

# 壁面定常波纹状吹吸槽道流中湍流特性的研究<sup>1)</sup>

罗纪生<sup>2)</sup> 王新军

(天津大学力学系, 天津 300072)

**摘要** 在非平衡湍流中, 如具有周期性边界条件的流动, 由于雷诺应力与平均流速的变形率有着不同的性质, 当周期性边界条件发生变化时, 雷诺应力和平均流速变形率的相位对边界条件的响应也不同, 但是二者的相位差在相当大的范围内是稳定的. 这一特性加深了对雷诺应力的认识, 并对非平衡湍流中的模式理论及大涡模拟中亚格子雷诺应力模式的建立提出了许多需要注意的问题. 利用层流模型, 把空间周期性边界条件作为某种扰动, 研究了扰动及其非线性项的分布以及相位间的关系, 得到了一些有益的结果.

**关键词** 非平衡湍流, 雷诺应力, 主流速度的变形率, 相位, 层流模型

中图分类号: O357.5 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2005)06-0673-09

## 引 言

随着计算机和计算方法的发展, 工程界对湍流计算提出了更高的要求, 希望能计算非平衡湍流. 因此就要求对非平衡湍流的特性有进一步的认识. 目前大多数平衡湍流的湍流模式理论为涡黏模式, 对定常、或随时间及空间只有缓慢变化的湍流, 可以用涡黏系数把雷诺应力与速度的变形率联系起来. 然而, 雷诺应力与平均流速的变形率毕竟有着不同的性质, 在非平衡湍流中, 各种湍流量之间的关系与定常流是不一样的, 如 Bruns 等<sup>[1]</sup>所做的 S 形槽道中湍流量分布的测量就证实了这一点. 王昕等<sup>[2]</sup>的实验以及 Wang 等<sup>[3]</sup>在对一条边界上沿流向有空间周期性吹吸的槽道湍流进行的数值模拟研究结果都表明, 在周期性边界条件下, 雷诺应力与平均变形率之间存在相位差. 雷诺应力和流速变形率之间的这些特性, 在建立非平衡湍流的模式理论时是需要认真考虑的, 在大涡模拟计算中建立亚格子雷诺应力模式时也有类似的问题. 因此, 在非平衡湍流中, 建立雷诺应力与平均流速的变形率之间的关系就显得非常重要.

在文献 [3] 的基础上, 本文研究了雷诺数、边界吹吸幅值等因素对雷诺应力与平均流速的变形率之间相位差的影响, 研究了平均流速的变形率对边界条件变化的响应等问题. 另外, 本文还利用层流模

型的概念, 把空间周期性边界条件作为某种扰动, 研究了扰动分布以及相位间的关系, 为了简化计算、减少计算量, 简便地得到非平衡湍流中扰动分布以及相位间的关系提供了一条途径, 得到了一些有益的结果.

## 1 基本方程与湍流涡黏系数

采用的坐标如图 1 所示, 用半槽宽度  $h$ , 层流的最大平均速度  $U_m$  对各物理量进行无量纲化. 在下边界加空间周期性的吹吸, 即在  $y = -1$  的边界处, 速度边界条件为

$$u = 0, \quad v = A \sin(\alpha x), \quad w = 0 \quad (1)$$

设任一物理量  $q$  与相应的层流解  $Q$  的差为  $\hat{q}$ , 即  $\hat{q} = q - Q$ , 我们称之为扰动量. 由 N-S 方程和连续

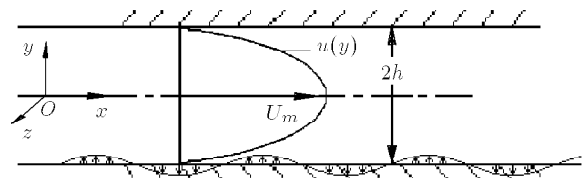


图 1 槽道流坐标系设置

Fig.1 Coordinates of channel flow

2004-05-28 收到第 1 稿, 2005-07-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金重点基金 (10232020) 及南开大学天津大学刘徽应用数学中心资助项目.

2) E-mail: jsluo@tju.edu.cn

性方程可得扰动量满足的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{dU}{dy} \hat{v} &= -\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{u} - \\ &\hat{v} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) - \hat{w} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} &= -\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{v} - \\ &\hat{u} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) - \hat{w} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + U \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} &= -\frac{\partial \hat{\pi}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{w} - \\ &\hat{u} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} \right) - \hat{v} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $U = 1 - y^2$  层流流速;  $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$  为扰动速度;  $\hat{\pi} = \hat{p} + (\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)/2$ ,  $\hat{p}$  为扰动压力; 雷诺数  $Re = U_m h / \nu$ ,  $\nu$  为黏性系数.

在计算时流向  $x$ , 展向  $z$  方向取周期性边界条件, 做 Fourier 级数展开, 在法向  $y$  方向用 Chebyshev 多项式展开, 时间方向采用中心差分. 具体的数值方法见文献 [4]. 在进行数值模拟时, 取计算域在  $x, y, z$  方向的长度分别为  $6\pi/\alpha, 2, 5\pi$ , 采用的网格  $128 \times 129 \times 128$ .

