第 38 卷 第 2 期 力 学 学 报 Vol. 38, No. 2
2006 年 3 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Mar., 2006

Ⅲ型界面裂纹面受变载荷 $Px^m t^n$ 作用下的自相似解

吕念春 *,**,1) 程云虹 † 李新刚 ** 程 靳 **

*(沈阳理工大学材料科学与工程学院，沈阳 110168)

**(哈尔滨工业大学航天工程与力学系，哈尔滨 150001)

†(东北大学土木工程系，沈阳 110006)

摘要 通过复变函数论的方法，对Ⅲ型界面裂纹表面受变载荷 $Px^m t^n$ 作用下的动态扩展问题进行了研究. 采用自相似函数的方法可以获得解析解的一般表达式. 应用该法可以很容易地将所讨论的问题转化为 Riemann-Hilbert 问题，然后应用 Muskhelishvili 方法就可以较简单地得到问题的闭合解. 利用这些解并采用叠加原理，就可以求得任意复杂问题的解.

关键词 复变函数论，Ⅲ型界面裂纹，变载荷 $Px^m t^n$，自相似函数，解析解

中图分类号： O346.1 **文献标识码：** A **文章编号：** 0459-1879(2006)02-0192-07

引 言

近几十年来，对Ⅲ型界面裂纹的静力学问题已有许多人进行了研究 [1~5]. 由于数学上的困难，人们对动力学问题的研究还远远不够深入. 文献 [6~9] 虽对反平面界面扩展裂纹问题进行了研究，但对较复杂的边界条件问题则不能进行求解. 本文对Ⅲ型界面裂纹表面受变载荷 $Px^m t^n$ 作用下的动力学问题进行求解，利用复变函数论的方法给出解的一般表示. 应用该法可以很容易地将所论问题转化为 Riemann—Hilbert 问题，而后一问题容易用通常的 Muskhelishvili[10,11] 方法进行求解.

1 正交异性体弹性动力学反平面问题

对于正交异性体，我们选择 Cartesian 坐标轴和物体的弹性对称轴相一致，所考虑的问题被限制在反平面上，则正交异性体的反平面问题的运动方程为

$$C_{55}\partial^2 w/\partial x^2 + C_{44}\partial^2 w/\partial y^2 = \rho\partial^2 w/\partial t^2 \tag{1}$$

式中 C_{44} 和 C_{55} 为弹性常数，ρ 为材料密度，w 为沿 z 方向的位移，根据文献 [12,13] 的方法和采用下面变换 [14]

$$\xi = t - \eta x + Ty \tag{2}$$

这里 η 为复变量，T 为 η 的函数. 现构造运动方程的解如下

$$w = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi)\mathrm{d}\eta \tag{3}$$

式中的积分是在 η 的实轴上进行的. 将式 (3) 代入式 (1) 后可知，只要满足关系式

$$C_{55}\eta^2 + C_{44}T^2 - \rho = 0 \tag{4}$$

则运动方程 (1) 将成为恒等式，因此 $\phi(\xi)$ 是由边界条件所确定的任意函数. 而式 (4) 有两个根，仅取虚部为正的根，可得

$$T(\eta) = \mathrm{i}\sqrt{(C_{55}\eta^2 - \rho)/C_{44}} \tag{5}$$

然后，将式 (3) 代入式 (1) 的正交异性体物理方程可得

$$\left.\begin{aligned} \tau_{yz} &= \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} C_{44}T\partial\phi(\xi)/\partial\xi\mathrm{d}\eta \\ \tau_{xz} &= \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} C_{55}(\eta)\partial\phi(\xi)/\partial\xi\mathrm{d}\eta \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

在 $y=0$ 上，式 (2) 转化为

$$\xi = t - \eta x \tag{7}$$

1.1 位移是齐次

当位移是齐次 (将零次齐次函数简称齐次，下同) 时，取

$$\phi'(\xi) = f(\eta)/\xi \tag{8}$$

2004–09–24 收到第 1 稿， 2005–10–26 收到修改稿.

1) E-mail: lnc_65@163.com

将其代入式 (3), 式 (6)，利用 Cauchy 公式，在 $y=0$ 上得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t}=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\eta)}{t-\eta x}\mathrm{d}\eta=\frac{-2\pi\mathrm{i}}{x}\cdot f\left(\frac{t}{x}\right)\\
&\tau_{yz}=\frac{-2C_{44}\pi\mathrm{i}}{x}T\left(\frac{t}{x}\right)f\left(\frac{t}{x}\right)\\
&\tau_{xz}=-\int_{-\infty}^{+\infty}C_{55}\frac{\eta f(\eta)}{t-\eta x}\mathrm{d}\eta=\frac{2C_{55}\pi\mathrm{i}\cdot t}{x^2}f\left(\frac{t}{x}\right)\\
&\partial w/\partial z=-2\pi\mathrm{i}f\left(\frac{t}{x}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

