

相变传热问题的灵敏度分析与优化设计方法¹⁾

顾元宪 周业涛 赵国忠²⁾

(大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 研究了相变传热问题的优化设计及其灵敏度分析方法. 在有限元-时间差分法和等效热容法求解相变温度场的基础上, 提出了相变温度场对设计变量一阶灵敏度的计算方法, 给出直接法和伴随法两种计算格式并分析了它们的特点, 建立了相变温度场优化的模型和算法, 在有限元分析与优化设计软件 JIFEX 中实现了该方法. 数值算例表明了灵敏度计算的精度和优化方法的有效性.

关键词 相变, 传热, 等效热容, 灵敏度, 优化设计

中图分类号: TK124 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2006)01-0066-07

引 言

相变传热问题广泛存在于科技和工业的各个领域, 如工业加工、材料制备、环境工程、能源工程、生物工程等. 在相变传热的数值分析方法研究基础上, 相变传热问题的优化设计具有重要的研究和应用价值, 而且与相变过程的控制等问题密切相关. 在相变热传导分析^[1]与结构优化^[2]的研究中已经提出了许多有效的方法, 将两方面研究结合起来, 研究解决工程中相变传热的优化设计问题, 是一个有意义的研究方向^[3].

热传导的灵敏度分析反映的是温度场对设计变量的导数信息, 相关的算法研究是本文的工作基础. Haftka^[4]基于热传导离散模型(如有限元方程)推导出热传导问题的灵敏度方程, 给出了直接法和伴随法两种求解列式, 探讨了用时间差分法求解瞬态灵敏度问题, 该文的研究适用于线性和非线性情况. Tortorelli 等^[5]基于连续模型和伴随法推导出瞬态热传导的灵敏度方程, 给出了有限元列式和时间差分求解算法. Dems 和 Rousselet^[6,7]分别研究由不同材料构成的结构在瞬态热传导过程中的外边界和内部界面可变情况的灵敏度分析方法. 上述研究是针对结构热传导问题, 非线性因素涉及材料非线性和辐射边界条件. 在相变热传导数值分析中进行灵敏度分析方面, 有 Cholewa 等^[8]采用边界元方法的工作, 其中灵敏度分析的目的在于数值求解中

确定相变交界面.

本文研究了相变传热问题的优化设计和灵敏度分析方法. 在相变热传导分析的有限元和等效热容法的基础上, 提出了相变温度场的设计灵敏度的数值计算方法. 在凝固过程的温度场优化设计中, 以相变温度场的最高温度极小化作为目标, 以温度场分布为约束条件, 通过优化设计加快凝固过程, 同时保持温度场均匀变化. 在有限元分析与优化设计软件 JIFEX 中实现了本文的方法. 本文方法对于相变传热过程的控制也是一种有效的研究途径.

1 相变传热问题的控制方程和有限元求解方法

在单一金属凝固过程中相变温度为一确定值, 忽略对流项和辐射项, 考虑相变的热传导方程为

$$\text{固相 } \nabla \cdot (k_s \nabla T) = \rho_s c_s (\partial T / \partial t) \quad (1)$$

$$\text{液相 } \nabla \cdot (k_l \nabla T) = \rho_l c_l (\partial T / \partial t) \quad (2)$$

$$\text{界面 } T_l = T_s = T_f \quad (3)$$

$$k_s \frac{\partial T}{\partial n_f} - k_l \frac{\partial T}{\partial n_f} = \rho_s L \frac{dR_f(t)}{dt} \quad (4)$$

其中, 下标 s, l 分别表示固相和液相, T_m 为凝固温度, L 为相变潜热, $R_f(t)$ 为相变界面位置.

为了适用于多维问题计算以及相变温度为一区

2004-04-05 收到第 1 稿, 2005-04-11 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金(10032030, 10421002)和辽宁省博士科研启动基金(20021063)资助项目.

