

# 黏弹性板的大挠度蠕变屈曲<sup>1)</sup>

孙远翔<sup>2)</sup> 宁建国 刘 静

(北京理工大学爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

**摘要** 研究了具有初始小挠度受轴向压载黏弹性板的蠕变屈曲问题, 在建立控制方程时, 利用了 von Karman 非线性应变 - 位移关系, 并考虑了初始挠度, 用标准线性固体模型描述材料的黏弹性特性, 在求解非线性积分方程时, 利用梯形公式计算记忆积分式, 将非线性积分方程化为非线性代数方程进行数值求解, 得到了结构的蠕变变形过程. 又将问题退化到小挠度情况进行研究, 得到了挠度随时间扩展的解析解, 分析了瞬时失稳临界载荷、持久临界载荷的物理意义. 讨论了考虑几何非线性对黏弹性板蠕变屈曲的影响.

**关键词** 黏弹性板, 蠕变屈曲, 几何非线性, 瞬时临界载荷, 持久临界载荷

**中图分类号:** O345 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)01-0041-08

## 引 言

复合材料已被越来越多地用于板壳结构, 如飞行器、火箭发动机、涡轮机叶片、核反应堆等. 而这些结构常在恶劣的环境下(如高温梯度)工作, 在这种条件下结构的材料常显示黏弹性特性. 因而蠕变屈曲成为结构设计中的重要问题. 以航空为例, 以复合材料构件为主受力件的飞机, 随着使用时间的加长, 原有工艺、材料的缺陷(如初曲度等)在压力的作用下将逐渐扩大. 对于某一组经常作用的载荷来说, 即便它低于瞬时弹性临界载荷, 只要作用时间足够长, 结构也可能发生蠕变屈曲破坏. 蠕变屈曲还可在生物组织和深部层状岩板结构中观测到, 如血管壁坍塌及井下围岩的延迟失稳. 日前, 蠕变屈曲造成的结构失效已引起人们的极大关注. 因此, 对这些时间相关的蠕变屈曲的研究有着十分重要的工程意义.

迄今为止, 人们已对黏弹性板的小挠度(几何线性)蠕变屈曲问题做了许多研究<sup>[1~8]</sup>, Wilson 等<sup>[1]</sup>研究了双边受压矩形黏弹性正交各向异性板的稳定性问题, 但在他们的分析中应用了准弹性近似, 忽略了材料的记忆行为; 马麦斯捷尔等<sup>[3]</sup>研究了纤维增强复合材料板的蠕变屈曲, 孙远翔等<sup>[6]</sup>研究了有初始小挠度单向受压黏弹性薄板的蠕变屈曲, 在研

究中考虑了横向剪切变形的影响. 杨挺青等<sup>[8]</sup>通过对黏弹性薄板压曲稳定性的分析, 着重讨论了蠕变屈曲载荷 - 时间的特性.

关于黏弹性板的大挠度(几何非线性)蠕变屈曲问题的研究还很少, Brilla<sup>[9,10]</sup>定性分析了黏弹性板的大挠度蠕变屈曲. David Touati 等<sup>[11]</sup>探讨了非线性黏弹性矩形板的蠕变屈曲, 他们重点考虑了物理非线性对黏弹性板蠕变屈曲的影响. 只有 Fan 等<sup>[12]</sup>研究了有初始缺陷的黏弹性环形板的屈曲和后屈曲问题, 分析得到了临界载荷, 并计算了板的后屈曲响应. 目前, 关于黏弹性矩形板的大挠度(几何非线性)蠕变屈曲问题的定量研究还很少.

本文旨在探讨各向同性黏弹性矩形板受压载作用下的蠕变屈曲, 分析黏弹性板的蠕变屈曲与弹性板屈曲的区别, 并分别在几何线性和几何非线性两种情况下进行了研究, 讨论了考虑几何非线性对黏弹性板蠕变屈曲的影响, 计算得出了黏弹性板在受压载作用下挠度随时间变化的过程.

## 1 基本公式推导

本文研究四边简支具有初始挠度  $w_0$  的各向同性黏弹性矩形板受轴压情况(如图 1), 板在变形过程中符合 Kirchhoff 假设, 即: (1) 受载前垂直于板中面的线段受载后仍垂直于变形后的中面且长度不变.

2004-04-19 收到第 1 稿, 2005-07-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(10102002).

