特征值摄动法估计区间系统的最小 H_∞ 范数[1)]

吴志刚 高 强
(大连理工大学工程力学系，工业装备结构分析国家重点实验室，大连 116023)

摘要 系统的 H_∞ 范数表征其对外界干扰的抑制能力. 根据控制系统最小 H_∞ 范数与 Hamilton 微分系统两点边值问题一阶特征值之间的对应关系，利用微分方程特征值的摄动法估计由区间参数描述的不确定性系统的最小 H_∞ 范数.

关键词 H_∞ 范数，特征值摄动，不确定系统，区间参数， Hamilton 微分方程

引 言

在结构控制问题中，由于结构刚度、阻尼等参数的建模误差以及模型降阶的影响，用于控制系统设计的系统模型与真实结构之间总会存在一定程度的偏差. 为了确保系统运行的稳定性和预定的性能指标，需要在系统标称模型的基础上用不确定性模型描述这种误差的形式和程度，进而设计相应的鲁棒控制系统. 事实上，不确定性系统是鲁棒控制的主要研究对象[1]，存在不确定参数的系统属于结构化不确定性 (参数不确定性) 系统. 对参数不确定性的描述包括随机参数、模糊参数和区间参数等方法，本文研究由区间参数描述的结构化不确定性系统[2~4]的最小 H_∞ 范数计算问题，这是实际的 H_∞ 控制系统设计中需要首先解决的问题.

系统从干扰到输出的 H_∞ 范数表征系统对干扰的抑制能力[1]，确定性系统最小 H_∞ 范数的计算方法比较多，见文献 [5] 及其中的参考文献. 文献 [6] 和文献 [7] 分别根据连续和离散控制系统最小 H_∞ 范数与 Hamilton 微分和差分系统一阶特征值之间的对应关系，给出了连续和离散控制系统 H_∞ 范数的计算方法. 参数的不确定性将会影响系统的 H_∞ 范数，文献 [8] 给出了不确定性系统 H_∞ 范数的定义，但并没有给出可实用的计算方法. 针对由区间参数描述的不确定性系统的特点，本文给出了估计这类系统最小 H_∞ 范数的微分方程特征值摄动方法. 这一方法是文献 [6] 中确定性控制系统最小 H_∞ 范数计算方法的发展，其核心是区间参数 Hamilton 微分方程的特征值计算. 目前对区间矩阵特征值计算问题的研究比较多[9]，摄动法是估计区间矩阵特征值的方法之一[10]；但对区间微分方程特征值问题的研究则相对较少. 本文将利用 Hamilton 系统的特征值摄动方法[11]估计区间 Hamilton 系统的特征值，进而给出区间参数控制系统的最小 H_∞ 范数估计以用于指导系统设计.

1 参数不确定性控制系统的 H_∞ 范数

确定性系统的控制及其 H_∞ 范数的定义和计算见文献 [1,5~7]. 这里考虑下列参数不确定线性系统的 H_∞ 范数估计问题

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_u\boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_w\boldsymbol{w}, \quad \boldsymbol{x}(0) = 0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z} = [\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^{\rm T} \ \ \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}^{\rm T}]^{\rm T} \tag{2}$$

其中矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的元素存在不确定性. 用区间参数描述这一不确定性，矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 中的各元素属于给定的区间，并可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{A}} \in \mathcal{A} = \{\tilde{\boldsymbol{A}} \in \mathbf{R}^{n\times n} | \underline{a}_{ij} \le a_{ij} \le \bar{a}_{ij}, \quad i,j = 1,2,\cdots,n\} \tag{3}$$

根据区间矩阵的中心表示法[2,9]，区间矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 可表示成

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_0 + \Delta\boldsymbol{A}^I \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}_0 = (\bar{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{A}})/2$, $\Delta\boldsymbol{A}^I = [-1,1](\bar{\boldsymbol{A}} - \underline{\boldsymbol{A}})/2$, $\bar{\boldsymbol{A}} = [\bar{a}_{ij}]$ 和 $\underline{\boldsymbol{A}} = [\underline{a}_{ij}]$ 分别为区间矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的边界. 区间矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的所有取值满足 $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{B}_u)$, $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{B}_w)$ 可控， $(\tilde{\boldsymbol{A}}, \boldsymbol{C})$ 可观及系统 (1),(2) 的 H_∞ 控制问题有

2003–10–09 收到第 1 稿， 2004–06–28 收到修改稿.
1) 国家自然科学基金资助项目 (10202004).

解的条件. 显然, 区间参数系统的 H_∞ 范数与 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的取值范围有关. 另外, 式 (1), (2) 中的 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{R}^m$, $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^l$, $z\in\boldsymbol{R}^p$, $p\geq m$, $l\geq q$, $\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{I}$.