2) E-mail: zhaogz@dlut.edu.cn

间的情况，引入焓 H 和熵 S 两个物理量

$$H = \int_{T_f}^T c_p dT \quad (5)$$

$$S = \int_{T_f}^T k dT \quad (6)$$

在整个区域采用统一的能量方程，式 (1) 和 (2) 可写成一个焓形式的方程

$$\nabla \cdot (k^* \nabla T) = \partial H / \partial t \quad (7)$$

在金属凝固中，焓仅是温度的函数，因此式 (7) 可为

$$\nabla \cdot (k^* \nabla T) = (dH/dT)(\partial T/\partial t) = c^*(\partial T/\partial t) \quad (8)$$

其中， c^* 和 k^* 分别定义为等效热容和等效导热系数

$$c^* = dH/dT \quad (9)$$

$$k^* = dS/dT \quad (10)$$

利用加权余量法，可导出相变传热温度场的有限元列式 [3,9]

$$M\dot{T} + KT = R \quad (11)$$

其中， M 为热容阵， K 为热传导阵； T 为节点温度向量， R 为等效右端项。

本文采用 θ 差分法求解方程式 (11)，差分格式为

$$\bar{K}T_{t+\Delta t} = \bar{R}_{t+\Delta t} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K} &= \theta K + \frac{1}{\Delta t} M \\ \bar{R}_{t+\Delta t} &= \left[-(1-\theta)K + \frac{1}{\Delta t} M \right] T_k + \\ &\quad (1-\theta)R_k + \theta R_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中 $0 \leq \theta \leq 1$ 。在相变单元的热传导阵和热容阵中，单元的焓和熵采用温度插值的形函数计算。

求出每个时间步的温度分布后，可以判定单元的相变状态、确定相变界面位置。单元相变状态的判断采用了下面的热焓判据：

对于单一物质

$$\left. \begin{aligned} H^e &\leq 0, \text{ 无相变发生 (固相)} \\ 0 &< H^e < L, \text{ 发生相变} \\ H^e &\geq L, \text{ 无相变发生 (液相)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

对于合金

$$\left. \begin{aligned} H^e &\leq 0, \text{ 无相变发生 (固相)} \\ 0 &< H^e < c_1(T_1 - T_s) + L, \\ &\text{发生相变} \\ H^e &\geq c_1(T_1 - T_s) + L, \\ &\text{无相变发生 (液相)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

假设在合金的相变温度区间内潜热是线性逐步释放的，热焓由下式计算

$$H = \begin{cases} c_s(T - T_s), & T < T_s \\ c_m(T - T_s) + \frac{T - T_s}{T_1 - T_s} L, & T_s \leq T \leq T_1 \\ c_l(T - T_s) + L, & T > T_1 \end{cases} \quad (16)$$

其中， $c_m = \frac{T - T_s}{T_1 - T_s} c_l + \frac{T_1 - T}{T_1 - T_s} c_s$ 。

在单一相变温度或相变温度区间很小时，由于焓在相变温度处的不连续性会造成由式 (9) 计算等效热容的数值奇异性。为解决这个问题，对相变单元的等效热容和等效导热系数的计算公式 (9), (10) 用下面的近似公式 [4] 替代

$$c^* = \frac{dH}{dT} = \left[\frac{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (17)$$

$$k^* = \frac{dS}{dT} = \left[\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2} \right]^{1/2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} H_i, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} H_i$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} S_i, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} S_i$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \sum_1^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i$$

其中， $\{N_i\}$ 为单元的形函数矩阵， H_i 为节点的热焓值， S_i 为节点的熵值， T_i 为节点的温度值。

单元的相变状态确定后，就可以计算相变界面的位置。假设单元内的温度值线性变化，对于相变单元的任一边 $T_i T_j$ ，若 $(T_i - T_f)(T_j - T_f) < 0$ ，则 T_i, T_j 之间存在相变点，其坐标为

$$\left. \begin{aligned} x_f &= (f \cdot x_j + x_i)/(1 + f) \\ y_f &= (f \cdot y_j + y_i)/(1 + f) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

式中, $f = (T_f - T_i)/(T_j - T_f)$.