2) E-mail: syx1@bit.edu.cn

(2) 板在垂直于中面方向上的法应力  $\sigma_z$  远小于平行于中面方向上的法应力，故可不考虑它对中面应变的影响。

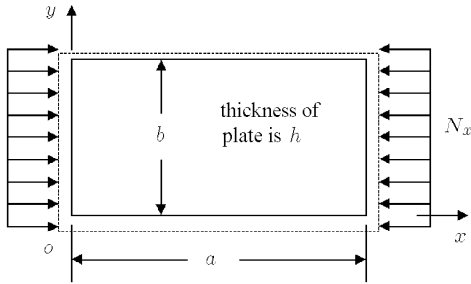


图 1 黏弹性矩形板受面内单向压缩作用  
Fig.1 A viscoelastic rectangular plate subjected to uniaxial compression

引入 von Karman 非线性几何方程，其具体形式如下 [13]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $w_0$  为初始挠度。

物理方程为 [13]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{Y(0)}{1-\mu^2} (1-R^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{Y(0)}{1-\mu^2} (1-R^*) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{Y(0)}{2(1+\mu)} (1-R^*) \gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中， $\mu$  为泊松比，不随时间变化 [14]。  $Y(t)$  是材料的松弛模量，通常取为

$$Y(t) = A + B e^{-\alpha t}$$

其中， $A, B, \alpha$  是材料常数。  $Y(0) = A+B$  是材料的瞬时弹性模量；  $Y(\infty) = A$  是持久模量；  $t_r = 1/\alpha$  是松弛时间；  $R^*$  是积分算子，其意义为

$$R^*[f(t)] = \alpha \frac{Y(0) - Y(\infty)}{Y(0)} \int_0^t f(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} d\tau \quad (3)$$

平衡方程如下 [13,15]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \\ -\frac{D}{h} (1-R^*) \nabla^4 (w - w_0) + \\ &\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial y} \left( \tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中， $h$  为板厚，  $D = \frac{Y(0)h^3}{12(1-\mu^2)}$  是板在初始时刻的刚度。

由几何方程 (1) 可推得变形协调方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \\ -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中微分算子  $L(f_1, f_2)$  定义为

$$\left. \begin{aligned} L(f_1, f_2) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} - \\ &2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x = 0, a \text{ 时, } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \\ \text{当 } y = 0, b \text{ 时, } w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

引入并定义如下应力函数  $\phi(t)$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(t) &= \frac{\partial^2 \phi(t)}{\partial y^2} \\ \sigma_y(t) &= \frac{\partial^2 \phi(t)}{\partial x^2} \\ \tau_{xy}(t) &= -\frac{\partial^2 \phi(t)}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将式 (8) 代入平衡方程和协调方程，同时注意到物理方程，类似于文献 [13,15] 中的推导，可得以下关于挠度  $w$  和应力函数  $\phi$  的方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{D}{h} (1-R^*) \nabla^4 (w - w_0) &= L(w, \phi) \\ \frac{1}{Y(0)} \nabla^4 \phi &= -\frac{1}{2} (1-R^*) [L(w, w) - L(w_0, w_0)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

设满足边界条件的挠度的形函数为

$$\left. \begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{m=m_0}^M \sum_{n=n_0}^N f_{mn}(t) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ w_0(x, y) &= \sum_{m=m_0}^M \sum_{n=n_0}^N f_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式 (10) 代入式 (9) 的第 2 式可得

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= Y(0) \sum_{r,s=m_0}^M \sum_{i,j=n_0}^N (1 - R^*) \cdot \\ &(f_{ri}f_{sj} - f_{0ri}f_{0sj}) \cdot \\ &\left[ C_{risj} \cos \frac{(r+s)\pi x}{a} \cos \frac{(i+j)\pi y}{b} + \right. \\ &A_{risj} \cos \frac{(r+s)\pi x}{a} \cos \frac{(i-j)\pi y}{b} + \\ &D_{risj} \cos \frac{(r-s)\pi x}{a} \cos \frac{(i+j)\pi y}{b} + \\ &\left. B_{risj} \cos \frac{(r-s)\pi x}{a} \cos \frac{(i-j)\pi y}{b} \right] - \frac{N_x y^2}{2h} \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{risj} &= -\frac{\lambda^2 r j (r j - i s)}{4[(r+s)^2 + \lambda^2 (i+j)^2]^2} \\ A_{risj} &= \frac{\lambda^2 r j (r j + i s)}{4[(r+s)^2 + \lambda^2 (i-j)^2]^2} \\ D_{risj} &= \frac{\lambda^2 r j (r j + i s)}{4[(r-s)^2 + \lambda^2 (i+j)^2]^2} \\ B_{risj} &= -\frac{\lambda^2 r j (r j - i s)}{4[(r-s)^2 + \lambda^2 (i-j)^2]^2} \\ \lambda &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

将式 (10) 和式 (11) 代入式 (9)，利用伽辽金方法可写出如下方程

$$\int_0^a \int_0^b X \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (12)$$