对于状态反馈, 系统 (1),(2) 的 H_∞ 范数定义如下 [8]: 使 $\tilde{\boldsymbol{A}}+\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{K}$ 渐近稳定的所有状态反馈控制 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ 的集合定义为 $\mathcal{U}$. 对于任意一个给定的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}\in\mathcal{A}$ 及 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$, 系统 (1),(2) 的 H_∞ 范数定义为

$$\tilde{\gamma}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{A}})=\sup_{\boldsymbol{w}}\frac{\|\boldsymbol{z}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}+|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})|_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}}}{\|\boldsymbol{w}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}} \tag{5}$$

式中 $\|\boldsymbol{z}\|^2_{[0,t_{\mathrm{f}}]}=\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}\mathrm{d}t$, $\|\boldsymbol{w}\|^2_{[0,t_{\mathrm{f}}]}=\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}\mathrm{d}t$, $|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})|^2_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_{\mathrm{f}})\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})$, $\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}$ 是对称正定阵. 进一步, 对于任意 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{U}$, 系统的 H_∞ 范数定义为

$$\tilde{\gamma}^{+}(\boldsymbol{u})=\sup_{\tilde{\boldsymbol{A}}}\tilde{\gamma}(\boldsymbol{u},\tilde{\boldsymbol{A}}) \tag{6}$$

最后, 不确定性系统 (1),(2) 的最小 H_∞ 范数定义为

$$\tilde{\gamma}_*=\inf_{\boldsymbol{u}}\tilde{\gamma}^{+}(\boldsymbol{u}) \tag{7}$$

直接由式 (5) 确定 $\tilde{\gamma}_*$ 相当困难 [8], 而利用下列不等式 (8) 获得 $\tilde{\gamma}_*$ 的下界则相对简单一些.

$$\inf_{\boldsymbol{u}}\sup_{\tilde{\boldsymbol{A}}}\sup_{\boldsymbol{w}}\frac{\|\boldsymbol{z}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}+|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})|_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}}}{\|\boldsymbol{w}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}}\geq \sup_{\tilde{\boldsymbol{A}}}\inf_{\boldsymbol{u}}\sup_{\boldsymbol{w}}\frac{\|\boldsymbol{z}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}+|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})|_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}}}{\|\boldsymbol{w}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}} \tag{8}$$

本文中估计 $\tilde{\gamma}_*$ 的下界所用的不等式 (8) 与文献 [8] 中的不等式不同. 考虑到确定性系统最小 H_∞ 范数的定义及计算方法 [6,7], 不等式 (8) 的右端意味着 $\tilde{\gamma}_*$ 的下界可以通过下列步骤获得: 首先对任意一个给定的矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}\in\mathcal{A}$, 通过选择恰当的反馈控制 $\boldsymbol{u}$ 获得闭环系统的最小 H_∞ 范数, 即确定 $\gamma(\tilde{\boldsymbol{A}})=\inf\limits_{\boldsymbol{u}}\sup\limits_{\boldsymbol{w}}(\|\boldsymbol{z}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}+|\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}})|_{\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}})/\|\boldsymbol{w}\|_{[0,t_{\mathrm{f}}]}$; 然后在所有可能的 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的取值中寻找 $\gamma(\tilde{\boldsymbol{A}})$ 的上界, 即确定 $\gamma_{\#}=\sup\limits_{\tilde{\boldsymbol{A}}}\gamma(\tilde{\boldsymbol{A}})$. 由式 (8) 可知 $\tilde{\gamma}_*\geq\gamma_{\#}$, 所以 $\gamma_{\#}$ 是最小 H_∞ 范数 $\tilde{\gamma}_*$ 的下界. 其中第 1 步显然是确定性系统的最优 H_∞ 控制问题. 计算确定性控制系统的 H_∞ 范数, 例如给定 $\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}_0$ 时控制系统的最小 H_∞ 范数, 可以通过计算下列 Hamilton 微分方程边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}-\left(\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}}-\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\lambda}\\&\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=0,\quad \boldsymbol{\lambda}(t_{\mathrm{f}})=\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}}) \tag{10}$$

的一阶特征值 γ_1^{-2} 而获得 [6]. 在第 2 步中则可以利用计算区间 Hamilton 系统一阶特征值的算法获得 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 在区间 $[\underline{\boldsymbol{A}},\bar{\boldsymbol{A}}]$ 内任意取值时 $\gamma(\tilde{\boldsymbol{A}})$ 的最大值.

区间系数 Hamilton 系统的特征值问题

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{B}_u\boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}}-\gamma^{-2}\boldsymbol{B}_w\boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\lambda}\\&\dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=0,\quad \boldsymbol{\lambda}(t_{\mathrm{f}})=\boldsymbol{S}_{\mathrm{f}}\boldsymbol{x}(t_{\mathrm{f}}) \tag{12}$$

的直接求解比较困难, 因此本文首先求解区间矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 取中点值 $\boldsymbol{A}_0$ 时的特征值问题 (9), (10), 然后将 $\Delta\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{I}}$ 作为摄动量, 利用微分方程特征值摄动理论结合区间算法给出特征值的区间范围估计.

