_{r \times s}$ 的上界矩阵和下界矩阵. 这样, 具有不确定参数的非线性结构响应问题 (2) 成为: 在约束条件 (5) 下, 确定非线性结构响应问题 (2).

根据区间矩阵的表示方法和含义 [7,8], 式 (5) 可以写成

$$B \in B^I = [\underline{B}, \bar{B}] \quad (6a)$$

或元素形式

$$b_{ij} \in b_{ij}^I = [b_{ij}, \bar{b}_{ij}], \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \quad (6b)$$

式中 $B^I = [\underline{B}, \bar{B}] = (b_{ij}^I)_{r \times s}$ 为区间矩阵.

利用式 (6), 由区间数学的含义, 式 (2) 和 (5) 可形式地写成

$$M(B^I)\ddot{x}(B^I, t) + f(B^I, x(B^I, t), \dot{x}(B^I, t)) = F(B^I, t) \quad (7)$$

在区间数学上, 式 (7) 表示具有区间参数非线性结构系统响应问题.

具有区间参数非线性结构系统响应问题可理解为: 求满足区间矩阵 $B^I = [\underline{B}, \bar{B}]$ 的所有可能参数 $B \in B^I$ 所确定的非线性结构响应问题, 所求得响应所在的范围或区间

$$x(t) \in x^I(t) = [\underline{x}(t), \bar{x}(t)] = (x_i^I(t)) \quad (8a)$$

或分量形式

$$x_i(t) \in x_i^I(t) = [\underline{x}_i(t), \bar{x}_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8b)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \max_{B \in B^I} \{x(t) : M(B)\ddot{x}(B, t) + \\ & f(B, x(B, t), \dot{x}(B, t)) = \\ & F(B, t), B \in B^I\} \end{aligned} \quad (9)$$

和

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \min_{B \in B^I} \{x(t) : M(B)\ddot{x}(B, t) + \\ & f(B, x(B, t), \dot{x}(B, t)) = \\ & F(B, t), B \in B^I\} \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 式 (9) 和 (10) 所表示的优化问题是全局优化问题.

2 区间分析方法

借助式 (5), 有不确定参数区间矩阵的中心矩阵为

$$\begin{aligned} B^c &= (b_{ij}^c) = m(B^I) = (\bar{B} + \underline{B})/2 \\ b_{ij}^c &= m(b_{ij}^I) = (\bar{b}_{ij} + b_{ij})/2 \\ & i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (11)$$

及不确定参数区间矩阵的半径矩阵为

$$\begin{aligned} \Delta B &= (\Delta b_{ij}) = (\bar{B} - \underline{B})/2 \\ \Delta b_{ij} &= (\bar{b}_{ij} - b_{ij})/2 \\ & i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (12)$$

从而, 利用区间矩阵的中心区间表示法有

$$\begin{aligned} B^I &= [\underline{B}, \bar{B}] = [B^c - \Delta B, B^c + \Delta B] = \\ & [B^c, B^c] + [-\Delta B, \Delta B] = B^c + \Delta B^I \end{aligned} \quad (13)$$

将不确定参数矩阵 $B = (b_{ij})$ 写成确定性部分和不确定性部分和的形式

$$B = B^c + \delta B, \quad |\delta B| \leq \Delta B \quad (14a)$$

或分量形式

$$\begin{aligned} b_{ij} &= b_{ij}^I + \delta b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \\ |\delta b_{ij}| &\leq \Delta b_{ij}, \end{aligned} \quad (14b)$$

将位移响应 $x_k(B, t), k = 1, 2, \dots, n$ 在 B^c 处展开为一阶 Taylor 级数

$$\begin{aligned} x_k(B, t) &= x_k(B^c + \delta B, t) = \\ & x_k(B^c, t) + \frac{\partial x_k(B^c, t)}{\partial (csB)^T} \delta(csB) = \\ & x_k(B^c, t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k(B^c, t)}{\partial b_{ij}} \delta b_{ij} \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $cs(\cdot)$ 为矩阵拉直操作, 且

$$\left. \begin{aligned} \delta b_{ij} \in \Delta b_{ij}^I &= [-\Delta b_{ij}, \Delta b_{ij}] \\ i &= 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