式中

$$X = \frac{D}{h} (1 - R^*) \nabla^4 (w - w_0) - L(w, \phi) \quad (13)$$

完成积分后得到

$$\begin{aligned} & - \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \frac{N_x}{Y(0)} \frac{b^2}{h^3} f_{lk} + \frac{\pi^2}{12(1 - \mu^2)} \cdot \\ & \left[ \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 + k^2 \right]^2 (1 - R^*) (f_{lk} - f_{0lk}) + \\ & \frac{1}{h^2} \sum_{m,r,s=m_0}^M \sum_{n,i,j=n_0}^N a_{lkmnr isj} f_{mn} (1 - R^*) \cdot \\ & (f_{ri}f_{sj} - f_{0ri}f_{0sj}) = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$k = \overline{n_0, N}, \quad l = \overline{m_0, M}$$

$$\begin{aligned} a_{lkmnr isj} &= -\frac{\pi^2}{4\lambda^2} \{ m^2 [(i+j)^2 C_{risj} \delta_{1mlrs} \delta_{1nkij} + \\ & (i-j)^2 A_{risj} \delta_{1mlrs} \delta_{2nkij} + \\ & (i+j)^2 D_{risj} \delta_{2mlrs} \delta_{1nkij} + \\ & (i-j)^2 B_{risj} \delta_{2mlrs} \delta_{2nkij}] + \\ & n^2 [(r+s)^2 C_{risj} \delta_{1mlrs} \delta_{1nkij} + \\ & (r+s)^2 A_{risj} \delta_{1mlrs} \delta_{2nkij} + \\ & (r-s)^2 D_{risj} \delta_{2mlrs} \delta_{1nkij} + \\ & (r-s)^2 B_{risj} \delta_{2mlrs} \delta_{2nkij}] - \\ & 2mn [(r+s)(i+j) C_{risj} \delta_{3mlrs} \delta_{3nkij} + \\ & (r+s)(i-j) A_{risj} \delta_{3mlrs} \delta_{4nkij} + \\ & (r-s)(i+j) D_{risj} \delta_{4mlrs} \delta_{3nkij} + \\ & (r-s)(i-j) B_{risj} \delta_{4mlrs} \delta_{4nkij}] \} \end{aligned}$$

在上式中

$$\begin{aligned} \delta_{1mlrs} &= \delta_{m+l-r-s} - \delta_{m-l+r+s} - \delta_{m-l-r-s} \\ \delta_{2mlrs} &= \delta_{m+l+r-s} + \delta_{m+l-r+s} - \delta_{m-l+r+s} - \\ & \delta_{m-l-r+s} \\ \delta_{3mlrs} &= \delta_{m-l-r-s} - \delta_{m+l-r-s} - \delta_{m-l+r+s} \\ \delta_{4mlrs} &= \delta_{m+l+r-s} + \delta_{m-l-r+s} - \delta_{m+l-r+s} - \\ & \delta_{m-l+r-s} \end{aligned}$$

在以上 4 式等号的右边

$$\delta_p = \begin{cases} 1, & \text{当 } p = 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } p \neq 0 \text{ 时} \end{cases}$$

黏弹性板受载而发生变形，其挠度  $w(t)$  随时间的增长主要由式 (10) 中的某 1 项  $f_{mn}(t)$  控制，即：

在式 (10) 中的  $f_{mn}(t)$  随时间增长的速度比其它项更快<sup>[11,16]</sup>.

鉴于此, 在式 (14) 中令  $l, r, s, m$  均取为某个定值  $m(m = \overline{m_0}, \overline{M})$ , 即  $l = r = s = m$ , 又令  $k, i, j, n$  均取为某个定值  $n(n = \overline{n_0}, \overline{N})$ , 即  $k = i = j = n$ . 这相当于在式 (10) 中只取第  $m, n$  项, 并做上述推导, 则式 (14) 化为

$$\left[ \frac{h^3}{12} Y(0) L_1 (1 - R^*) - N_x \right] (f_{mn} - f_{0mn}) + \frac{\pi^2 h}{16} \left[ \left( \frac{m}{\lambda} \right)^4 + n^4 \right] \frac{a^2}{m^2 b^4} Y(0) f_{mn} (1 - R^*) \cdot (f_{mn}^2 - f_{0mn}^2) = N_x f_{0mn} \quad (15)$$

式中

$$L_1 = \left( \frac{m\pi}{a} + \frac{n^2 a \pi}{m b^2} \right)^2 \frac{1}{1 - \mu^2} \quad (16)$$

引入无量纲量

$$\bar{f}_{mn} = f_{mn}/h, \quad \bar{f}_{0mn} = f_{0mn}/h$$

式 (15) 变为

$$\left[ \frac{h^3}{12} Y(0) L_1 (1 - R^*) - N_x \right] (\bar{f}_{mn} - \bar{f}_{0mn}) + \frac{\pi^2 h^3}{16} \left[ \left( \frac{m}{\lambda} \right)^4 + n^4 \right] \frac{a^2}{m^2 b^4} Y(0) \bar{f}_{mn} (1 - R^*) \cdot (\bar{f}_{mn}^2 - \bar{f}_{0mn}^2) = N_x \bar{f}_{0mn} \quad (17)$$