根据自相似方法 [2,14], 令：$z=t/x$, 取 $F(z)=-2\pi\mathrm{i}C_{44}zT(z)f(z)$. 则式 (9) 将变为

$$\left.\begin{aligned}
&\partial w/\partial z=\mathrm{Re}\{F(z)/[zT(z)]\}/C_{44}\\
&\tau_{yz}=(1/t)\mathrm{Re}F(z)\\
&\tau_{xz}=-[C_{55}/(C_{44}t)]\mathrm{Re}[z\cdot F(z)/T(z)]
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

1.2 应力是齐次

当应力是齐次时，取

$$\phi''(\xi)=f(\eta)/\xi\tag{11}$$

将式 (11) 代入式 (3), 式 (6)，利用 Cauchy 公式，在 $y=0$ 上得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\eta)}{t-\eta x}\mathrm{d}\eta=\frac{-2\pi\mathrm{i}}{x}f\left(\frac{t}{x}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial t}=\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{T(\eta)f(\eta)}{t-\eta x}\mathrm{d}\eta=\\
&\qquad\frac{-2C_{44}\pi\mathrm{i}}{x}T\left(\frac{t}{x}\right)f\left(\frac{t}{x}\right)\\
&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t}=\int_{-\infty}^{+\infty}C_{55}\frac{-\eta\cdot f(\eta)}{t-\eta x}\mathrm{d}\eta=\\
&\qquad\frac{2C_{55}\pi\mathrm{i}}{x}f\left(\frac{t}{x}\right)\cdot\frac{t}{x}\\
&\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial z}=-2\pi\mathrm{i}f\left(\frac{t}{x}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

令 $F(z)=-2\pi\mathrm{i}C_{44}zT(z)f(z)$. 则式 (12) 将变为

$$\left.\begin{aligned}
&\partial^2 w/(\partial t\partial z)=\mathrm{Re}\{F(z)/[zT(z)]\}/C_{44}\\
&\partial\tau_{yz}/\partial t=(1/t)\mathrm{Re}F(z)\\
&\partial\tau_{xz}/\partial t=-[C_{55}/(C_{44}t)]\mathrm{Re}[z\cdot F(z)/T(z)]
\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

1.3 具有任意自相似指数的问题

设在 $y=0$ 上有任意个载荷区域及位移区域，这些区域的端点各以不同的常速移动，初始静止，这些区域上的载荷及位移是如下函数的组合 [7,14]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^k f_s(x)}{\mathrm{d}x^k}\cdot\frac{\mathrm{d}^m f_n(t)}{\mathrm{d}t^m}\\
&f_i(\xi)=\begin{cases}0, & \xi<0\\ \xi^i, & \xi>0\end{cases}
\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

式中 k,s,m,n 为任意正整数，x,t 的复杂函数一般可表示为式 (14) 的线性组合，因而若能求得具有式 (14) 形式的载荷或位移问题的解，则可通过叠加得到复杂问题的解. 现引入线性微分算子及反演

$$L=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial t^n}\quad 反演为\quad L^-=\frac{\partial^{-m-n}}{\partial x^{-m}\partial t^{-n}}\tag{15}$$

式中负导数表示积分，其绝对值表示积分的重数，零导数表示函数本身. 容易证明，必存在 m,n，使 L 作用于式 (14) 后，得到的函数是 x,t 的零次齐次函数，称此 m,n 为自相似指数. 利用前面的方法，可以得出：

当 Lw 是齐次函数时，只需将 w,τ_{xz},τ_{yz} 换成 $Lw,L\tau_{xz},L\tau_{yz}$, 则式 (8), 式 (10) 仍然成立.

当 $L\tau_{xz},L\tau_{yz}$ 是齐次函数时，只需将 w,τ_{xz},τ_{yz} 换成 $Lw,L\tau_{xz},L\tau_{yz}$, 则式 (11),(13) 仍然成立.

因此，在 $y=0$ 上可得到如下一般性结论 [14]：

当 Lw 是齐次函数时，令

$$w^0=Lw,\quad \tau_{xz}^0=L\tau_{xz},\quad \tau_{yz}^0=L\tau_{yz}\tag{16}$$

当 $L\tau_{xz},L\tau_{yz}$ 是齐次函数时，令

$$w^0=\frac{\partial}{\partial t}Lw,\quad \tau_{xz}^0=\frac{\partial}{\partial t}L\tau_{xz},\quad \tau_{yz}^0=\frac{\partial}{\partial t}L\tau_{yz}\tag{17}$$