通常的涡黏模型可以写为

$$-\left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} \right) = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

其中  $u'_i$  为湍流的脉动速度,  $\overline{U}_i$  为湍流的时均速度,  $\nu_t$  称为涡黏系数. 在边界没有吹吸的情况下, 式 (3) 表示了雷诺应力与时均速度变形率之间的关系, 没有相位问题, 涡黏系数为实数. 在边界有沿流向周期变化的吹吸时, 雷诺应力与时均速度变形率除了有沿流向均匀部分外, 还有沿流向周期变化的部分. 对于沿流向周期变化的部分, 根据式 (3) 有

$$-\left( \overline{u'_i u'_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_k u'_k} \right)_\alpha = \left[ \nu_t \left( \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \right]_\alpha \quad (4)$$

设雷诺应力及时均速度变形率沿流向周期变化的部分为  $-(\overline{u'_i u'_j})_\alpha, (\partial \overline{U}_i / \partial x_j + \partial \overline{U}_j / \partial x_i)_\alpha$ . 特别对剪切应力和剪切变形率, 式 (4) 可写为

$$\begin{aligned} -|\overline{u'v'}|_\alpha e^{i[\alpha x + \varphi(y)]} + c.c. &= \\ \nu_{t\alpha} |\partial \overline{U} / \partial y + \partial \overline{V} / \partial x|_\alpha e^{i[\alpha x + \theta(y)]} + c.c. &\quad (5) \end{aligned}$$

其中  $c.c$  表示共轭复数

$$\begin{aligned} -(\overline{u'v'})_\alpha &= -|\overline{u'v'}|_\alpha e^{i[\alpha x + \varphi(y)]} + c.c. \\ (\partial \overline{U} / \partial y + \partial \overline{V} / \partial x)_\alpha &= \\ |\partial \overline{U} / \partial y + \partial \overline{V} / \partial x|_\alpha e^{i[\alpha x + \theta(y)]} + c.c. \end{aligned}$$

由此可知对雷诺应力与速度变形率沿流向周期变化的部分, 涡黏系数的表达式为

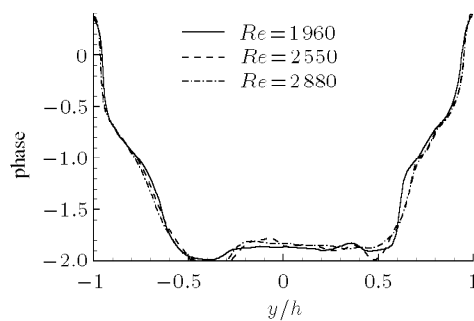
$$\nu_{t\alpha} = |\nu_{t\alpha}| e^{i[\varphi(y) - \theta(y)]} \quad (6)$$

因此, 如果雷诺应力与速度变形率沿流向周期变化的部分的相位沿法向的变化不一样, 则要求涡黏系数为复数.

### 2 数值模拟结果

计算从层流, 边界无吹吸开始, 利用方程 (2) 和边界条件 (1), 取  $A = 0$ , 层流雷诺数  $Re = 7000$ , 给定脉动速度分布, 形成初始流场, 计算至统计定常, 得到湍流流场. 平均速度剖面, 雷诺应力, 速度变形率及总应力沿平板法向的变化等结果与实验一致. 脉动速度均方根分布的结果与 Kim 等 [5] 的结果一致. 统计定常后湍流雷诺数  $Re_t = U_{cl} h / \nu$ , 其中  $U_{cl}$  为湍流时均速度的最大值. 在计算时利用了等压条件, 湍流时均流的速度最大值比层流速度的最大值小, 但可以利用调整  $Re$  改变时均流的速度大小.

在此基础上, 研究吹吸的影响,  $\alpha$  取为 0.9. 图 2 中给出了在  $A = 0.002, Re_t = 1969, 2550, 2880$  条件下, 剪切变形  $(\partial \overline{U} / \partial y + \partial \overline{V} / \partial x)_\alpha$  的相位沿  $y$  的

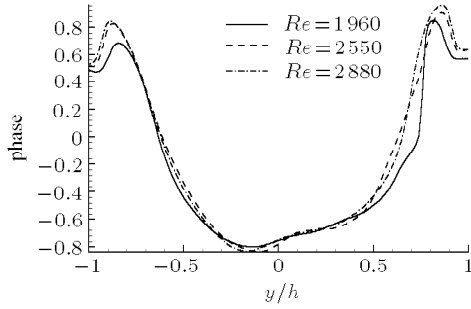


(a) 剪切变形相位的分布

(a) Phase of shearing rate of strain

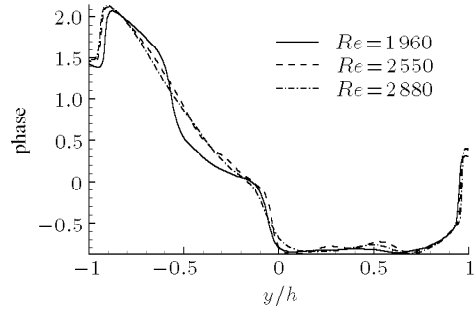
图 2 剪切变形及雷诺剪应力的相位及其相位差的分布

Fig.2 Phase of shearing rate of strain and shearing Reynolds stress, and the difference