在以下推导中将略去挠度系数的顶标“-”及下标“mn”. 则式 (17) 改写为

$$\left[ \frac{h^3}{12} Y(0) L_1 (1 - R^*) - N_x \right] (f - f_0) + \frac{\pi^2 h^3}{16} \left[ \left( \frac{m}{\lambda} \right)^4 + n^4 \right] \frac{a^2}{m^2 b^4} Y(0) f (1 - R^*) \cdot (f^2 - f_0^2) = N_x f_0 \quad (18)$$

利用式 (3) 可将上式化为

$$\begin{aligned} (N_0 - N_x) f - \alpha (N_0 - N_\infty) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f d\tau - \\ N_0 f_0 + \alpha (N_0 - N_\infty) \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_0 d\tau + \\ N_{F0} f^3 - N_{F0} f_0^2 f - \alpha (N_{F0} - N_{F\infty}) \cdot \\ f \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f^2 d\tau + \alpha (N_{F0} - N_{F\infty}) \cdot \\ f \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} f_0^2 d\tau = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中

$$N_0 = \frac{h^3}{12} Y(0) L_1, \quad N_\infty = \frac{h^3}{12} Y(\infty) L_1 \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} N_{F0} &= \frac{\pi^2 a^2 h^3}{16 m^2 b^4} \left[ \left( \frac{m}{\lambda} \right)^4 + n^4 \right] Y(0) \\ N_{F\infty} &= \frac{\pi^2 a^2 h^3}{16 m^2 b^4} \left[ \left( \frac{m}{\lambda} \right)^4 + n^4 \right] Y(\infty) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中,  $N_0$  和  $N_\infty$  的物理意义将在后面分析给出.

引入无量纲量

$$\bar{t} = \alpha t, \quad \bar{\tau} = \alpha \tau$$

式 (19) 可化为

$$\begin{aligned} (N_0 - N_x) f - (N_0 - N_\infty) \int_0^t e^{-(t-\tau)} f d\tau - \\ N_0 f_0 + (N_0 - N_\infty) \int_0^t e^{-(t-\tau)} f_0 d\tau + \\ N_{F0} f^3 - N_{F0} f_0^2 f - \\ (N_{F0} - N_{F\infty}) f \int_0^t e^{-(t-\tau)} f^2 d\tau + \\ (N_{F0} - N_{F\infty}) f \int_0^t e^{-(t-\tau)} f_0^2 d\tau = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

为了简便, 其中  $\bar{t}$  和  $\bar{\tau}$  省去了顶标“-”, 后面的公式均作此处理.

进一步化为

$$\begin{aligned} N_{F0} f^3 - (N_{F0} - N_{F\infty}) e^{-t} f \int_0^t e^\tau f^2 d\tau + \\ (N_0 - N_x) f - (N_0 - N_\infty) e^{-t} \int_0^t e^\tau f d\tau - \\ N_{F0} f_0^2 f + (N_{F0} - N_{F\infty}) f_0^2 (1.0 - e^{-t}) f - \\ N_0 f_0 + (N_0 - N_\infty) f_0 (1.0 - e^{-t}) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

若在式 (18) 中略去非线性项可得小挠度理论下的方程

$$\left[ \frac{h^3}{12} Y(0) L_1 (1 - R^*) - N_x \right] (f - f_0) = N_x f_0 \quad (24)$$

设

$$f' = f - f_0 \quad (25)$$

则式 (24) 化为

$$\left[ \frac{h^3}{12} Y(0) L_1 (1 - R^*) - N_x \right] f' = N_x f_0 \quad (26)$$

式中  $L_1$  的表达式见式 (16).

## 2 求解方法

通过以上分析可知,求解式(23)和(26)可分别得到几何非线性情况和几何线性情况下挠度随时间扩展的解,以下分别介绍式(23)和(26)的求解过程.

### 2.1 几何非线性情况

在式(23)中令  $t = 0$ , 得

$$f^3 + \left( \frac{N_0 - N_x}{N_{F0}} - f_0^2 \right) f - \frac{N_0}{N_{F0}} f_0 = 0 \quad (27)$$

求解式(27)可得板在零时刻的响应.

当  $t > 0$  时, 使用牛顿-科捷斯二次公式(梯形公式)计算记忆积分表达式, 可将式(23)化为非线性代数方程.

即当  $t = \Delta t$  (其中  $\Delta t$  为时间增量) 时, 式(23)可写为

$$A' f^3 + B' f + C' = 0 \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} A' &= N_{F0} - (N_{F0} - N_{F\infty})(\Delta t/2) \\ B' &= N_0 - N_x - (N_0 - N_{\infty})(\Delta t/2) - \\ & N_{F0} f_0^2 + (N_{F0} - N_{F\infty}) f_0^2 (1 - e^{-\Delta t}) - \\ & (\Delta t/2)(N_{F0} - N_{F\infty}) e^{-\Delta t} f^2(0) \\ C' &= -N_0 f_0 + (N_0 - N_{\infty}) f_0 (1 - e^{-\Delta t}) - \\ & (\Delta t/2)(N_0 - N_{\infty}) e^{-\Delta t} f(0) \end{aligned}$$

求解式(28)便得到板在  $t = \Delta t$  时的响应.