2 相变传热问题的灵敏度分析方法

为了表述简单,在以下的计算公式中只针对一个设计变量,对于多个设计变量只需用下标表示即可.设目标或约束函数是温度和设计变量的函数,记为如下一般的积分形式

$$g(x, \mathbf{T}) = \int_0^{t_f} p(x, \mathbf{T}, t) dt \quad (20)$$

将上式对设计变量求一阶导数,得到

$$\frac{dg}{dx} = \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{T}} \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right) dt \quad (21)$$

上式就是目标/约束函数 $g(x, \mathbf{T})$ 的一阶灵敏度,其中主要困难是计算温度向量的导数 $d\mathbf{T}/dx$,其它各项一般可以显式地计算.式(21)的计算有直接法和伴随法两种方法^[5].

2.1 直接法

将式(11)对设计变量求导,得到温度向量的灵敏度方程

$$\mathbf{M}(\mathbf{T}) \frac{d\dot{\mathbf{T}}}{dx} + \mathbf{K}(\mathbf{T}) \frac{d\mathbf{T}}{dx} = \frac{d\mathbf{R}}{dx} - \frac{d\mathbf{M}(\mathbf{T})}{dx} \dot{\mathbf{T}} - \frac{d\mathbf{K}(\mathbf{T})}{dx} \mathbf{T} \quad (22)$$

求解上式得到各时刻温度向量的灵敏度 $d\mathbf{T}/dx$,代入式(21)就得到目标或约束函数对设计变量的灵敏度 dg/dx .式(22)为非线性常微分方程组,仍采用 θ 差分法求解,差分格式为

$$\bar{\mathbf{K}}(\mathbf{T}) \frac{d\mathbf{T}}{dx} \Big|_{k+1} = \frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dx} \Big|_{k+1} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{R}}}{dx} \Big|_{k+1} = & \left[-(1-\theta) \frac{d\mathbf{K}}{dx} + \frac{1}{\Delta t} \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right] \mathbf{T}_k + \\ & \left[-(1-\theta) \mathbf{K} + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{M} \right] \frac{d\mathbf{T}}{dx} \Big|_k + \\ & (1-\theta) \frac{d\mathbf{R}}{dx} \Big|_k + \theta \frac{d\mathbf{R}}{dx} \Big|_{k+1} - \\ & \left[\theta \frac{d\mathbf{K}}{dx} + \frac{1}{\Delta t} \frac{d\mathbf{M}}{dx} \right] \mathbf{T}_{k+1} \end{aligned} \quad (24)$$

式(23)的初始条件为 $\frac{d\mathbf{T}}{dx} \Big|_{t=0} = 0$. $\bar{\mathbf{K}}$ 如式(13), $0 \leq \theta \leq 1$.

在每一个时间点,温度场分析与灵敏度计算同时进行.首先求解热传导方程得到温度向量 \mathbf{T}_{k+1} ,然后将其代入式(23),回代求解就得到温度向量 \mathbf{T}_{k+1} 对设计变量的导数.

2.2 伴随法

引入伴随向量 \mathbf{A} ,并将式(22)乘 $(-\mathbf{A}^T)$ 后加到式(21)中并积分,有

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} = & \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{T}} \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right) dt - \\ & \int_0^{t_f} \mathbf{A}^T \left(\mathbf{M} \frac{d\dot{\mathbf{T}}}{dx} + \mathbf{K} \frac{d\mathbf{T}}{dx} - \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} \frac{d\mathbf{T}}{dx} + \right. \\ & \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}} \frac{d\mathbf{T}}{dx} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{T} \frac{d\mathbf{T}}{dx} \right) dt \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x} \mathbf{T} \quad (26)$$

令伴随向量满足条件

$$\mathbf{A}(t_f) = 0 \quad (27)$$

考虑分部积分

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \mathbf{A}_h^T \mathbf{M} \frac{d\dot{\mathbf{T}}}{dx} dt = & \mathbf{A}_h^T \mathbf{M} \frac{d\dot{\mathbf{T}}}{dx} \Big|_{t=0}^{t=t_f} - \\ & \int_0^{t_f} \left(\dot{\mathbf{A}}_h^T \mathbf{M} + \mathbf{A}_h^T \dot{\mathbf{M}} \right) \frac{d\mathbf{T}}{dx} dt \end{aligned} \quad (28)$$