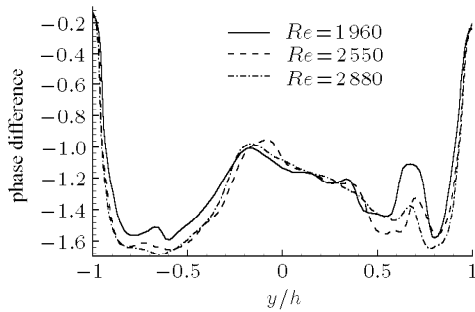
(b) 雷诺剪应力相位的分布

(b) Phase of shearing Reynolds stress



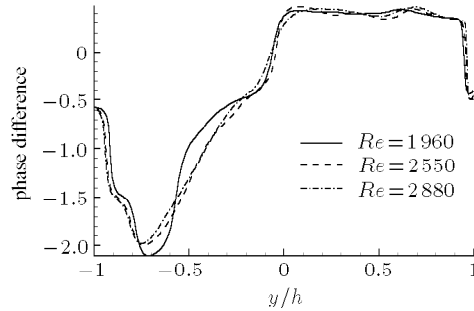
(b) 流向雷诺正应力相位的分布

(b) Phase of Reynolds stress of flow direction



(c) 相位差的分布

(c) Phase difference



(c) 相位差的分布

(c) Phase difference

图 3 流向变形率及流向雷诺正应力的相位及其相位差的分布

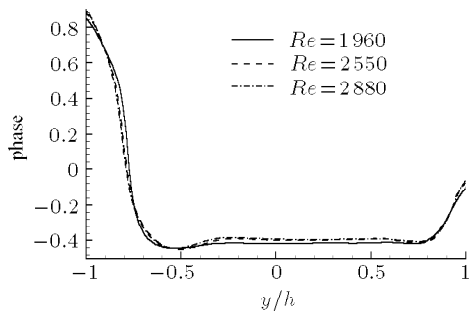
Fig.3 Phase and phase difference of rate of strain and Reynolds stress of flow direction

图 2 剪切变形及雷诺剪应力的相位及其相位差的分布 (续)

Fig.2 Phase of shearing rate of strain and shearing Reynolds stress, and the difference (continued)

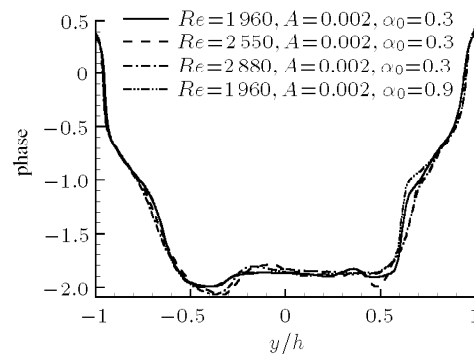
分布, 剪切应力  $-(\overline{u'v'})_\alpha$  的相位的分布及二者的差.

图 3 中分别给出了流向的速度变形  $2(\partial\overline{U}/\partial x)_\alpha$  及流向正应力  $-(\overline{u'u'} - u'_i u'_i/3)_\alpha$  相位沿  $y$  的分布, 以及二者的差. 结果表明, 雷诺数在一定范围内的变化对相位差的影响不大.



(a) 流向变形率相位的分布

(a) Phase of rate of strain of flow direction



(a) 剪切变形相位的分布

(a) Phase of shearing rate of strain

图 4 剪切变形及雷诺剪应力的相位及其相位差的分布

Fig.4 Phase and phase difference of shearing rate of strain and shearing Reynolds stress

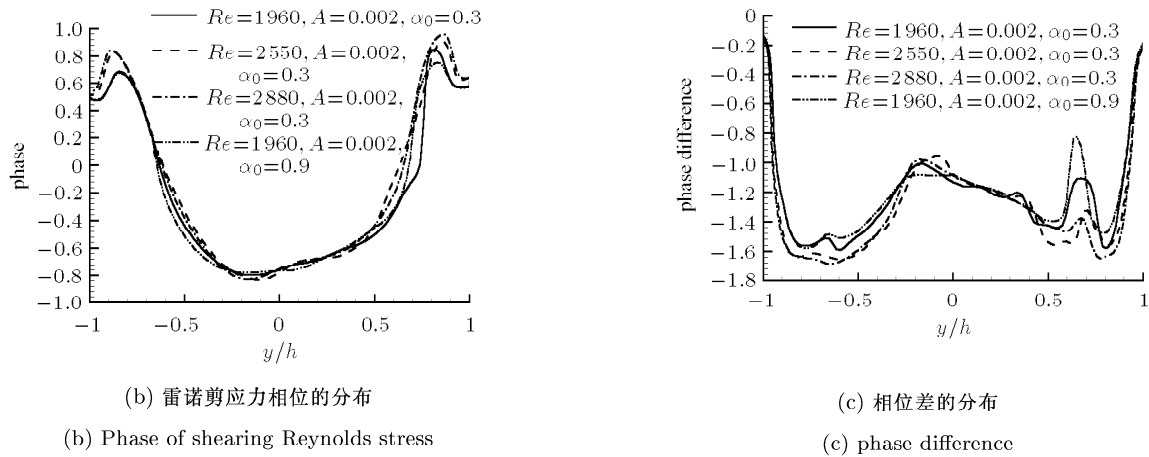


图 4 剪切变形及雷诺剪应力的相位及其相位差的分布 (续)

Fig.4 Phase and phase difference of shearing rate of strain and shearing Reynolds stress (continued)