当  $t = k\Delta t$  ( $k$  为大于 1 的整数) 时, 式(23)可写为

$$A'' f^3 + B'' f + C'' = 0 \quad (29)$$

其中

$$\begin{aligned} A'' &= N_{F0} - (N_{F0} - N_{F\infty})(\Delta t/2) \\ B'' &= N_0 - N_x - (N_0 - N_{\infty})(\Delta t/2) - \\ & N_{F0} f_0^2 + (N_{F0} - N_{F\infty}) f_0^2 (1 - e^{-t}) - \\ & (\Delta t/2)(N_{F0} - N_{F\infty}) e^{-\Delta t} f_{k-1}^2 - \\ & (N_{F0} - N_{F\infty}) e^{-t} JFB \\ C'' &= -N_0 f_0 + (N_0 - N_{\infty}) f_0 (1 - e^{-t}) - \\ & (\Delta t/2)(N_0 - N_{\infty}) e^{-\Delta t} f_{k-1} - \\ & (\Delta t/2)(N_0 - N_{\infty}) e^{-t} JFB \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} f_k &= f|_{t=k\Delta t} \\ JFB &= \sum_{i=2}^k (\Delta t/2) [e^{(i-2)\Delta t} f_{i-2}^2 + e^{(i-1)\Delta t} f_{i-1}^2] \end{aligned}$$

求解式(29)可得板在  $t = k\Delta t$  ( $k$  为大于 1 的整数) 时的响应.

### 2.2 几何线性情况

将微分算子  $L_2 = 1 + \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt}$  作用于式(26)得

$$\frac{1}{\alpha} (N_0 - N_x) \dot{f}'(t) + (N_{\infty} - N_x) f'(t) = N_x f_0 \quad (30)$$

在式(26)中令  $t = 0$  易解得

$$f'(0) = \frac{N_x f_0}{N_0 - N_x} \quad (31)$$

由式(31)可知当  $N_x \geq N_0$  时, 板在零时刻发生瞬时失稳. 因此称  $N_0$  是瞬时临界载荷, 它与相应的弹性板(其弹性模量等于黏弹性板的瞬时弹性模量)的失稳临界载荷相同, 其表达式见式(20).

由式(30)和式(31), 可解出

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{N_x f_0}{N_{\infty} - N_x} - \left( \frac{N_x f_0}{N_{\infty} - N_x} - \frac{N_x f_0}{N_0 - N_x} \right) \cdot \\ & e^{-\frac{\alpha(N_{\infty} - N_x)t}{N_0 - N_x}} \end{aligned} \quad (32)$$

将上式对  $t$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{f}'(t) &= \left( \frac{N_x f_0}{N_{\infty} - N_x} - \frac{N_x f_0}{N_0 - N_x} \right) \frac{\alpha(N_{\infty} - N_x)}{N_0 - N_x} \cdot \\ & e^{-\frac{\alpha(N_{\infty} - N_x)t}{N_0 - N_x}} \end{aligned} \quad (33)$$

即, 对于几何线性情况可求得挠度随时间变化的解析式(32).

## 3 算例和讨论

此部分将利用前面的讨论来分析一个算例, 考虑有初始小挠度的四边简支黏弹性薄板单向受压情况(图1). 取各向同性黏弹性环氧树脂的松弛模量为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} Y(t) &= A + B e^{-\alpha t} = 5.5170192 \times 10^8 + \\ & 1.24132932 \times 10^9 \cdot e^{-0.4115 \times 10^{-3} t} \text{ Pa} \\ & (0 \leq t \leq 2000 \text{ h}) \end{aligned}$$

其中时间的单位是 min, 泊松比  $\mu = 0.365$ , 并取板长  $a = 0.1\text{ m}$ ,  $a/b = 1$ ,  $b/h = 50$ .

设  $w_0(x, y) = f_{0mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ ,  $f_{0mn} = 0.1h$ . 此处假设初始挠度所对应的波形与结构的失稳波形相同. 则由式 (16), 式 (20) 及文献 [18] 得, 当  $m = 1, n = 1$  时,  $N_0$  和  $N_\infty$  取最小值, 即