则总有 [15]

$$\left.\begin{aligned}
&\partial w^0/\partial z=\mathrm{Re}\{F(z)/[zT(z)]\}/C_{44}\\
&\tau_{yz}^0=(1/t)\mathrm{Re}F(z)\\
&\tau_{xz}^0=-[C_{55}/(C_{44}t)]\mathrm{Re}[z\cdot F(z)/T(z)]
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

若令 $m(z)=F(z)/[zT(z)]$. 则式 (18) 变为

$$\left.\begin{aligned}
&\partial w^0/\partial z=\mathrm{Re}[m(z)/C_{44}]\\
&\tau_{yz}^0=(1/t)\mathrm{Re}[z\cdot m(z)\cdot T(z)]\\
&\tau_{xz}^0=-[C_{55}/(C_{44}t)]\mathrm{Re}[m(z)\cdot z^2]
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

2 不同复合材料界面裂纹问题

设两种不同材料界面处于 $y=0$ 的平面上，裂

纹在界面上扩展．由于在两种不同材料界面上作用力与反作用力相等 [7,8]，因此对于反平面问题，有

$$\tau_{yz}^{0(1)}(x,0,t)=\tau_{yz}^{0(2)}(x,0,t) \tag{20}$$

式中右上角括号内的数字表示 1, 2 两种材料中相应的量．

也就是说，在 $y=0,\ -\infty<x<\infty$ 的平面上，界面上的剪应力相等．将式 (18)，式 (5) 代入式 (19)，可得

$$\mathrm{Im}\sqrt{(C_{55}^{(1)}z^2-\rho^{(1)})/C_{44}^{(1)}}\,m^{(1)}(z)=\mathrm{Im}\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\,m^{(2)}(z) \tag{21}$$

为了表示一般性，假定 $C_{55}^{(1)}/\rho^{(1)}<C_{55}^{(2)}/\rho^{(2)}$，对于不同的 z 值，根据式 (21) 可得

$$\left.\begin{aligned}
&\text{当 } z^{-2}<\frac{C_{55}^{(1)}}{\rho^{(1)}}<\frac{C_{55}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \text{ 时,}\\
&\quad \mathrm{Im}[m^{(1)}(z)]=\\
&\quad \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)}z^2-\rho^{(1)})/C_{44}^{(1)}}}\mathrm{Im}[m^{(2)}(z)]\\
&\text{当 } \frac{C_{55}^{(1)}}{\rho^{(1)}}<z^{-2}<\frac{C_{55}^{(2)}}{\rho^{(2)}} \text{ 时,}\\
&\quad \mathrm{Re}[m^{(1)}(z)]=\\
&\quad \frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)}z^2-\rho^{(1)})/C_{44}^{(1)}}}\mathrm{Im}[m^{(2)}(z)]\\
&\text{当 } \frac{C_{55}^{(1)}}{\rho^{(1)}}<\frac{C_{55}^{(2)}}{\rho^{(2)}}<z^{-2} \text{ 时,}\\
&\quad \mathrm{Re}[m^{(1)}(z)]=\\
&\quad \frac{\sqrt{(\rho^{(2)}-C_{55}^{(2)}z^2)/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(\rho^{(1)}-C_{55}^{(1)}z^2)/C_{44}^{(1)}}}\mathrm{Re}[m^{(2)}(z)]=0
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

上面的最后一式之所以为零，是因为弹性波的扰动绝对不会超过两种介质中最大声速传播范围．

设裂纹以恒定速度 V(小于声速) 沿 x 轴正、负方向对称扩展，在裂纹之外两种材料的界面处，位移应连续，故有

$$w^{0(1)}=w^{0(2)},\quad y=0,\quad |x|>Vt \tag{23}$$

由式 (19) 可知，此连接条件可改写为

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Re}[m^{(1)}(z)/C_{44}^{(1)}]=\mathrm{Re}[m^{(2)}(z)/C_{44}^{(2)}],\\
&|x|>Vt
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

联立式 (24),(22)，应当注意到当两种介质相同时，所得的解必须转化为单一介质中相应问题的解 [2,7]，利用与文献 [7,8] 相似的方法，可以得到

$$\left.\begin{aligned}
&m^{(1)}(z)=l(z)n^{(1)}(z)\\
&m^{(2)}(z)=l(z)n^{(2)}(z)\\
&n^{(1)}(z)=\frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)}z^2-\rho^{(1)})/C_{44}^{(1)}}}+\\
&\quad \frac{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}{(C_{55}^{(1)}z^2-\rho^{(1)})/C_{44}^{(1)}}\\
&n^{(2)}(z)=1+\frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{\sqrt{(C_{55}^{(1)}z^2-\rho^{(1)})/C_{44}^{(1)}}}
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

式中 $l(z)$ 必须满足下式

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Re}l(z)=0,\quad |z|<V^{-1}\\
&\mathrm{Im}l(z)=0,\quad |z|>V^{-1}
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