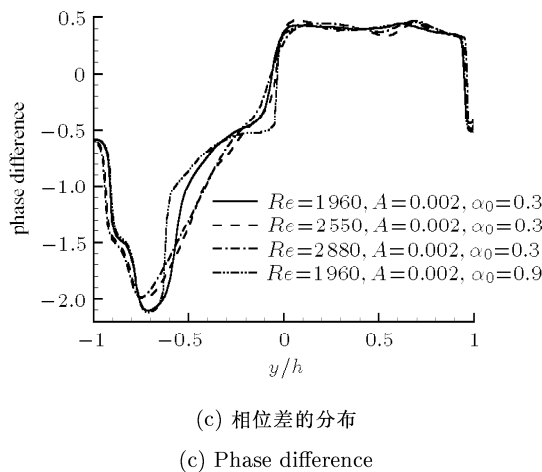
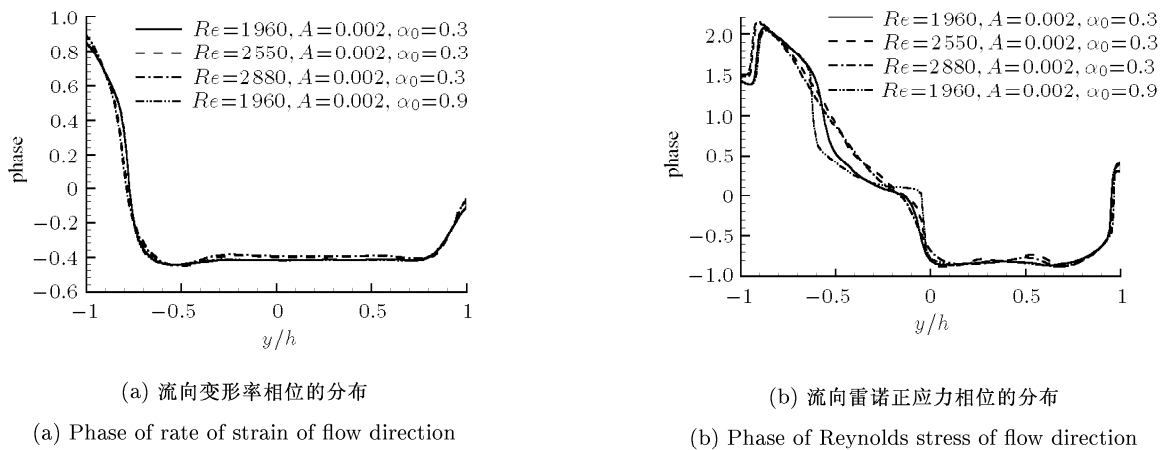


图 5 流向变形率及流向雷诺正应力的相位及其相位差的分布

Fig.5 Phase and phase difference of rate of strain and Reynolds stress of flow direction

图 6 给出了不同吹吸幅值  $A$  的计算结果. 图 6(a) 是按黏性长度尺度给出的平均流速的分布. 图 6(b) 给出了速度变形率的相位分布.

由图 6 可知, 当吹吸幅值  $A$  较大时, 将影响平均流的性质, 也使速度变形率的相位开始发生较大的变化.

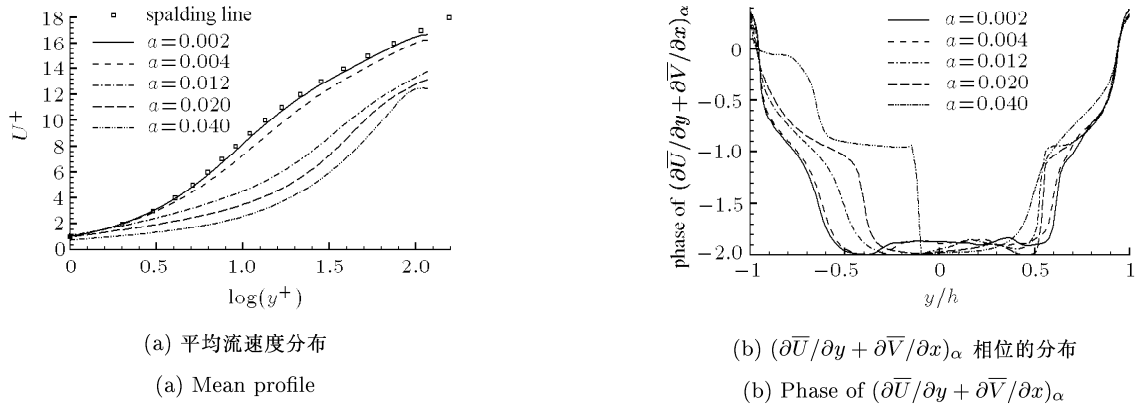


图 6 壁面吹吸幅值对平均流速与速度变形率相位的影响

Fig.6 Influence of amplitude of blow-suck on mean profile and on phase of rate of strain

### 3 层流模型的计算结果及比较

用层流模型来考虑上边的结果，对深入地理解问题有一定的帮助。所谓层流模型是指用层流的扰动方程，考虑湍流的平均速度，来分析扰动的演化规律，即在方程 (1) 中的层流速度用湍流的平均速度代替。

把壁面吹吸考虑为壁面的扰动，即在壁面上  $v = A \sin(\alpha x) = A/(2i)(e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x})$ ，以  $a = A/2$  为小参数，按摄动展开的方法求解扰动速度，设扰动速度