$$N_0 = 5444.4\text{ N/m}$$

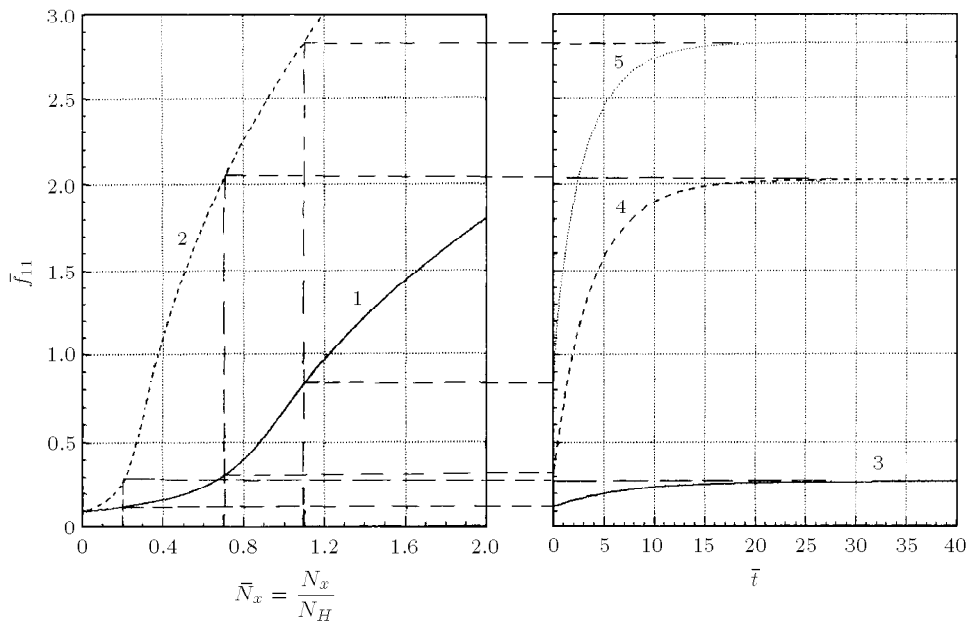
$$N_\infty = \frac{Y(\infty)}{Y(0)} N_0 = 0.3077 N_0 = 1675.2\text{ N/m}$$

(1) 黏弹性薄板的大挠度蠕变屈曲 (几何非线性情况)

在图 2(a) 中, 曲线 1 是由式 (27) 解得的挠度 - 载荷曲线; 曲线 2 是在式 (27) 中用  $N_\infty$  代替  $N_0$ , 用  $N_{F\infty}$  代替  $N_{F0}$  后, 再求解所得方程而得到的挠度 - 载荷曲线.

求解式 (27)~ 式 (29) 可得板在不同载荷作用下挠度随时间变化的过程. 计算结果见图 2(b), 当  $N_x = 0.2N_0 < N_\infty$  时为曲线 3; 当  $N_\infty < N_x = 0.7N_0 < N_0$  时为曲线 4; 当  $N_x = 1.1N_0 > N_0$  时为曲线 5.

由图 2(b) 可知, 在不同载荷作用下, 当时间足够长时, 挠度趋于一个稳定的值, 并且这个稳定的值可从图 2(a) 中的曲线 2 反映出来.



(a) 挠度 - 载荷曲线图  
(a) Deflection-load curve

(b) 不同载荷作用下挠度 - 时间曲线图  
(b) Deflection-time curve at different load

图 2  
Fig.2

另外, 由图 2 可见, 若考虑几何非线性的影响, 则即使外载荷大于瞬时临界载荷, 板的挠度也并不一定趋于无穷大 (曲线 5).

(2) 黏弹性薄板的小挠度蠕变屈曲 (几何线性情况)

根据得出的挠度随时间变化的解析式 (32) 可作出图 3 中的曲线 2, 曲线 5 和曲线 6. 为了与几何非线性情况对比, 在图 3 中也绘出了从式 (27)~ 式 (29) 解出的几何非线性解: 曲线 1, 曲线 3, 曲线 4.

由式 (32) 和式 (33) 作以下分析:

(a) 当  $N_x < N_\infty$  时,  $f'(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0$ ,  $f(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{N_x f_0}{N_\infty - N_x}$ , 即挠度随时间增长而趋于一个有限的定值, 此种情况对应于图 3 中曲线 2.

(b) 当  $N_x = N_\infty$  时,  $f'(t) = \frac{\alpha N_\infty f_0}{N_0 - N_\infty} = \text{constant} > 0$ ,  $f(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ , 即挠度随时间变化的曲线为一直线, 并且挠度也会随时间扩展到无穷大, 此种情况对应于图 3 中曲线 5.

(c) 当  $N_\infty < N_x < N_0$  时,  $f'(t) > 0$ ,  $f(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$ , 挠度会随时间扩展到无穷大, 此种情况对应于图 3 中曲线 6.