式 (19),(25) 和式 (26) 给出了在不同正交异性材料界面上扩展裂纹、具有任意自相似指数的断裂动力学问题的一般解．显然，此问题转化为寻找单一函数 $l(z)$ 的问题．在满足式 (25) 的条件下，$l(z)$ 只要满足具体问题的边界条件即可，不需再次考虑运动方程及界面的连接条件．

3 具体问题的解

假定 $t<0$ 时，一切静止；在 $t=0$ 时刻，在坐标原点开始出现一微裂纹，并以速度 V(小于声速) 沿 x 轴正、负方向对称扩展，且处于平面应变状态下，下面对不同边界条件的问题进行求解．

为了更好地解决Ⅲ型裂纹面受变载荷 Px^mt^n 作用下的动态扩展问题，必须先考虑裂纹面分别受到 Pt^n, Px^m 作用下的问题，然后，再通过叠加的方法就可以求得 Px^mt^n 作用下问题的解．下面以材料 2 为例说明动态变化的规律．

3.1 增加载荷 Pt^n 作用下的运动裂纹

假设在 $t=0$ 时刻坐标原点出现一裂纹，并以常速 V 沿 x 轴正、负方向对称扩展，且裂纹表面受

到切向增加载荷 Pt^n 作用．则问题的边界条件将为

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{yz}^{(1)}=\tau_{yz}^{(2)}=-Pt^n\,,\quad |x|<Vt\\ &w^{(1)}-w^{(2)}=0\,,\qquad |x|>Vt \end{aligned}\right\}\tag{27}$$

显然，本问题应力为齐次，这里的 $L=\partial/\partial t^n=L_t^n$，利用 $z=t/x$ 可得下述关系式为

$$\left.\begin{aligned} &L_t^n=\partial/\partial t^n=x^{-n}\partial^n/\partial z^n=x^{-n}L_z^n\\ &L_t^{-n}=\partial/\partial t^{-n}=x^n\partial^{-n}/\partial z^{-n}=x^nL_z^{-n} \end{aligned}\right\}\tag{28}$$

按照式 (17),(19),(25)，可将边界条件式 (27) 进一步写为

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}L_z^{-n-1}\Big[\frac{F^{(2)}(z)}{z}\Big]=\\ &\qquad\mathrm{Re}L_z^{-n-1}[l(z)\cdot n^{(2)}(z)\cdot T^{(2)}(z)]=-Pz^n\,,\\ &\qquad |z|>V^{-1}\\ &\frac{x^{n+1}}{C_{44}^{(2)}}\mathrm{Re}L_z^{-n-2}[l(z)\cdot n^{(2)}(z)]=0\,,\\ &\qquad |z|<V^{-1} \end{aligned}\right\}\tag{29}$$

由上面的关系可推出自相似函数 $l(z)$ 的解必为如下形式

$$l(z)=L_z^{n+2}[z^{n+1}\cdot\xi(z)]\tag{30}$$

式中 $\xi(z)$ 在区间 $|z|>V^{-1}$ 中无奇点，而 $T(z)$ 在亚音速范围内为纯虚量，因此 $\xi(z)$ 在区间 $|z|>V^{-1}$ 上必为纯实量．这样，问题 (29) 变为

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}\xi(z)=0\,,\qquad |z|>V^{-1}\\ &\mathrm{Im}\xi(z)=0\,,\qquad |z|<V^{-1} \end{aligned}\right\}\tag{31}$$

利用对称性、无穷远条件及裂纹尖端的奇异性 [14,16~18]，可得 Keldysh-Sedov 问题 (29) 的唯一解

$$\xi(z)=A(z^2-V^{-2})^{1/2}/z\tag{32}$$

这里 A 为待定实常数．

然后，将式 (30) 代入式 (29) 得

$$\mathrm{Re}L_z^{-n-1}\{L_z^{n+2}[z^{n+1}\cdot\xi(z)]\cdot n^{(2)}(z)\cdot T^{(2)}(z)\}=-Pz^n\tag{33}$$

将式 (32),(5) 代入式 (33)，可得出对于 z 的 n 阶导数为如下形式

$$\begin{aligned} &A\mathrm{Re}L_z^{-1}\{n^{(2)}(z)\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\cdot\\ &\qquad L_z^{n+2}[z^n(z^2-V^{-2})^{1/2}]\}=-P\cdot n! \end{aligned}\tag{34}$$