通过区间数学中的自然区间扩张^[7,8], 从式 (15) 可以得到非线性结构系统动力响应区间为

$$\begin{aligned} x_k^I(\mathbf{B}, t) &= x_k^I(\mathbf{B}^c + \delta \mathbf{B}, t) = \\ &= x_k(\mathbf{B}^c, t) + \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} \Delta (cs \mathbf{B})^I = \\ &= x_k(\mathbf{B}^c, t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^c, t)}{\partial b_{ij}} \Delta b_{ij}^I \end{aligned} \quad (17)$$

经过区间运算, 便可得位移响应区间的上界和下界分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k(\mathbf{B}, t) &= x_k(\mathbf{B}^c, t) + \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} \right| \Delta (cs \mathbf{B}) = \\ &= x_k(\mathbf{B}^c, t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^c, t)}{\partial b_{ij}} \right| \Delta b_{ij} \\ & \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_k(\mathbf{B}, t) &= x_k(\mathbf{B}^c, t) - \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} \right| \Delta (cs \mathbf{B}) = \\ &= x_k(\mathbf{B}^c, t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^c, t)}{\partial b_{ij}} \right| \Delta b_{ij} \\ & \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

3 非线性动力方程的摄动有限元法

在这一节, 推导非线性结构动力学的一般摄动有限元法的方程, 来进行结构的动力响应灵敏度分析.

将式 (2) 两边在 \mathbf{B} 的标称值 \mathbf{B}^c 附近展开成一阶 Taylor 表达式, 有

$$\begin{aligned} M \ddot{\mathbf{x}} &= M(\mathbf{B}^c) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t) + \left[\frac{\partial M(\mathbf{B}^c)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} (\mathbf{I}_{st} \otimes \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t)) + \right. \\ & \quad \left. M(\mathbf{B}^c) \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} \right] d(cs \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}(\mathbf{B}^c, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{B}^c, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})}{\partial (cs \mathbf{B})^T} + \mathbf{C}(\mathbf{B}^c) \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} + \right. \\ & \quad \left. \mathbf{K}(\mathbf{B}^c) \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} \right] d(cs \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{B}^c, t) + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} d(cs \mathbf{B}) \quad (21)$$

其中, 符号 \otimes 代表 Kronecker 积, $d\mathbf{B} = \varepsilon \delta \mathbf{B} = \varepsilon(\mathbf{B} - \mathbf{B}^c)$ (ε 为小参数), \mathbf{C} 和 \mathbf{K} 分别为阻尼和刚度矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\mathbf{x}}^T}, \quad \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} \quad (22)$$

将式 (19)~(21) 代入式 (2), 比较方程两边 ε 的同阶项, 可得到与式 (2) 相一致的零阶方程和一阶方程分别为

$$\mathbf{M}(\mathbf{B}^c) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t) + \mathbf{f}(\mathbf{B}^c, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{F}(\mathbf{B}^c, t) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{B}^c) \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} + \mathbf{C}(\mathbf{B}^c) \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} + \\ \mathbf{K}(\mathbf{B}^c) \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{B}^c, t)}{\partial (cs \mathbf{B})^T} = \mathbf{F}_1 \end{aligned} \quad (24)$$

式中

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial (cs \mathbf{B})^T} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial (cs \mathbf{B})^T} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial (cs \mathbf{B})^T} (\mathbf{I}_{st} \otimes \ddot{\mathbf{x}})$$

采用 Newmark- β 方法, 通过求解式 (23) 和 (24) 便可获得位移响应的中心值 $\mathbf{x}(\mathbf{B}^c, t)$ 及一阶导数值 $\partial \mathbf{x}(\mathbf{B}^c, t) / \partial (cs \mathbf{B})^T$.

4 概率摄动有限元方法

考虑结构不确定参数矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 为随机变量矩阵, 其均值可以表示为

$$E(\mathbf{B}) = (E(b_{ij})) = \mathbf{B}^E = ((b^E)_{ij}) \quad (25)$$

那么, 结构响应 $\mathbf{x}(\mathbf{B}, t)$ 也是随机的. 式 (15) 可理解为 $\mathbf{x}(\mathbf{B}^E + \delta \mathbf{B}, t)$ 关于参数矩阵 $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 在均值 \mathbf{B}^E 处的一阶 Taylor 展开式.