2 区间系统的最小 H_∞ 范数估计

在求解特征值问题 (9),(10) 的基础上, 将 $\Delta\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{I}}$ 作为对中点 $\boldsymbol{A}_0$ 的摄动, 再用特征值摄动方法给出式 (11),(12) 的特征值范围估计, 这与区间矩阵的特征值计算方法类似 [10]. Hamilton 系统特征值摄动方法的详细介绍见文献 [11], 本节将其用于区间参数控制系统的最小 H_∞ 范数估计.

令

$$\rho_i=\gamma_i^{-2},\quad \boldsymbol{v}_i(t)=[\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

表示系统 (9),(10) 的第 i 阶特征值和特征函数 (仅考虑单重特征值情况), 系统 (11),(12) 的特征解 $\tilde{\rho}_i$, $\tilde{\boldsymbol{v}}_i(t)$ 可以用 ρ_i, $\boldsymbol{v}_i(t)$ 的一阶摄动近似为

$$\tilde{\rho}_i\cong\rho_i+\varepsilon\rho_{1i} \tag{14}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_i\cong\boldsymbol{v}_i+\varepsilon\boldsymbol{v}_{1i} \tag{15}$$

其中 [11]

$$\rho_{1i}=\int_0^{t_f}\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_i\mathrm{d}t \tag{16}$$

$$\boldsymbol{v}_{1i}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\frac{d_{ik}}{\rho_k-\rho_i}\boldsymbol{v}_k \tag{17}$$

而

$$d_{ik}=\frac{1}{2}\int_0^{t_{\mathrm{f}}}\left(\boldsymbol{\lambda}_k^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{I}\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}_i\right)\mathrm{d}t \tag{18}$$

由于式 (16) 中的 $\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 是普通向量函数, 在某些情况下, 式 (16) 中的区间函数积分计算可以通过变换得到简化.

不确定性系统 (1),(2) 的 H_∞ 控制所对应的 Hamilton 系统 (11),(12) 的一阶特征值 $\tilde{\rho}_1$ 是一个区间量，根据第 1 节中给出的不确定性系统最小 H_∞ 范数的定义及不等式 (8), $\tilde{\gamma}_*$ 的下界 $\gamma_\#$ 与 $\tilde{\rho}_1$ 有下列关系

$$\gamma_\# = \max\left(1/\sqrt{\tilde{\rho}_1}\right) \cong \max\left(1\Big/\sqrt{\rho_1 + \int_0^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{x}_1 \mathrm{d}t}\right) \tag{19}$$

因为区间矩阵 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 取中点值 $\boldsymbol{A}_0$ 时 Hamilton 系统的各阶特征值和特征函数可以由文献 [6,12] 中的方法计算，所以只要得到式 (19) 中的积分值即可估计不确定性系统的最小 H_∞ 范数. 一般情况下，其中的积分需按区间积分算法进行 [2]，在某些特定情况下也可以按下列步骤计算. 系统 (9),(10) 的第一阶特征值和特征函数满足

$$\dot{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{v}_1, \quad i = 1,2,3,\cdots \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & -\left(\boldsymbol{B}_u \boldsymbol{B}_u^{\mathrm{T}} - \rho_1 \boldsymbol{B}_w \boldsymbol{B}_w^{\mathrm{T}}\right) \\ -\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{21}$$

所以

$$\boldsymbol{v}_1(t) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{H}_1 t} \boldsymbol{v}_1(0) \tag{22}$$

当矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 没有重特征值时，将 $\boldsymbol{H}_1$ 分解为

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{\Phi}_1 \Lambda_1 \boldsymbol{\Phi}_1^{-1} \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{\Lambda}_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2n})$ 是由矩阵 $\boldsymbol{H}_1$ 的特征值构成的对角阵，$\boldsymbol{\Phi}_1$ 是对应的特征向量组成的矩阵. 考虑到式 (22), 有

$$\boldsymbol{\lambda}_1(t) = \boldsymbol{\Phi}_{q1} \mathrm{e}^{\Lambda_1 t} \boldsymbol{\Phi}_1^{-1} \boldsymbol{v}_1(0) \tag{24}$$

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \boldsymbol{\Phi}_{p1} \mathrm{e}^{\Lambda_1 t} \boldsymbol{\Phi}_1^{-1} \boldsymbol{v}_1(0) \tag{25}$$