为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' = & a\mathbf{u}_1 e^{i\alpha x} + a^2(\mathbf{u}_{22} e^{i2\alpha x} + \mathbf{u}_{20}) + \\ & a^3(\mathbf{u}_{33} e^{i3\alpha x} + \mathbf{u}_{31} e^{i\alpha x}) + \dots + c.c \end{aligned} \quad (7)$$

$\mathbf{u}_1 e^{i\alpha x}$  为略去式 (1) 中扰动的非线性项，与式 (2) 联立的线性方程的解，称为基本波，基本波与基本波作用得到二次谐波  $\mathbf{u}_{22} e^{i2\alpha x}$  的解，基本波与基本波的共轭作用得到基本流的修正  $\mathbf{u}_{20}$  的解。

针对层流雷诺数  $Re = 7000$  得到的湍流时均速度分布，图 7 给出了  $A = 0.002$  由基本波  $\mathbf{u}_1 e^{i\alpha x}$  引

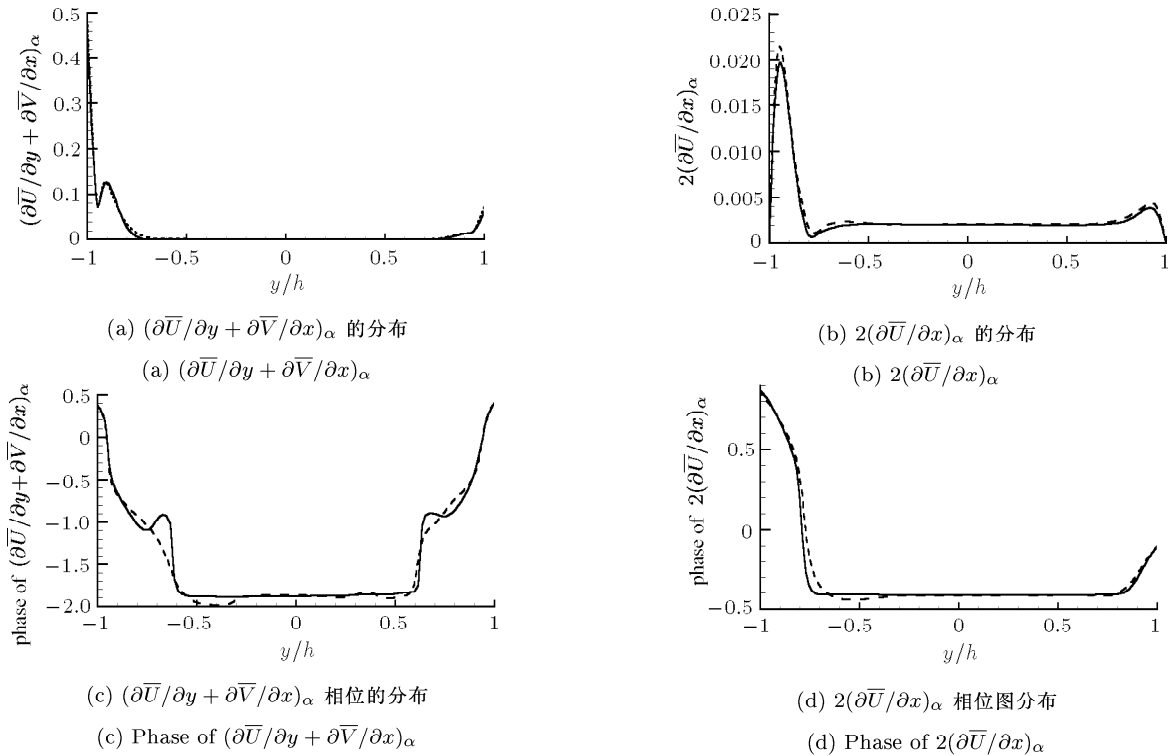


图 7  $A = 0.002$  时基本波及其相位的分布 (实线为层流模型的结果，虚线为数值模拟的结果，下同)

Fig.7  $A = 0.002$ , base wave and its phase (real line: result of laminar model; dashed: result of DNS).

the following text is same here)

起的速度变形率及其相位的分布，以及数值模拟相应的结果，二者是符合的。

图 8 中的实线给出了由基本波引起的平均流的修正  $u_{20}$ ，虚线给出了加吹吸边界条件和不加吹吸边界条件平均速度的差，即由于吹吸边界条件引起的平均流的变化。结果表明平均流的修正大部分是基本波引起的。

图 9~ 图 12 给出了  $A = 0.004, 0.012, 0.020, 0.040$  时由基本波  $u_1 e^{i\alpha x}$  引起的速度变形率及其相位的分布，以及数值模拟相应的结果。