对式 (15) 两边取均值, 可以得到随机参数结构动力位移响应均值为

$$\begin{aligned} E(x_k(\mathbf{B}, t)) &= \\ &= E(x_k(\mathbf{B}^E, t)) + E \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \delta b_{ij} \right) = \\ &= x_k(\mathbf{B}^E, t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} E(b_{ij} - b_{ij}^E) \\ & \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (26)$$

由于 $E(\delta b_{ij}) = E(b_{ij} - b_{ij}^E) = 0$, 上式可化简为

$$E(x_k(\mathbf{B}, t)) = x_k(\mathbf{B}^E, t) \quad (27)$$

对式 (15) 两边取方差, 可以得到随机参数结构动力位移响应方差为

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_k(\mathbf{B}, t)) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \right)^2 \text{Var}(b_{ij}) + \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{p=1}^r \sum_{q=1}^s \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{pq}} \cdot \\ & \text{Cov}(b_{ij}, b_{pq}) \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\text{Cov}(b_{ij}, b_{pq})$ 是随机结构参数的协方差.

当随机结构参数之间相互独立时, 位移响应的方差可以化简为

$$\begin{aligned} \text{Var}(x_k(\mathbf{B}, t)) = & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \right)^2 \text{Var}(b_{ij}) = \\ & \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \sigma_{ij} \right)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

其中 $\sigma_{ij} = \sqrt{\text{Var}(b_{ij})}$.

显然, 位移响应 $x_k(\mathbf{B}, t)$ 的标准差为

$$\begin{aligned} \sigma(x_k(\mathbf{B}, t)) = & \sqrt{\text{Var}(x_k(\mathbf{B}, t))} = \\ & \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \sigma_{ij} \right)^2} \end{aligned} \quad (30)$$

设 l 为一正整数, 则偏离 l 倍标准方差的位移响应区间为

$$\begin{aligned} y_k^l = & [y_k(\mathbf{B}, t), \bar{y}_k(\mathbf{B}, t)] = \\ & [x_k(\mathbf{B}^E, t) - l\sigma(x_k(\mathbf{B}, t)), x_k(\mathbf{B}^E, t) + \\ & l\sigma(x_k(\mathbf{B}, t))], \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{y}_k(\mathbf{B}, t) = & x_k(\mathbf{B}^E, t) + l\sigma(x_k(\mathbf{B}, t)) = \\ & x_k(\mathbf{B}^E, t) + l \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \sigma_{ij} \right)^2} \end{aligned} \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} y_k(\mathbf{B}, t) = & x_k(\mathbf{B}^E, t) - l\sigma(x_k(\mathbf{B}, t)) = \\ & x_k(\mathbf{B}^E, t) - l \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \sigma_{ij} \right)^2} \end{aligned} \quad (32b)$$

5 区间分析方法与概率摄动有限元法的比较

假设不确定参数 \mathbf{B} 的区间范围是基于其概率统计信息得到的, 则区间参数矩阵 \mathbf{B} 可以表示为

$$\mathbf{B}^I = [\underline{\mathbf{B}}, \overline{\mathbf{B}}] = (b_{ij}^I) = [\mathbf{B}^E - l\sigma, \mathbf{B}^E + l\sigma] \quad (33a)$$

或分量形式

$$\left. \begin{aligned} b_{ij}^I = & [b_{ij}, \bar{b}_{ij}] = (b_{ij}^I) = \\ & [b_{ij}^E - l\sigma_{ij}, b_{ij}^E + l\sigma_{ij}] \\ & i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (33b)$$

其中 l 为一正整数.

则由式 (33) 可以得到不确定参数矩阵 \mathbf{B} 的中心矩阵和半径矩阵分别为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}^c = & (b_{ij}^c) = m(\mathbf{B}^I) = \mathbf{B}^E \\ b_{ij}^c = & m(b_{ij}^I) = b_{ij}^E \\ & i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{B} = & (\Delta b_{ij}) = \text{rad}(\mathbf{B}^I) = l\sigma \\ \Delta b_{ij} = & \text{rad}(b_{ij}^I) = l\sigma_{ij} \\ & i = 1, 2, \dots, r; \quad j = 1, 2, \dots, s \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

从而, 由区间分析方法得到的非线性振动系统的位移响应区间式 (18) 可改写为

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_k(\mathbf{B}, t) = & x_k(\mathbf{B}^E, t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \right| l\sigma_{ij} \\ & k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (36a)$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{x}_k(\mathbf{B}, t) = & x_k(\mathbf{B}^E, t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \right| l\sigma_{ij} \\ & k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (36b)$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 有下式成立