利用初始条件 $\frac{d\mathbf{T}}{dx} \Big|_{t=0} = 0$ 和式(27)的条件,式(28)右端第1项为零.注意在相变热传导问题中, $\dot{\mathbf{M}} \neq 0$.将式(28)代入式(25),整理后得到

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} = & \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{A}^T \mathbf{F} \right) dt + \\ & \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{T}} + \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{M} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} \right) \frac{d\mathbf{T}}{dx} dt \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$\mathbf{P} = \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{T}} - \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{T}} \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{T}} \mathbf{T} \quad (30)$$

令式(29)右端第2项为零,则有相变传热灵敏度分析的伴随方程

$$-\mathbf{M} \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{P} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{T}} \right)^T \quad (31)$$

由伴随方程求解出伴随向量 \mathbf{A} 后,目标或约束函数的灵敏度计算公式(21)就简化为

$$\frac{dg}{dx} = \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{A}^T \mathbf{F} \right) dt \quad (32)$$

伴随方程的求解,结合终点时刻条件式(27),采用反向时程积分方法.经过变换后该式与式(11)

是同类型的常微分方程，可利用式 (11) 求解中的计算结果。由于非线性因素，其伴随方程仍为非线性常微分方程组。

比较灵敏度分析的直接法和伴随法。在直接法中，式 (22) 需要对每一个设计变量求解。在伴随法中，不必计算温度向量的灵敏度 dT/dx ，而是对每一个约束求解伴随方程式 (31) 得到伴随向量 Λ 。两者计算效率的差异取决于设计变量和约束函数的个数，当设计变量多于约束个数时，伴随法的计算效率高；反之，直接法的计算效率高。由于温度向量灵敏度方程的差分格式 (23) 式与温度场求解的差分方程式 (12) 结构完全相同，可以利用有限元求解程序，所以直接法比较简单。

在求解灵敏度方程或伴随方程中，另一项重要工作是计算各项矩阵的导数： dR/dx 、 dK/dx 和 dM/dx 。在相变热传导问题中，上述各项矩阵都与温度有关，其导数的解析计算比较困难。半解析法是一种比较简单的方法，即在单元一级采用局部差分法计算上述各项矩阵的导数，并在设计变量差分扰动后对温度进行线性近似。以单元热传导矩阵为例，其导数矩阵的差分近似计算公式为

$$\frac{dK^e}{dx} \approx \frac{K^e\left(x + \Delta x, T + \frac{dT}{dx}\Delta x\right) - K^e(x, T)}{\Delta x} \quad (33)$$

3 相变传热问题的优化设计

本文提出的相变温度场灵敏度分析方法，在有限元分析与优化设计软件 JIFEX^[10] 中实现，进而建立了相变传热问题的优化设计模型。其中，目标函数是极小化温度场的节点温度，约束条件是温度场分布均匀。设计变量可以是结构的边界形状控制参数、单元截面尺寸、材料物性参数、热边界条件等。由于 JIFEX 中已经具备了结构重量、应力、变形、

屈曲、频率、动力响应的优化功能，因此，可以建立和处理包括相变温度场与这些力学响应量的多种设计准则的优化设计模型。

优化设计问题的一般化数学表达形式如下

$$\left. \begin{aligned} &\text{find } x_i (i = 1, 2, \dots, n) \\ &\min f(x) \\ &\text{s.t. } g_j(x) \leq 0, \quad j = (1, 2, \dots, m) \\ &\quad x_{iL} \leq x_i \leq x_{iU}, \quad i = (1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

其中， $g_j(x)$ 为约束函数， $f(x)$ 为目标函数， x 为设计变量的向量表示。 x_{iL} 和 x_{iU} 为设计变量 x_i 的下界值和上界值。该优化模型可以根据具体问题而构造出相应的设计方案。如本文中将以相变温度场的最高温度极小化作为目标，以温度场分布为约束条件，通过优化设计加快凝固过程、同时保持温度场均匀变化。