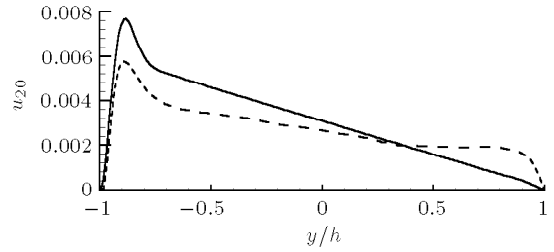
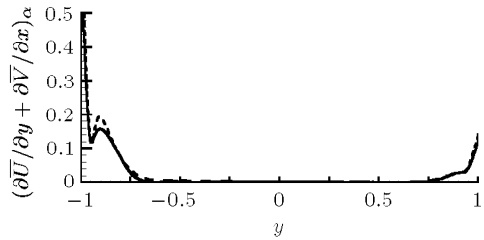
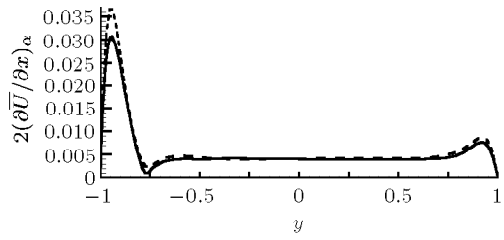


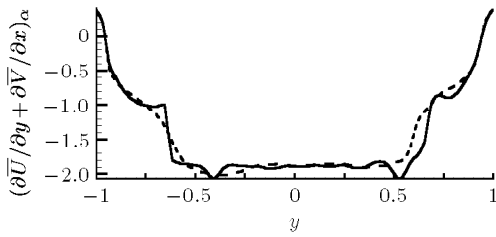
图 8 层流理论和数值模拟得到的平均流修正的比较  
Fig.8 Compare of the modification of mean profile by laminar model and by DNS



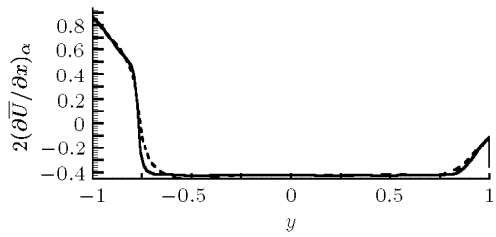
(a)  $(\partial\bar{U}/\partial y + \partial\bar{V}/\partial x)_\alpha$  的分布  
(a)  $(\partial\bar{U}/\partial y + \partial\bar{V}/\partial x)_\alpha$



(b)  $2(\partial\bar{U}/\partial x)_\alpha$  的分布  
(b)  $2(\partial\bar{U}/\partial x)_\alpha$



(c)  $(\partial\bar{U}/\partial y + \partial\bar{V}/\partial x)_\alpha$  相位的分布  
(c) Phase of  $(\partial\bar{U}/\partial y + \partial\bar{V}/\partial x)_\alpha$



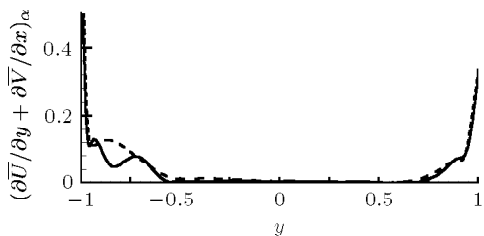
(d)  $2(\partial\bar{U}/\partial x)_\alpha$  相位图分布  
(d) Phase of  $2(\partial\bar{U}/\partial x)_\alpha$

图 9  $A = 0.004$  时基本波及其相位的分布

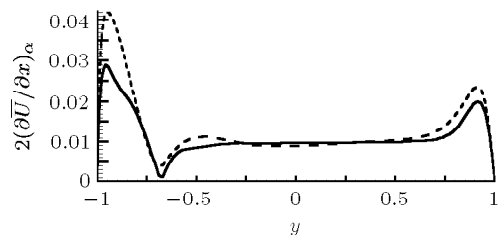
Fig.9  $A = 0.004$ , base wave and its phase

在吹吸幅值不是很大时 ( $A < 0.04$ )，利用层流模型可以较好地模拟湍流场中的扰动及其变形率。

这表明基本波即时均速度变形率的相位分布主要取决于平均流的分布，因此层流模型基本上可以描述



(a)  $(\partial\bar{U}/\partial y + \partial\bar{V}/\partial x)_\alpha$  的分布  
(a)  $(\partial\bar{U}/\partial y + \partial\bar{V}/\partial x)_\alpha$



(b)  $2(\partial\bar{U}/\partial x)_\alpha$  的分布  
(b)  $2(\partial\bar{U}/\partial x)_\alpha$

图 10  $A = 0.012$  时基本波及其相位的分布

Fig.10  $A = 0.012$ , base wave and its phase

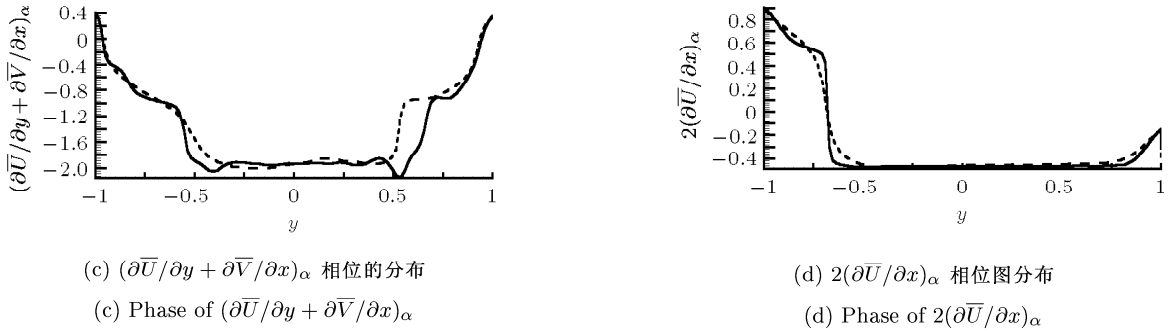


图 10  $A = 0.012$  时基本波及其相位的分布 (续)