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left| \frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \right| l\sigma_{ij} \geq & \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} l\sigma_{ij} \right)^2} = \\ & l \sqrt{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \left(\frac{\partial x_k(\mathbf{B}^E, t)}{\partial b_{ij}} \sigma_{ij} \right)^2} \end{aligned} \quad (37)$$

根据不等式 (37), 从式 (32) 和 (36) 可以得到

$$x_i(\mathbf{B}, t) \leq y_i(\mathbf{B}, t) \leq \bar{y}_i(\mathbf{B}, t) \leq \bar{x}_i(\mathbf{B}, t) \quad (38)$$

从式 (38) 可以看出, 由区间分析方法所得到的结构位移响应集合包含概率摄动有限元法的解集合, 即区间分析方法解下界不大于概率方法解下界, 区间分析方法解上界不小于概率方法解上界.

6 数值算例

为说明本文所提方法的有效性, 以文献 [6] 中的如图 1 所示的二层刚架为基础, 将区间分析方法与文献 [6] 中的概率摄动有限元法进行比较. 假设各层的支柱只提供弯曲刚度, 不计质量; 而水平杆认为是有质量的刚体, 只发生水平位移. 系统运动微分方程为

$$M\ddot{x} + Kx + K_\varepsilon(x \otimes x \otimes x) = F(t) \quad (39)$$

式中

$$f(\mathbf{B}, x, \dot{x}) = Kx + K_\varepsilon(x \otimes x \otimes x) \quad (40)$$

$K_\varepsilon =$

$$\varepsilon \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & -k_2 & k_2 & -k_2 & k_2 & k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 & k_2 & -k_2 & k_2 & -k_2 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 25.0 \times 10^6 \sin 2000t \end{bmatrix} \quad (42)$$

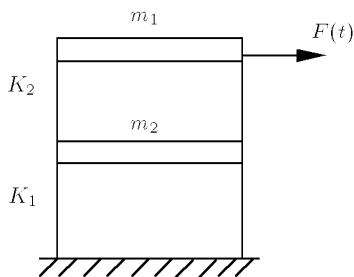


图 1 两层刚架
Fig.1 Two-story frame

式 (40) 为系统非线性项, 不确定参数矩阵取为 $\mathbf{B} = [k_1, k_2]^T$, 不确定弹性刚度 k_1 和 k_2 的均值分别为 $k_1^E = 45 \times 10^8 (\text{N/m})$ 和 $k_2^E = 45 \times 10^8 (\text{N/m})$, 方差系数均取为 $\xi = 0.05$; 同时假定不确定弹性刚度 k_1 和 k_2 所在区间为 $k_1^I = [k_1^E - l\xi k_1^E, k_1^E + l\xi k_1^E]$ 和

$k_2^I = [k_2^E - l\xi k_2^E, k_2^E + l\xi k_2^E]$, 其中正整数 l 取 3. 确定性质量 m_1 和 m_2 分别为 3.7kg 和 1.5kg, 系统初始条件为 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. 对非线性系统, 取 $\varepsilon = 0.3$, 用区间分析方法和概率摄动有限元法分别计算动态位移响应 x 界限随时间的变化历程, 分别如图 2~图 4(位移 x_1) 和图 5~图 7(位移 x_2) 所示. 图中 MV 表示位移中心值 (或均值), IU 表示区间分析方法的位移上界, IL 表示区间分析方法的位移下界, PU 表示概率统计算法的位移上界, PL 表示概率统计方法的位移下界.

从上面结果可以发现: 对于第 1 个自由度位移响应 x_1 (图 2~图 4), 区间分析方法所得上下界与概率摄动有限元法所得上下界在前几个有效数字内完全一样, 图形上基本重合; 对于第 2 个自由度 x_2

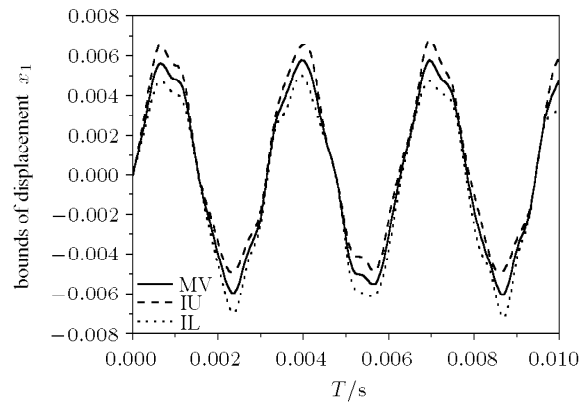


图 2 区间分析方法的位移响应 x_1 界限的时间历程
Fig.2 Time history for the bounds of response x_1 by the interval analysis method