利用 JIFEX 的优化求解算法——序列线性规划和序列二次规划算法，求解相变传热优化问题。在序列近似规划的迭代算法中，采用近似一维搜索、自适应运动极限、可行设计调整等数值技术，提高了算法的收敛性和稳定性。在 JIFEX 系统中，还可以同时考虑结构的力学响应，如应力和变形等其他力学响应量即其一阶导数，进行多学科耦合的优化设计。

4 数值算例

算例 1 平板凝固问题的温度灵敏度计算。如图 1 所示二维平板，有关的热物性参数为： $k_s = 2.22 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ ； $k_l = 0.556 \text{ W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$ ； $c_s = 1.762 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ ； $c_l = 4.226 \text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ ； $\rho_s = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ； $\rho_l = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ ； $L = 338 \text{ kJ}/\text{kg}$ ； $T_m = 273 \text{ K}$ ；相变温度区间 $2\Delta T = 0.5 \text{ K}$ 。初始温度场均匀，

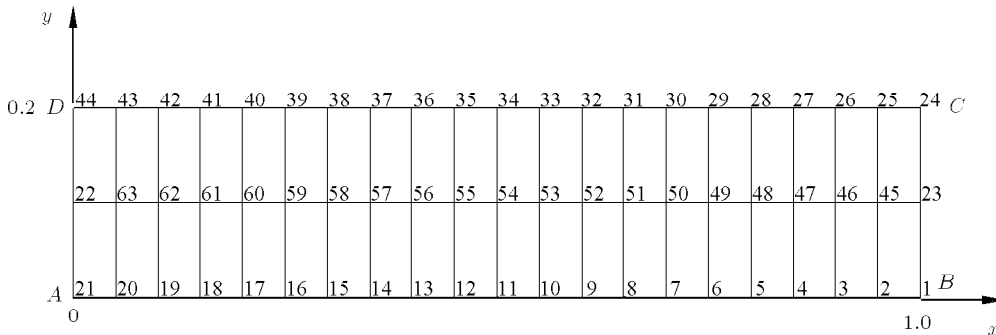


图 1 平板模型及有限元网格

Fig.1 Plate model and FE meshes

$T_0 = 283\text{K}$. 边界条件: AD 边温度保持恒定 $T_b = 253\text{K}$, 其它三边绝热. 形状设计变量为第 20 号节点的 y 坐标, 差分系数 $\theta = 0.5$, 时间步长为 20s .

表 1 给出第 63, 42, 20 三个节点的温度一阶灵敏度计算结果, 数据显示, 直接法灵敏度计算精度很好, 与差分法计算结果比较, 最大相对误差为 1%.

表 1 平板凝固问题的温度灵敏度

Table 1 The temperature sensitivity of plate problem

Time	Node 63			Node 42			Node 20		
	Difference	Direct	Error/%	Difference	Direct	Error/%	Difference	Direct	Error/%
20	0.110 8	0.110 2	0.541	2.43×10^{-5}	2.42×10^{-5}	0.412	-0.222 7	-0.220 5	0.997
40	0.221 2	0.220 2	0.452	9.70×10^{-5}	9.65×10^{-5}	0.515	-0.444 7	-0.440 2	1.011
60	0.331 4	0.329 7	0.513	2.18×10^{-4}	2.17×10^{-4}	0.459	-0.665 9	-0.659 3	0.991

算例 2 角域凝固问题的温度灵敏度计算. 如图 2 所示角形区域的凝固问题, x, y 轴的正方向是无限延伸的. 为了研究方便, 把无限区域简化为 $1.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ 的方形区域. 有关的热物性参数: $k_s = k_l = 1\text{W/m}\cdot\text{K}$, $\rho c_s = \rho c_l = 1\text{J}/(\text{m}^3\cdot\text{K})$. 相变温度为 $T_m = 273 \pm 0.01\text{K}$, $L = 0.25\text{J/kg}$, 初始温度场均匀 $T_0 = 273.3\text{K}$, 边界条件: CD 和 BC 边为绝热边界条件, AB, AD 边保持温度恒定为 272K . 设计变量为 21 号节点的 x 坐标 (形状设计变量). 差分系数 $\theta = 0.5$, 时间步长为 0.001s .