由上式即可确定实常数 A 为

$$\left.\begin{aligned} &A=-P\cdot n!/J\\ &J=\mathrm{Re}\int_0^M\Big\{n^{(2)}(z)\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\cdot\\ &\qquad L_z^{n+2}[z^n(z^2-V^{-2})^{1/2}]\Big\}\mathrm{d}z=\\ &\qquad \mathrm{Re}\int_0^M\Big\{n^{(2)}(z)\mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\cdot\\ &\qquad L_z^{n+2}[z^n(V^{-2}-z^2)^{1/2}]\Big\}\mathrm{d}z \end{aligned}\right\}\tag{35}$$

式中 $0<M^{-1}<V$，积分是在主值意义下进行的．

然后将式 (30),(5) 代入式 (17),(19),(25)，即可得 $y=0$ 上的应力、位移、应力强度因子，分别为

$$\begin{aligned} \tau_{yz}=&-Ax^nL_z^{-n-1}\Big\{n^{(2)}(z)\cdot\\ &\mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\cdot\\ &L_z^{n+2}[z^n(V^{-2}-z^2)^{1/2}]\Big\}\,,\quad |x|>Vt \end{aligned}\tag{36}$$

$$w=\frac{At^n}{VC_{44}^{(2)}}(V^2t^2-x^2)^{1/2}\cdot n^{(2)}\Big(\frac{t}{x}\Big)\,,\quad |x|<Vt\tag{37}$$

$$\begin{aligned} K_3(t)=&\lim_{x\to Vt}\sqrt{2\pi(x-Vt)}\cdot(-Ax^n)L_z^{-n-1}\cdot\\ &\Big\{n^{(2)}(z)\cdot\mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\cdot\\ &L_z^{n+2}[z^n(V^{-2}-z^2)^{1/2}]\Big\} \end{aligned}\tag{38}$$

3.2 增加载荷 Px^m 作用下的运动裂纹

假设所有的条件同上例问题相同，除了裂纹面受到的载荷 Px^m 以外．此时问题的边界条件将为

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{yz}^{(1)}=\tau_{yz}^{(2)}=-Px^m\,,\qquad |x|<Vt\\ &w^{(1)}-w^{(2)}=0\,,\qquad |x|<Vt \end{aligned}\right\}\tag{39}$$

本问题应力为齐次，这里的 $L=\partial/\partial x^m=L_x^m$，且 m 为正偶数或 0；按照式 (17),(19),(25)，可将边界条件式 (39) 进一步写为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}L\tau_{yz}=\frac{1}{t}\mathrm{Re}[z\cdot l(z)\cdot n^{(2)}(z)\cdot T^{(2)}(z)]\,,\\ &\qquad\qquad |z|>V^{-1}\\ &\frac{\partial}{\partial t}Lw=\mathrm{Re}[l(z)\cdot n^{(2)}(z)]\,,\qquad |z|<V^{-1} \end{aligned}\right\}\tag{40}$$

显然，当 $t\to\infty, V\to 0$ 时，在增加载荷 Px^m 的影响下，这种情形的解应当被转化为一裂纹长度为 $2a$ $(a=\lim Vt)$ 的静态问题的解．这个静态问题的

解,在任意的载荷被施加的普遍情况下见文献 [19]；而在幂函数载荷被施加的特殊情况下见文献 [20]. 对于Ⅲ型界面裂纹扩展情况下的解与其相类似，由此可推出自相似函数 $l(z)$ 的唯一解为

$$l(z) = A \cdot z^{m+1} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\frac{z^m}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big) \tag{41}$$

这里 A 为待定实常数.

然后将式 (41),(5) 代入式 (17),(19),(25)，即可得 $y=0$ 上的应力、位移及动应力强度因子分别为

$$\tau_{yz} = A \cdot L_x^{-m}\Big\{\int_0^{t/x} \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2 - \rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big] \cdot n^{(2)}(z) \cdot \Big[z^{m+1} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\frac{z^m}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big)\Big]\mathrm{d}z\Big\}, \quad |x| > Vt \tag{42}$$

$$w = \frac{A}{C_{44}^{(2)}} \cdot L_x^{-m}\Big[\mathrm{Re}\int_0^{t/x} x\mathrm{d}z \int_0^z z^{m+1} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\frac{z^m}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big) \cdot n^{(2)}(z)\mathrm{d}z\Big], \quad |x| < Vt \tag{43}$$

$$K_3(t) = A \cdot \lim_{x\to Vt}\sqrt{2\pi(x - Vt)}L_x^{-m} \cdot \Big\{\mathrm{Re}\int_0^{t/x} \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2 - \rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big] \cdot n^{(2)}(z) \cdot \Big[z^{m+1} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\frac{z^m}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big)\Big]\mathrm{d}z\Big\} \tag{44}$$

将式 (42) 代入式 (39)，对 x 求 m 阶导数

$$A \cdot L_x^m\Big\{L_x^{-m}\Big[\mathrm{Re}\int_0^{t/x} n^{(2)}(z) \cdot \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2 - \rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big] \cdot z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\frac{z^m}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big)\mathrm{d}z\Big]\Big\} = -P \cdot m! \tag{45}$$

从上式可确定常数 A

$$\left.\begin{aligned} &A = -P \cdot m!/J \\ &J = \mathrm{Re}\int_0^M \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2 - \rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big] \cdot n^{(2)}(z) \cdot z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big(\frac{z^m}{\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big)\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

式中 $0 < M^{-1} < V$，积分是在主值意义下进行的.