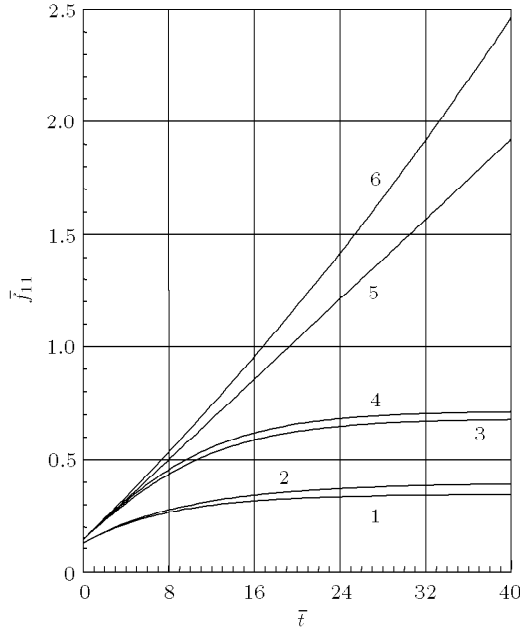


图 3 挠度随时间变化曲线图

- 1 为  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.23$ , 非线性结果; 2 为  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.23$ , 线性结果; 3 为  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{N_\infty}{N_0} = 0.3077$ , 非线性结果;
- 4 为  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.315$ , 非线性结果;
- 5 为  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{N_\infty}{N_0} = 0.3077$ , 线性结果;
- 6 为  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.315$ , 线性结果.

Fig.3 The time behavior of a viscoelastic plates

- 1  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.23$ , nonlinear result; 2  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.23$ , linear result; 3  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{N_\infty}{N_0} = 0.3077$ , nonlinear result;
- 4  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.315$ , nonlinear result;
- 5  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = \frac{N_\infty}{N_0} = 0.3077$ , linear result;
- 6  $\bar{N}_x = \frac{N_x}{N_0} = 0.315$ , linear-result.

由于  $N_\infty$  具有以上所述的物理意义, 因而将它称为黏弹性板的持久临界载荷. 它的表达式见式 (20).

### 4 结 论

黏弹性薄板受轴压屈曲的过程不同于弹性板, 即不仅存在瞬时失稳临界载荷  $N_0$ , 还存在持久临界载荷  $N_\infty$ . 瞬时失稳临界载荷与相应的弹性板 (其弹性模量等于黏弹性板的瞬时弹性模量) 的失稳临界载荷相同. 并且, 若在瞬时失稳临界载荷  $N_0$  的表达式中用持久模量  $Y(\infty)$  代替瞬时弹性模量  $Y(0)$  后就得到持久临界载荷的表达式 (从式 (20) 易得此结论). 然而, 当分别利用几何线性和几何非线性理论进行研究时, 将得到不尽相同的结果, 具体如下:

- (1) 对于黏弹性板的小挠度蠕变屈曲 (几何线性

情况):

(a) 当外载  $N_x < N_\infty$  时, 挠度随时间增长而趋于一个有限的定值 (图 3 中的曲线 2);

(b) 当  $N_\infty < N_x < N_0$  时, 挠度会随时间扩展到无穷大 (图 3 中的曲线 6). 特别地, 当  $N_x = N_\infty$  时, 挠度随时间变化的曲线为一直线, 并且挠度也会随时间扩展到无穷大 (图 3 中的曲线 5).

(c) 当外载  $N_x > N_0$  时, 黏弹性板发生瞬时弹性失稳.

所以, 在这种情况下, 不能只按弹性稳定理论确定黏弹性板的临界载荷, 否则板虽不发生瞬时失稳, 但却可能在受载一段时间后, 发生蠕变屈曲而破坏.

(2) 对于黏弹性板的大挠度蠕变屈曲 (几何非线性情况):

(a) 在大挠度蠕变屈曲分析中, 由于考虑了横向挠度对中面应力的影响, 计算所得板的挠度小于在小挠度理论下分析得到的结果 (对比图 3 中的曲线 1 与曲线 2; 曲线 3 与曲线 5; 曲线 4 与曲线 6).

(b) 在非线性分析中, 由于考虑了横向挠度对中面应力的影响, 使得即便当  $N_x \geq N_\infty$  时, 板的挠度也并不一定趋向无穷大 (见图 2(b) 以及图 3 中的曲线 3 与曲线 4), 而只是随时间趋于一个定值, 这个值等于在弹性控制方程 (27) 中用持久模量  $Y(\infty)$  代替瞬时弹性模量  $Y(0)$  (即用  $N_\infty$  代替  $N_0$ , 用  $N_{F\infty}$  代替  $N_{F0}$ ) 后, 再求解所得方程而得到的挠度值.

综上所述, 板在蠕变条件下, 即使载荷小于瞬时失稳临界载荷, 挠度也可能会随时间增长而达到较大的数值, 从而影响结构的正常工作, 在这种情况下应考虑几何非线性的影响. 本文得到了板的挠度随时间的变化过程, 为工程设计提供了参考依据.