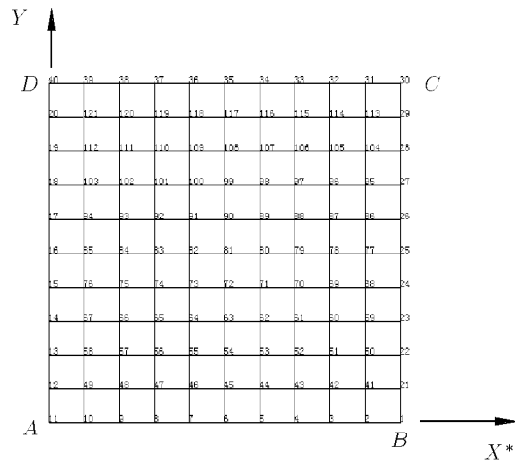


图 2 角形区域的凝固问题

Fig.2 Condensation problem of corner area

灵敏度计算的结果见表 2, 表中列出了 21,22,23 三个节点的直接法和差分法计算的温度一阶导数值. 该问题的灵敏度分析精度同样很高, 与差分法相比最大误差小于 0.8%.

表 2 角域凝固问题的温度灵敏度

Table 2 The temperature sensitivity of corner problem

Time	Node 21			Node 22			Node 23		
	Difference	Direct	Error/%	Difference	Direct	Error/%	Difference	Direct	Error/%
0.001	0.475 5	0.478 7	0.672	-0.034 4	-0.034 6	0.581	-0.000 28	-0.000 28	0
0.002	0.759 6	0.763 1	0.461	-0.121 2	-0.122 0	0.660	-0.001 55	-0.001 54	0.645
0.003	0.914 5	0.916 7	0.241	-0.234 0	-0.235 7	0.726	-0.004 53	-0.004 51	0.441

算例 3 飞轮铸造凝固过程的温度场优化. 对图 3 所示铝制飞轮铸造过程的相变温度场进行优化设计, 控制工艺参数, 达到缩短凝固时间、保持铸件均匀凝固的目的. 飞轮的截面几何尺寸如图 4 所示. 材料物性参数: 铝在 750°C 时注入沙模, 沙模温度 30°C . 模型顶面和侧面与沙模通过对流换热, 侧面换热系数为 $7.5\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, 顶面换热系数为 $5.75\text{W}/(\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. 铝的热传导率 $T_s = 249\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$, $T_l = 290\text{W}/(\text{m}\cdot^\circ\text{C})$. 熔化温度 (即相变温度) 为 $T_m = 696 \pm 1^\circ\text{C}$, 密度 $\rho = 2707\text{kg}/\text{m}^3$, 比热容 $c_s = 896\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, $c_l = 1050\text{J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, 相变潜热

$L = 3956440\text{J/kg}$. 其中下标 s,l 分别表示固态和液态. 因为铸造模型是轴对称的, 因此取其 $1/2$ 截面计算, 有限元网格如图 5.