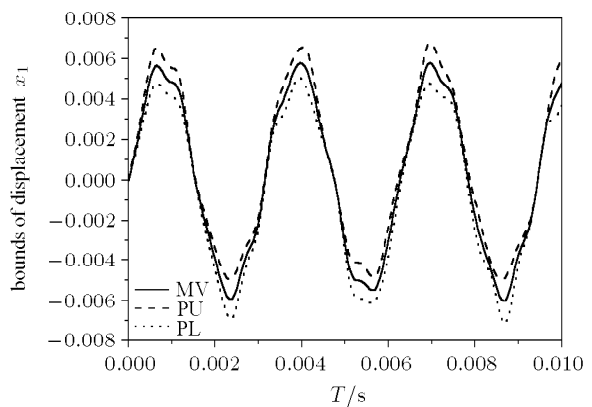


图 3 概率摄动有限元法的位移响应 x_1 界限的时间历程
Fig.3 Time history for the bounds of response x_1 by the probabilistic perturbation FEM

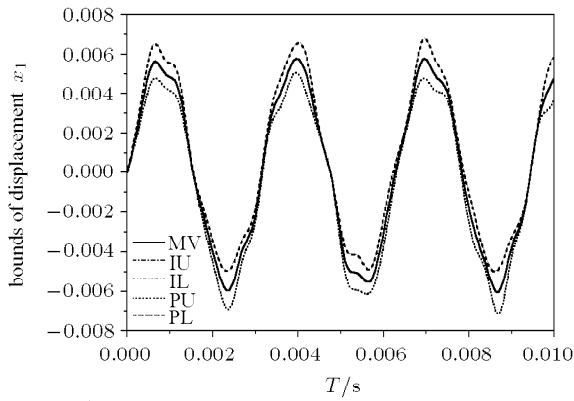


图 4 区间分析方法与概率扰动有限元法的位移响应 x_1 界限时间历程比较

Fig.4 Comparison of time history for the bounds of response x_1 by the interval analysis method and the probabilistic perturbation FEM

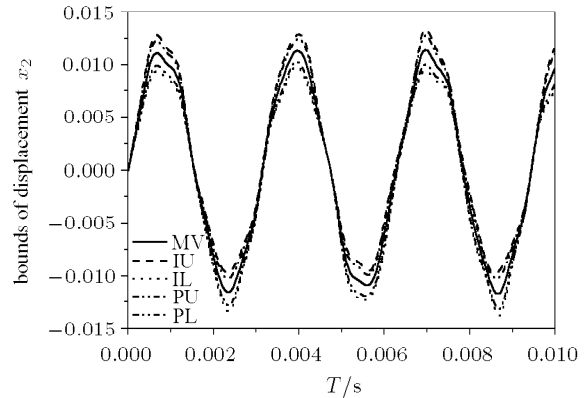


图 7 区间分析方法与概率扰动有限元法的位移响应 x_2 界限时间历程比较

Fig.7 Comparison of time history for the bounds of response x_2 by the interval analysis method and the probabilistic perturbation FEM

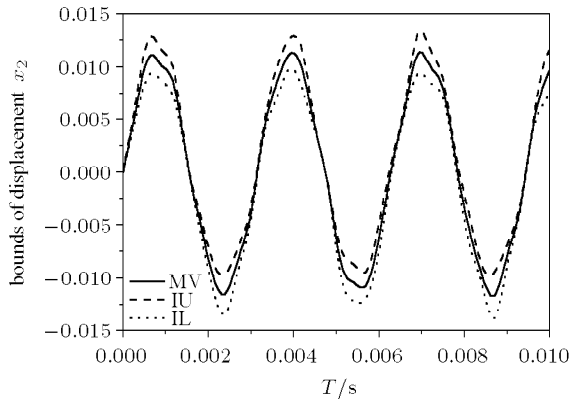


图 5 区间分析方法的位移响应 x_2 界限的时间历程

Fig.5 Time history for the bounds of response x_2 by the interval analysis method