### 参 考 文 献

- 1 Wilson DW, Vinson JR. Viscoelastic analysis of laminated plate buckling. *AIAA J*, 1984, 22(7-12): 982~988
- 2 Troyanovskii IE. On stability of thin viscoelastic plates. *Mathematics and Mechanics*, 1970, 6: 67~72 (in Russian)
- 3 马麦斯捷尔 AK 等. 聚合物与复合材料力学. 刘统畏等译. 北京: 新时代出版社, 1988 (Malmeister AK, Tamuzh VP, Teters GA. The Resistance of Polymers and Composite Materials. Liu Tongwei, et al. Trans. Beijing: New Times Press, 1988 (in Chinese))
- 4 Cederbaum G, Aboudi J. Micro-to-macro analysis of viscoelastic laminated plates. In: Marshall IH ed. *Composite Structures*, Vol 5. London: Elsevier, 1989. 779~793

- 5 王颖坚, 王震鸣. 正交铺设层合圆柱曲板的蠕变失稳. 应用数学和力学, 1993, 14(4): 295~300 (Wang Yingjian, Wang Zhenming. Creep buckling of cross-ply symmetric laminated cylindrical panels. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1993, 14(4): 295~300 (in Chinese))
- 6 孙远翔, 马和中, 高镇同. 黏弹性板的蠕变屈曲研究. 北京航空航天大学学报, 1997, 23(2): 187~193(Sun Yuanxiang, Ma Hezhong, Gao Zhentong. On the creep buckling of viscoelastic plates. *Journal Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1997, 23(2): 187~193 (in Chinese))
- 7 彭凡, 傅衣铭. 黏弹性结构蠕变屈曲特性的分析. 力学学报, 2003, 35(3): 353~356 (Peng Fan, Fu Yiming. Characteristics of creep buckling for viscoelastic laminated plates. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 35(3): 353~356 (in Chinese))
- 8 杨挺青, 张晓春, 刚芹果. 黏弹性薄板蠕变屈曲的载荷 - 时间特性研究. 力学学报, 2000, 32(3): 319~325 (Yang Tingqing, Zhang Xiaochun, Gang Qinguo. Temporal characteristics of loading for creep buckling of plates. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(3): 319~325 (in Chinese))
- 9 Brilla J. Stability Problems in Mathematical Theory of Viscoelasticity. In: Fabera J ed. Equadiff IV, Proceedings, Prague, August 22-26, 1977 Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1979. 46~53
- 10 Brilla I. Bifurcation theory of the time-dependent von Karman equations. *Aplikace Matematiky*, 1984, 29: 3~13
- 11 David Touati, Gabriel Cederbaum. Postbuckling of nonlinear viscoelastic imperfect laminated plates Part II: structural analysis. *Composite Structures*, 1998, 42: 43~51
- 12 Fan Xiaojun, Cheng Changjun. Buckling and postbuckling analysis of viscoelastic nonlinear annular plates with initial imperfections. In: The Fourth International Conference on Nonlinear Mechanics (ICNM-IV), Shanghai, Aug. 2002. 425~428
- 13 Badalov FB, Fshmatov Kh, Akbarov UI. Stability of a viscoelastic plate under dynamic loading. *Soviet Applied Mechanics*, 1991, 27(9): 892~899
- 14 Schapery RA. Viscoelastic behavior and analysis of composite materials. In: Sendekyj GP, ed. Composite Materials 2, New York: Academic Press, 1974
- 15 Vol'mir AS. Nonlinear Dynamics of Plates and Shells. Moscow: Nauka, 1972 (in Russian)
- 16 Minahen TM, Knauss WG. Creep buckling of viscoelastic structures. *Int J Solids Structures*, 1993, 30(8): 1075~1092
- 17 Chandiramani NK, Librescu L, Aboudi J. The theory of orthotropic viscoelastic shear deformable composite flat panels and their dynamic stability. *Int J Solids Structures*, 1989, 25(5): 465~482
- 18 Timoshenko SP, Gere JM. Theory of Elastic Stability. New York: McGraw-Hill, 1961: 351~356

## CREEP BUCKLING OF VISCOELASTIC PLATES WITH GEOMETRICAL NONLINEARITY<sup>1)</sup>

Sun Yuanxiang<sup>2)</sup> Ning Jianguo Liu Jing

(State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract** The creep buckling behavior of viscoelastic plates with initial deflections, subjected to axial compressive force, is analyzed. The von Karman nonlinear geometry equations are introduced in the thesis and standard linear solid model is employed. In order to change the nonlinear integral equations to a nonlinear algebraic equation which can be solved by using a standard subroutine, the trapezium method is used to calculate the hereditary integral expression, then the creep deformation of viscoelastic plate is obtained. Meanwhile, the instantaneous critical loads, durable critical loads are obtained. On the other hand, the problem of creep buckling is analyzed by using the linear geometric theory, an analytical solution of deflection varying with time is obtained. The influence of geometry nonlinearity on the creep buckling of viscoelastic plates is studied.

**Key words** viscoelastic plates, creep buckling, geometrical nonlinearity, the instantaneous critical load, the durable critical load

---

Received 19 April 2004, revised 28 July 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10102002)

2) E-mail: syx1@bit.edu.cn