3.3 增加载荷 Px^mt^n 作用下的运动裂纹

假设所有的条件同前面所讨论的问题相同，且裂纹面受到的一增加载荷 Px^mt^n. 此时问题的边界条件转化为

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{yz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(2)} = -Px^mt^n, \quad |x| < Vt \\ &w^{(1)} - w^{(2)} = 0, \quad |x| < Vt \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

这里 $m \geq 0$, 且为正偶数； $n \geq 0$ 是正整数.

现在依靠叠加方法，必须寻找方程 (47) 情况问题的解. 显然此情况下应力为齐次，这里的 $L = \partial^{m+n}/\partial x^m \partial t^n$，按照式 (17), (19),(25)，可将边界条件 (47) 改写为

$$\left.\begin{aligned} &\tau_{yz}^0 = \frac{\partial^{m+n+1}\tau_{yz}}{\partial x^m \partial t^{n+1}} = \frac{1}{t}\mathrm{Re}[z \cdot l(z) \cdot n^{(2)}(z) \cdot T^{(2)}(z)], \quad |z| > V^{-1} \\ &w^0 = \frac{\partial^{m+n+1}w}{\partial x^m \partial t^{n+1}} = \frac{1}{C_{44}^{(2)}}\mathrm{Re}\int_0^z n^{(2)}(z) \cdot l(z) \cdot \mathrm{d}z, \quad |z| < V^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

式中 $l(z)$ 在区间 $|z| > V^{-1}$ 中无奇点，而 $T(z)$ 在亚音速范围内为纯虚量，因此 $l(z)$ 在区间 $|z| > V^{-1}$ 上必为纯实量. 这样，问题 (48) 导致

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Re}l(z) = 0, \quad |z| > V^{-1} \\ &\mathrm{Im}l(z) = 0, \quad |z| < V^{-1} \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

为了解决这个问题，首先，必须研究裂纹面分别在增加载荷 Px^m, Pt^n 影响下的裂纹扩展问题.

从上述研究的两个问题可知，应当分别讨论在 $m=0, n=0$ 的情况. 当 $m=0$ 时，施加到裂纹面的载荷转化为 Pt^n；当 $n=0$ 时，施加到裂纹面的载荷转化为 Px^m. 通过上述两个问题，我们已经知道了不同条件下自相似函数 $l(z)$ 的解.

当 $m=0$ 时，可得 $l(z)$ 唯一解，即方程 (30).

当 $n=0$ 时，也得 $l(z)$ 唯一解，即方程 (41).

因此，对载荷 Px^mt^n 边界值问题 (49) 的解，当 $m=0$ 时应当转化为式 (30) 的解；而当 $n=0$ 时为式 (41) 的解. 由此可推出 $l(z)$ 的解如下

$$l(z) = A \cdot z^{m+1} \cdot \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \cdot \Big(z^{m+n}\frac{n^2z^2 + z^2 - nV^{-2}}{z\sqrt{z^2 - V^{-2}}}\Big)\Big] \tag{50}$$

这里 A 为待定实常数.

然后，将式 (50),(5) 代入式 (17),(19),(25) 后，可得 $y=0$ 上的应力、位移及动应力强度因子分别为

$$\tau_{yz} = A \cdot L_x^{-m}(x^n L_t^{-n-1})\mathrm{Re}\Big\{z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\cdot \Big(z^{m+n}\frac{n^2z^2+z^2-nV^{-2}}{z\sqrt{z^2-V^{-2}}}\Big)\Big]\cdot n^{(2)}(z)\cdot \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\Big\},\quad |x|>Vt \tag{51}$$

$$w = \frac{A}{C_{44}^{(2)}}\cdot L_x^{-m}(x^{n+1}L_t^{-n-1})\cdot \mathrm{Re}\int_0^z \Big\{z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\cdot \Big[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\Big(z^{m+n}\frac{n^2z^2+z^2-nV^{-2}}{z\sqrt{z^2-V^{-2}}}\Big)\Big]\cdot n^{(2)}(z)\Big\}\mathrm{d}z,\qquad |x|<Vt \tag{52}$$

$$K_3(t) = \lim_{x\to Vt}\sqrt{2\pi(x-Vt)}\cdot A\cdot[L_x^{-m}(x^n\cdot L_t^{-n-1})]\cdot \mathrm{Re}\Big\{\mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\cdot n^{(2)}(z)\cdot z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\cdot \Big(z^{m+n}\frac{n^2z^2+z^2-nV^{-2}}{z\sqrt{z^2-V^{-2}}}\Big)\Big]\Big\} \tag{53}$$