Fig.10  $A = 0.012$ , base wave and its phase (continued)

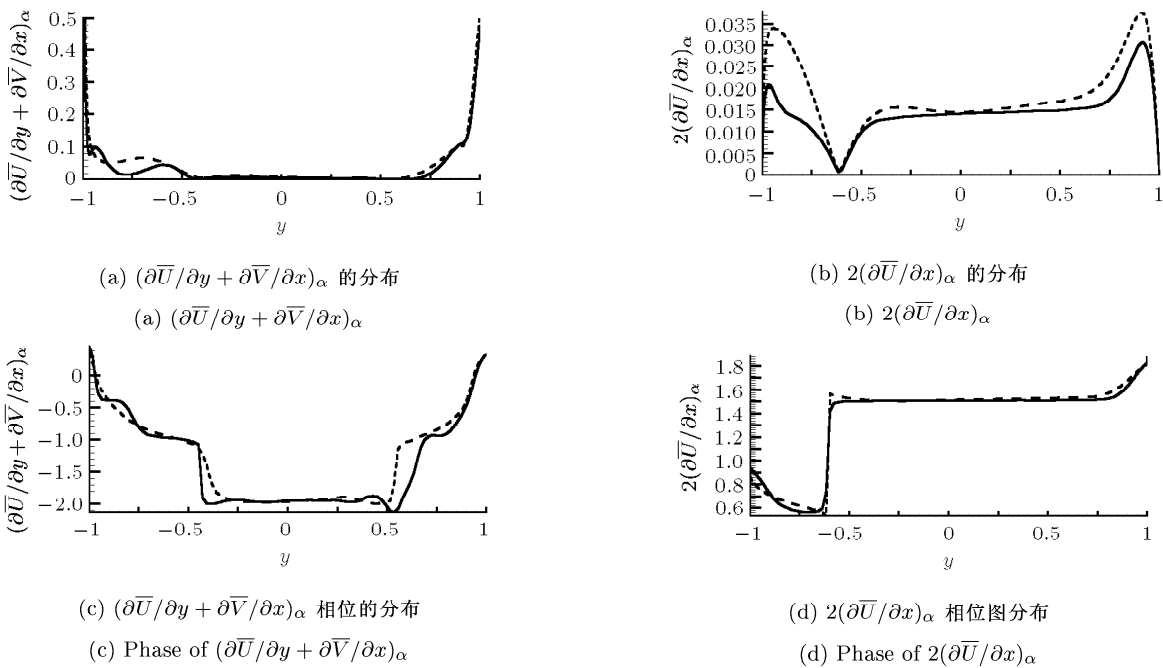


图 11  $A = 0.020$  时基本波及其相位的分布

Fig.11  $A = 0.020$ , base wave and its phase

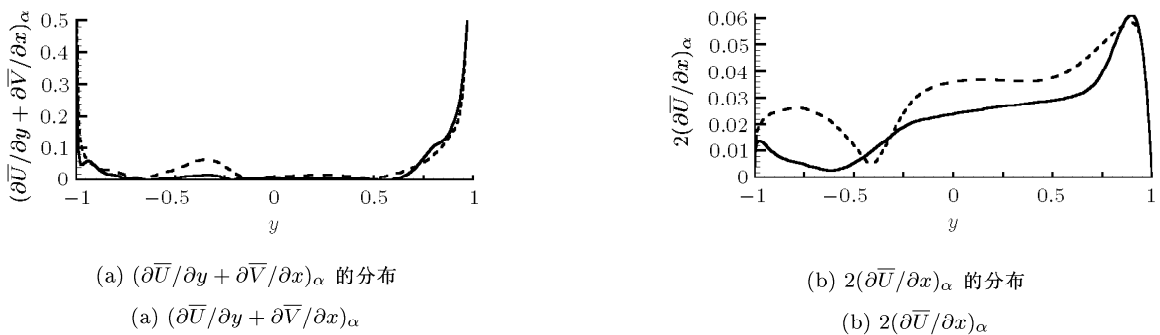
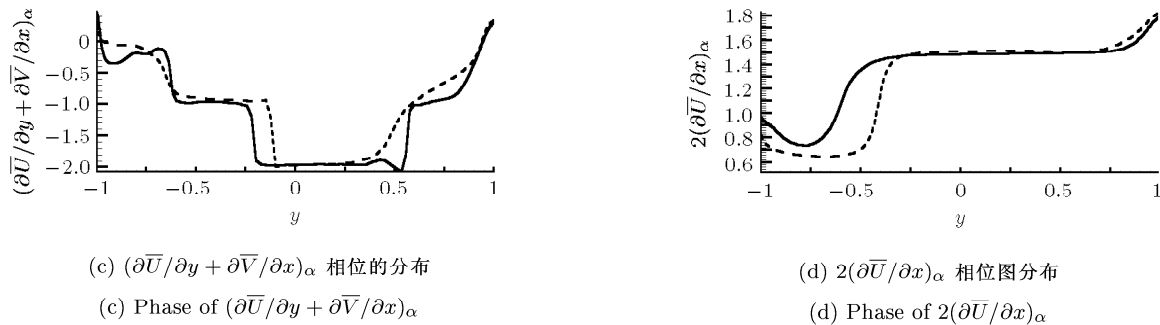


图 12  $A = 0.040$  时基本波及其相位的分布

Fig.12  $A = 0.040$ , base wave and its phase

图 12  $A = 0.040$  时基本波及其相位的分布 (续)Fig.12  $A = 0.040$ , base wave and its phase(continued)

时均变形率的相位分布. 因此, 可以认为扰动引起的变形率主要取决于平均流的速度分布, 而与其它湍流脉动没有很强的直接关系.