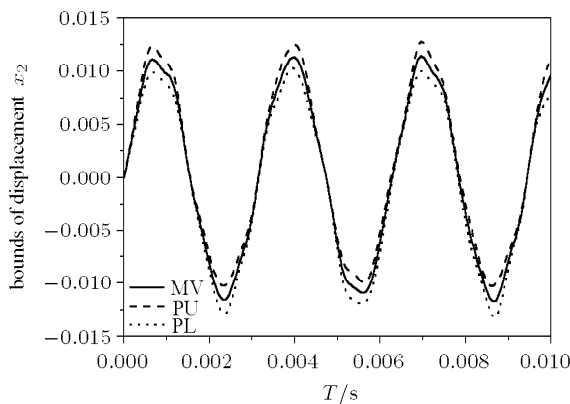


图 6 概率扰动有限元法的位移响应 x_2 界限的时间历程

Fig.6 Time history for the bounds of response x_2 by the probabilistic perturbation FEM

(图 5~ 图 7), 区间分析方法所得响应界限包含概率扰动有限元法所得响应界限, 给出了略为保守解, 区间分析方法上界略大于概率方法上界, 区间分析方法下界略小于概率方法下界, 这与第 5 节数学证明结果是相一致的。

7 结 论

以区间数学理论为基础, 将不确定参数用区间量化, 与一阶 Taylor 级数展开结合, 提出了近似估计多自由度具有不确定参数非线性结构系统动力响应的区间分析方法. 从数学证明和数值算例两方面与概率扰动有限元方法进行了比较, 得到了一致的结果, 即区间分析方法得到的位移响应区间包含概率扰动有限元方法求得的位移响应区间, 并且从图中可以发现, 区间分析方法结果略为保守一些. 区间分析方法克服了概率扰动有限元法对先验信息要求较高的局限性, 只需知道不确定参数所在的范围界限。

参 考 文 献

- 1 Shinozuka M. Maximum structural response to seismic excitations. *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 1970, 96(5): 729~738
- 2 Chen SH, Liu ZS, Zhang ZF. Random vibration analysis for large-scale structures with random parameters. *Computers & Structures*, 1992, 43(4): 681~685
- 3 Li J, Liao ST. Response analysis of stochastic parameter structures under non-stationary random excitation. *Computational Mechanics*, 2001, 27: 61~68
- 4 Qiu ZP, Wang XJ. Comparison of dynamic response of structures with uncertain-but-bounded parameters using

- non-probabilistic approach. *Solids and Structures*, 2003, 40: 5423~5439
- 5 Qiu ZP, Wang XJ. Parameter perturbation method for dynamic responses of structures with uncertain-but-bounded parameters based on interval analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(18-19): 4985~4970
- 6 张义民, 刘巧玲, 闻邦椿. 多自由度非线性随机参数振动系统响应分析的概率摄动有限元法. 计算力学学报, 2003, 20(1): 8~11 (Zhang Yimin, Liu Qiaoling, Wen Bangchun. Probability perturbation finite element method for response analysis of multi-degree-of-freedom nonlinear vibration systems with random parameters. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(1): 8~11(in Chinese))
- 7 Moore RE. *Methods and Applications of Interval Analysis*. London: Prentice-Hall, Inc, 1979
- 8 Alefeld G, Herzberger J. *Introductions to Interval Computations*. New York: Academic Press, 1983

INTERVAL ANALYSIS FOR DYNAMIC RESPONSE OF NONLINEAR STRUCTURES WITH UNCERTAINTIES¹⁾

Qiu Zhiping²⁾ Ma Lihong Wang Xiaojun

(*Institute of Solid Mechanics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China*)

Abstract Dynamic response of the MDOF nonlinear vibration system with parameters of uncertainty is studied. Based on interval mathematics, with the parameters of uncertainty being modelled as interval numbers, a new method is proposed to approximately estimate the nonlinear dynamic response range with the help of first-order Taylor series. Comparisons between the interval analysis and the probability perturbation finite element method are made with respect to the mathematical proof and numerical examples, and the advantages of the presented method are shown, including less prior information being required for parameters of uncertainty and higher accuracy.

Key words dynamic response, nonlinear vibration system, interval analysis method, probability perturbation finite element method, parameters of uncertainty

Received 21 July 2005, revised 10 April 2006.

1) The project supported by the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (10425208), National Natural Science Foundation of China and Institute of Engineering Physics of China (10376002).

2) E-mail: zpqiub@buaa.edu.cn