然后将式 (51) 代入式 (47)，关于 x, t 进行 $(m+n)$ 阶求导可得

$$\mathrm{Re}\int_0^{t/x} A\cdot z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\cdot \Big(z^{m+n}\frac{n^2z^2+z^2-nV^{-2}}{z\sqrt{z^2-V^{-2}}}\Big)\Big]\cdot \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\cdot n^{(2)}(z)\mathrm{d}z = -P(m+n)! \tag{54}$$

从上式可确定常数 A

$$\left.\begin{aligned} &A = -P\cdot(m+n)!/J\\ &J = \mathrm{Re}\int_0^M z^{m+1}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}z^m}\Big[\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\cdot \Big(z^{m+n}\frac{n^2z^2+z^2-nV^{-2}}{z\sqrt{z^2-V^{-2}}}\Big)\Big]\cdot \mathrm{Im}\Big[\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\Big]\cdot n^{(2)}(z)\cdot\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

式中 $0<M^{-1}<V$，积分是在主值意义下进行的.

现假设常数 $m=0,\ n=0$，则上述问题转化为裂纹表面受到均布载荷 q 作用的动态裂纹扩展问题. 按照上面的方法，就可以确定 $l(z)$ 唯一解为

$$l(z) = (Az+B)(z^2-V^{-2})^{-3/2} \tag{56}$$

由于应力仅在裂纹尖端具有奇异性，因而上式中的分母不能有除 $(z^2-V^2)^{-3/2}$ 以外的其它项；又由于 $z\to\infty$ 时，$\mathrm{Re}l(z)\to o(1)$，因此分子只能是一次多项式，即 $Az+B$. 由于位移是 x 的偶函数，且以 y 轴为对称轴，有 $B=0$.

然后将式 (5), (56) 代入到式 (17),(19),(25)，即可得 $y=0$ 上的应力、位移、应力强度因子分别为

$$\tau_{yz}(x,0,t) = \mathrm{Re}\int_{C_d}^{x/t} -\frac{A\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{(z^2-V^{-2})^{3/2}}\cdot n^{(2)}(z)\mathrm{d}z,\quad |x|>Vt \tag{57}$$

$$w = \frac{1}{C_{44}^{(2)}}\int_0^t \mathrm{d}t\cdot Re\int_{C_d}^{x/t} -\frac{Az}{(z^2-V^{-2})^{3/2}}\cdot n^{(2)}(z)\mathrm{d}z,\quad |x|<Vt \tag{58}$$

$$K_3(t) = \lim_{x\to Vt}\sqrt{2\pi(x-Vt)}\,\mathrm{Re}\int_{C_d}^{x/t} -\frac{A\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{(z^2-V^{-2})^{3/2}}n^{(2)}(z)\mathrm{d}z = AV^4\sqrt{\pi t(C_{55}^{(2)}V^{-2}-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}\cdot n^{(2)}(V^{-1}) \tag{59}$$

上式的极限类型属于 $0\cdot\infty$ 型，必须转化为 ∞/∞ 型后，方可应用罗比塔 (L'Hospital) 法则进行求导计算 [22].

令式 (57) 等于载荷 q，由此可确定实常数 A

$$\left.\begin{aligned} &A = q/J\\ &J = \mathrm{Re}\int_{C_d}^{x/t} -\frac{\sqrt{(C_{55}^{(2)}z^2-\rho^{(2)})/C_{44}^{(2)}}}{(z^2-V^{-2})^{3/2}}n^{(2)}(z)\mathrm{d}z \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

式中 $0<M^{-1}<V$，积分是在主值意义下进行的.

4 结　论

对于不同正交异性材料界面上的裂纹扩展问题，有些研究人员认为应具有 $r^{-1/2}$ 阶奇异性 [16,21]，有些则认为应具有其它阶奇异性，即使如此文中的方法仍然适用. 如果两种材料具有相同的材料常数，那么这些解就转化为单一正交异性材料中相应问题的解. 有关单一正交异性材料的断裂动力学问题见文献 [22]. 对材料 1 进行求解时，可代入式 (25) 中的第 2 式，然后采用材料 2 中的方法即可求出材料 1 中的应力、位移、应力强度因子.