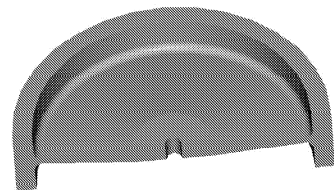


图 3 飞轮实体模型

Fig.3 Flywheel model

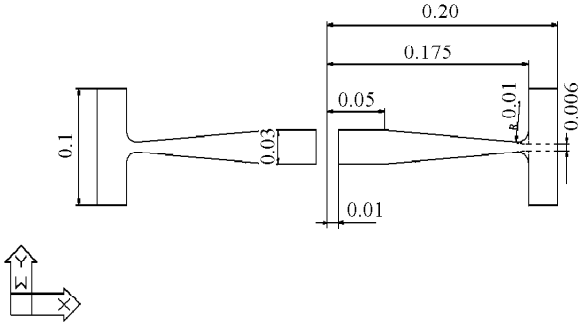


图 4 飞轮截面的几何尺寸

Fig.4 Geometry of the cross section of flywheel

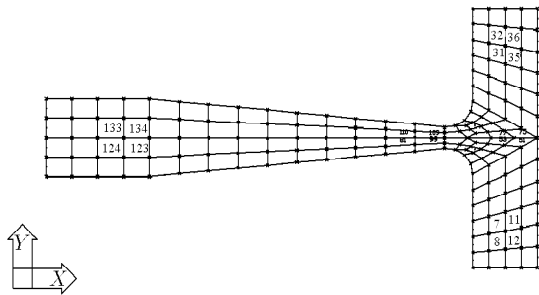


图 5 飞轮截面的有限元网格

Fig.5 FE meshes of the section of flywheel

优化模型：假设初始设计没有冷源（热汇），希望通过优化设计确定冷源的位置和大小，加快凝固，同时使得凝固过程中温度场尽可能地均匀。根据结构特点，选择有限元模型图 5 中标出的 20 个单元的热汇强度 Q_i 作为设计变量，通过优化这些热汇强度值来确定冷源的最佳位置。考察第 200s 时的温度场分布情况。初始设计的最大温度 720.8°C ，最低温度 716.9°C ，温度场分布见图 6。确定目标函数为最大温度不大于 697°C （为了加快凝固过程），约束条件为最低温度不小于 687°C （保证均匀凝固），热汇强度设计变量的上下限为 $[0, 30 \times 10^6 \text{ J/m}^2]$ 。优化模型表示为：求 Q_i 值

$$\begin{aligned} \min. \quad & T_{\max} \leq 697^\circ\text{C} \\ \text{s.t.} \quad & T_{\min} \geq 687^\circ, 0^\circ\text{C} \leq Q_i \leq 30 \times 10^6 \text{ J/m}^2 \end{aligned}$$

优化结果：有限元网格图 5 中最左边的第 123, 124, 133, 144 号 4 个单元和中间的第 81, 110 号两个单元的热汇强度为 $12 \times 10^6 \text{ J/m}^2$ ，其余 14 个设计变量的单元热汇为零。初始设计中，第 200s 时温度都在凝固温度以上，飞轮尚未开始凝固。优化设计后，第 200s 时最大温度 696.6°C ，最低温度 689.4°C ，温度场分布见图 7。所有温度都降到凝固温度以下，飞轮已经几乎全部凝固，在加快凝固速度的同时也

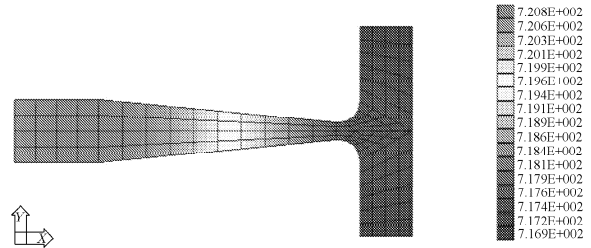


图 6 初始设计第 200s 时温度场云图
($T_{\max} = 720.8^\circ\text{C}$, $T_{\min} = 716.9^\circ\text{C}$)

Fig.6 Temperature distribution at 200s for the original design
($T_{\max} = 720.8^\circ\text{C}$, $T_{\min} = 716.9^\circ\text{C}$)

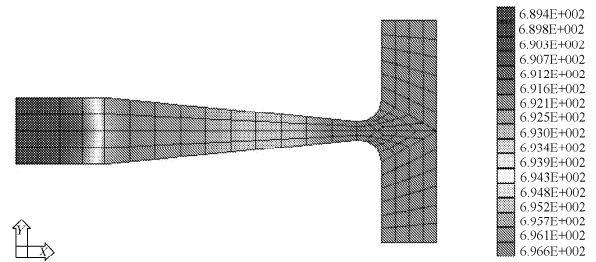


图 7 优化设计第 200s 时温度场云图
($T_{\max} = 696.6^\circ\text{C}$, $T_{\min} = 689.4^\circ\text{C}$)