扰动自身会产生雷诺应力影响扰动的演化, 扰动自身产生的与基本波  $u_1 e^{i\alpha x}$  相关的雷诺应力的主要项为二次谐波  $u_{22} e^{i2\alpha x}$  与基本波的共轭  $u_1^* e^{-i\alpha x}$  作用以及基本流的修正  $u_{20}$  与基本波  $u_1 e^{i\alpha x}$  的作用.  $u_{22} e^{i2\alpha x}$  满足的是对流扩散方程,  $u_{20}$  满足的是扩散方程.

在建立非定常湍流雷诺模式理论时, 对应于某一尺度流动下的雷诺应力不仅与该尺度流动的变形率有关, 而且与其它尺度流动的速度有关. 因此, 用涡黏模式时要注意涡黏系数除了应考虑与本尺度的流动有关外, 还应考虑其它流动尺度的流动; 在考虑与本尺度的流动有关时, 非线性作用的两项分别满足的是对流扩散方程和扩散方程. 因此涡黏系数中的  $k$  和  $\varepsilon$  所满足的方程似乎也应是两类, 一类是对流扩散方程, 一类应是纯扩散方程. 一般地讲, 对流扩散部分的时间响应比较快, 纯扩散部分的时间响应则很慢. 希望能在建立非定常湍流雷诺模式理论以及大涡模拟中的亚格子雷诺应力时注意.

#### 4 结 论

本文在壁面引入定常的波纹状吹吸的边界条件, 用直接数值模拟方法, 对两平板间流动的雷诺应力与变形率的相位关系的影响因素进行了分析研究. 利用层流模型假设研究了由变化幅值的周期性抽吸边界条件引起的扰动的变形率, 及对应相位分布. 得出以下结论:

(1) 模拟的数据结果表明, 在周期性的湍流边界层中, 雷诺数的变化, 波纹状吹吸的波长对雷诺应力与相应的速度变形率之间的相位差影响不大. 当吹吸幅值较大, 对相位差有影响.

(2) 在吹吸幅值不是很大时 ( $A < 0.04$ ), 利用层流模型可以较好地模拟湍流场中的扰动及其变形率.

(3) 分析表明与扰动自身非线性过程有关的涡黏系数部分应分为两类, 一类具有对流扩散的性质, 一类具有纯扩散的性质, 对流扩散的部分时间响应比较快, 而纯扩散部分的时间响应很慢.

#### 参 考 文 献

- 1 Bruns JM, Fernholz HH, Monkewitz PA. An experimental investigation of a three-dimensional turbulent boundary layer in an "S"-shaped duct. *J Fluid Mech*, 1999, 393: 175~213
- 2 王昕, 连源. 湍流边界层复涡黏模式的实验研究. 力学学报, 2002, 34(3): 320~327 (Wang Xin, Lian Yuan. Experimental research on complex eddy viscosity modeling in turbulent boundary layer. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(3): 320~327 (in Chinese))
- 3 Wang Xinjun, Luo Jisheng, Zhou Heng. On the eddy viscosity model of periodic turbulent shear flows. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 19(5): 470~475
- 4 方一红, 罗纪生, 周恒. 槽道湍流近壁区相干结构的数值模拟. 力学学报, 1995, 27(5): 513~522 (Fang Yihong, Luo Jisheng, Zhou Heng. Numerical simulation of coherent structure in near wall region of channel turbulent flow. *Acta Mechanica Sinica*, 1995, 27(5): 513~522 (in Chinese))
- 5 Kim John, Moin Parviz, Moser Robert. Turbulence statistic in full developed channel flow at low Reynolds numbers. *J Fluid Mech*, 1987, 177: 133~166



## THE STUDY OF TURBULENT PROPERTIES IN STABLE FLEXUOUS BLOW-SUCK BOUNDARY CHANNEL FLOW<sup>1)</sup>

Luo Jisheng<sup>2)</sup> Wang Xinjun

(*Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

**Abstract** In non-equilibrium turbulent flows, the properties between Reynolds stress and rate of strain is different, the phase difference of the Reynolds stress and rate of strain are stable in a sizable range. This is useful to understand Reynolds stress and rate of strain, and posed great problem to non-equilibrium turbulent models and sub-grade Reynolds stress models in LES. Distribution of the disturbance and its non-line term and relation of the phase were also studied with laminar model in this paper.

**Key words** non-equilibrium turbulent flow, Reynolds stress, rate of strain, phase, laminar model

---

Received 28 May 2004, revised 13 July 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10232020) and Liu Hui Center for Applied Mathematics of Nankai & Tianjin University.

2) E-mail: jsluo@tju.edu.cn