采用自相似函数的途径能够获得Ⅲ型裂纹面受变载荷 $Px^m t^n$ 作用下的动态扩展问题的解析解，这可认为是弹性理论研究的相似类型的动力学问题. 解的方法是以专用的解析函数理论为基础，是简单

的和简明的．这已经减少了需要解决这一裂纹扩展问题的计算工作量．

参 考 文 献

1 Liu XF. Closed-form solution for a mode-III interface crack between two bonded dissimilar elastic layers. *Int J Frac*, 2001, 109: L3～L8

2 Erigen AC, Suhubi ES. Elastodynamics Vol.2. Linear Theory. Academic Press. New York San Francisco London, 1975

3 Alezander M. Korsunsky. Debonding of a weak interface in front of a through-thickness crack. *Int J Frac*, 2001, 109: L35～L40

4 Lee KW, Earmme YY. An interfacial edge crack anistropic bimaterial under anti-plane singularity. *Int J Frac*, 2000, 104: 15～23

5 Choi SR, Chong CH, Chai YS. Interfacial edge cracking in two bonded dissimilar orthotropic quarter planes under anti-plane shear. *Int J Frac*, 1994, 67: 143～150

6 Wei PJ, Zhang SY, Wu YL, et al. Dynamic SIF of interface crack between two dissimilar viscoelastic bodies under impact loading. *Int J Frac*, 2000, 105: 127～136

7 Lü NC, Cheng J, Cheng YH. Mode III interface crack propagation in two joined media with weak dissimilarity and strong orthotropy. *Theo App Frac Mech*, 2001, 36: 219～231

8 程靳．不同正交异性材料界面上的扩展裂纹问题．固体力学学报， 1987, 8(2): 108～115 (Cheng Jin. Problems on elastodynamics of some orthotropic anisotropic bodies. *J Harbin Inst Tech Eng Mech*, (Supplement). 1985, 8(2): 8～21(in Chinese))

9 Atkinson C. On the dynamic stress and displacement field associated with a crack propagating across the interface between two media. *Int J Eng Sci*, 1974, 14: 491～506

10 Muskhelishvili NI. Singular Integral Equations. Moscow: Nauka, 1968

11 Muskhelishvili NI. Some Fundamental Problems in the Mathematical Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1968

12 Broberg KB. The propagation of a brittle crack. *Arch Für Fysik*, 1960, 18: 159～192

13 Craggs JW. In: Drucker, Gilman Eds, Fracture of Solids, New York: Interscience, 1961

14 Charepanov GP. Mechanics of Brittle Fracture. Moscow: Nauka, 1979

15 吕念春，唐立强，程云虹．正交异性体反平面问题另一形式自相似解的推导．力学季刊， 2004, 25(2): 226～229 (Lü Nianchun, Tang Liqiang, Cheng Yunhong. Deduction of self-similar solutions of other form on anti-plane problems for an orthotropic anisotropic body. *Chinese Quart Mech*, 2004, 25(2): 226～229 (in Chinese))

16 Sih GC. Mechanics of Fracture 4. Elastodynamics Crack Problems. Noordhoff Leyden, 1977

17 Kanwal RP, Sharma DL. Singularity methods for elastostatics. *J Elasticity*, 1976, 6(4): 405～418

18 Gahov FD. Boundary-value Problems. Moscow: Fizmatgiz, 1963

19 Sneddon NI. Fourier Transform. New York: McGraw-Hill, 1951

20 Muskhelishvili NI. Some Basic Problems from the Mathematical Theory of Elasticity. Groningen-Holland: P. Noordoff, 1953

21 Brock LM. Dynamic intensity factors for an interface flaw extending at a non-uniform rate. *J Elasticity*, 1974, (4): 51～63

22 程靳．某些正交异性体弹性动力学问题．哈尔滨工业大学学报，工程力学专缉， 1985 (增刊): 8～21 (Cheng Jin. Problems on elastodynamics of some orthotropic anisotropic bodies. *J Harbin Inst Tech Eng Mech*, 1985 (Supplement): 8～21 (in Chinese))

SELF-SIMILAR SOLUTIONS TO MODE III INTERFACE CRACK SUBJECTED TO VARIABLE LOADINGS Px^mt^n

Lü Nianchun[*,**,1)] Cheng Yunhong[†] Li Xingang[**] Cheng Jin[**]

[*](*School of Material Science and Engineering, Shenyang Ligong University, Shenyang* 110168, *China*)

[**](*Department of Astronautics Science and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin* 150001, *China*)

[†](*Department of Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang* 110006, *China*)

Abstract By the method of complex functions, self-similar solutions are obtained for a mode III interface crack subjected to variable loadings Px^mt^n. The problems discussed can be transformed into Riemann-Hilbert problems by this method, then analytical solutions are obtained by self-similar functions. Using those solutions and the superposition theorem, the solution to arbitrarily complex problems can be obtained.

Key words complex function, mode III interface crack, variable loading Px^mt^n, self-similar function, analytical solution

---

Received 24 September 2004, revised 26 October 2005.

1) E-mail: lnc_65@163.com