Fig.7 Temperature distribution at 200s for the optimized design
($T_{\max} = 696.6^\circ\text{C}$, $T_{\min} = 689.4^\circ\text{C}$)

保证了凝固均匀。冷源的合理配置改善了凝固过程的温度场分布。

5 结 论

本文研究了相变传热问题的灵敏度分析与优化设计方法。分别采用直接法和伴随法推导了相变温度场的灵敏度方程，给出了基于有限元等效热容法的灵敏度数值计算方法，讨论了两种方法的优缺点，并给出了求解灵敏度方程的半解析法。数值算例表明，本文提出的相变传热灵敏度分析具有很高的计算精度。结合序列线性规划和序列二次规划算法，在大型有限元分析与优化设计软件 JIFEX 中实现了相变传热温度场的优化设计，对工艺设计和过程控制也是一种有效的研究途径。

参 考 文 献

- Ouyang T, Tamma KK. Finite element simulations involving simultaneous multiple interface fronts in phase change problem. *Int J Heat Mass Transfer*, 1996, 39: 1711~1718
- 程耿东. 工程结构优化设计基础. 水利电力出版社, 1984 (Cheng Gengdong. Basic Design Optimization of Structures in Engineering. Water and Power Press, 1984 (in Chinese))

- 3 Lewis RW, Manzari MT, Ransing RS, et al. Casting shape optimization via process modeling. *Materials and Design*, 2000, 21(4): 381~386
- 4 Haftka RT. Techniques for thermal sensitivity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, 17(1): 71~80
- 5 Tortorelli DA, Haber RB, Lu SCY. Design sensitivity analysis for nonlinear thermal systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 77: 61~77
- 6 Dems K, Rousselet B. Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body—Part I: external boundary modification. *Structural Optimization*, 1999, 17(1): 36~45
- 7 Dems K, Rousselet B. Sensitivity analysis for transient heat conduction in a solid body—Part II: interface modification. *Structural Optimization*, 1999, 17(1): 46~54
- 8 Cholewa R, Nowaka AJ, Wrobel LC. Application of BEM and sensitivity analysis to the solution of the governing diffusion—convection equation for a continuous casting process. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2004, 28: 389~403
- 9 李海梅, 顾元宪, 申长雨. 平面相变热传导问题等效热容法的有限元解. 大连理工大学学报, 2000, 40(1): 45~48 (Li Haimei, Gu Yuanxian, Shen Changyu. Finite element solution of heat transfer with planar phase change by equivalent heat capacity method. *Journal of Dalian University of Technology*, 2000, 40(1): 45~48 (in Chinese))
- 10 Gu YX, Zhang HW, Guan ZQ, et al. New generation software of structural analysis and design optimization-JIFEX. *Int J Struct Eng Mech*, 1999, 7(6): 589~599

SENSITIVITY ANALYSIS AND DESIGN OPTIMIZATION METHODS FOR PROBLEMS OF HEAT TRANSFER WITH PHASE CHANGE¹⁾

Gu Yuanxian Zhou Yetao Zhao Guozhong²⁾

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract The design optimization and sensitivity analysis methods for the problems of transient heat transfer with phase change have been researched in the paper. On the basis of phase-change temperature field solution with the finite element, time difference, and equivalent heat capacity methods, the numerical method to compute the first-order derivatives of temperature with respect to design variables is proposed. Two computational schemes of the direct method and the adjoint method have been given, and their characteristics have been discussed. The optimization model and algorithm are built for the transient temperature field with phase change. These methods have been implemented within the software JIFEX for finite element analysis and design optimization. The numerical results of example problems are given to illustrate the accuracy of sensitivity analysis and the effectiveness of design optimization.

Key words phase change, heat transfer, equivalent heat capacity, sensitivity, design optimization

Received 5 April 2004, revised 11 April 2005.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10032030, 10421002), the Doctor Science Foundation of Liaoning Province (20021063).

2) E-mail: zhaogz@dlut.edu.cn