式 (24), (25) 中的 $\boldsymbol{\Phi}_{q1}$ 和 Φ_{p1} 分别表示 $2n$ 维矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 的前 n 行和后 n 行. 这样

$$\int_0^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_1^{\mathrm{T}} (\Delta \boldsymbol{A}^I) \boldsymbol{x}_1 \mathrm{d}t = \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}(0) \boldsymbol{\Phi}_1^{-\mathrm{T}} \int_0^{t_f} \mathrm{e}^{\Lambda_1 t} \boldsymbol{\Phi}_{q1}^{\mathrm{T}} (\Delta \boldsymbol{A}^I) \boldsymbol{\Phi}_{p1} \mathrm{e}^{\Lambda_1 t} \mathrm{d}t \boldsymbol{\Phi}_1^{-1} \boldsymbol{v}_1(0) \tag{26}$$

由于 $\mathrm{e}^{\Lambda_1 t}$ 形式特殊，先求出上式右端包含区间矩阵定积分的解析表达式，再按区间运算规则计算比直接积分要简单许多.

3 算　例

系统 (1),(2) 中各矩阵取值如下

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 & 0.5 & 1.0 & 0.6 & 0 \\ -2.0 & -3.0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0 & 2.0 & 1.0 & 0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.0 & 3.0 & 0 & -0.5 \\ 1.0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & -3.0 & -4.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_w = \boldsymbol{I}_6, \quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_6, \quad \boldsymbol{S}_{\mathrm{f}} = 0.1 \times \boldsymbol{I}_6, \quad t_{\mathrm{f}} = 1.6$$

按照文献 [6] 中的方法可得对应 Hamilton 系统 (9),(10) 的一阶特征值为 γ_1^{-2}=1.745625，对应的最小 H_∞ 范数为 γ_1=0.7569，另外还可得到高阶特征值和对应的特征函数.

下面考虑存在区间参数项 $\Delta \boldsymbol{A}^I$ 的情况，用摄动法和蒙特卡罗法在区间 $[\underline{\boldsymbol{A}}, \bar{\boldsymbol{A}}]$ 内取均匀分布的随机参数样本直接计算以进行比较. 对下列两种情况的区间摄动项 $\Delta \boldsymbol{A}^I$ 进行计算的结果列于表 1 中.

表 1　摄动法和蒙特卡罗法的计算结果

Table 1　Results of perturbation method and Monte Carlo method

		Perturbation method	Monte Carlo method	
			1 000 samples	5 000 samples
1	$\tilde{\rho}_1$	[1.464 363, 2.026 888]	[1.509 461, 2.017 238]	[1.503 984, 2.022 092]
	$\gamma_\#$	0.826 3	0.813 9	0.815 4
2	$\tilde{\rho}_1$	[1.397 994, 2.093 256]	[1.538 091, 1.984 248]	[1.527 315, 2.002 915]
	$\gamma_\#$	0.845 8	0.806 3	0.809 1

1： $\Delta\boldsymbol{A}^I = \mathrm{diag}([-0.2,0.2],[-0.1,0.1],[-0.3,0.3],[-0.1,0.1],[-0.1,0.1],[-0.2,0.2])$

2：

$$\Delta\boldsymbol{A}^I = \begin{bmatrix} 0 & [-0.1,0.1] & 0 & [-0.2,0.2] & [-0.1,0.1] & 0 \\ [-0.1,0.1] & [-0.2,0.2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-0.3,0.3] & 0 & [-0.1,0.1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [-0.2,0.2] & [-0.1,0.1] & 0 & 0 \\ [-0.1,0.1] & 0 & 0 & 0 & 0 & [-0.1,0.1] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-0.3,0.3] & 0 \end{bmatrix}$$

其中摄动法结合区间算法工具箱 b4m[12] 提供的函数进行计算. 再按照蒙特卡罗法，分别取 1000 个和 5000 个样本计算. 从表 1 中可以看出，对于这个算例，蒙特卡罗法与区间算法的结果相差不大，但计算量大许多. 采用更多的样本得到的特征值分布区间虽然有所变化，但仍然在由区间算法所得的 $\tilde{\rho}_1$ 的区间内，这里略去更多样本的计算结果. $\gamma_\#$ 可以按照式 (19) 分别计算.

参数的不确定性将会使系统的干扰抑制性能减弱，即系统的最小 H_∞ 范数值将增大，表中所有的 $\gamma_\#$ 值都比前面计算的确定性系统的 γ_1 值大也验证了这一点. 本文中的摄动法仅取一阶摄动项进行计算，截断误差势必会影响对区间控制系统最小 H_∞ 范数估计的精度. 因为 $\gamma_\#$ 是系统可能达到的最小 H_∞ 范数 $\tilde{\gamma}_*$ 的下界，对比蒙特卡罗法的结果可知，摄动法的结果相对保守一些，给出了偏高的下界；但从实际控制系统设计的角度来讲，需要综合考虑其他方面的性能指标而取大于 $\tilde{\gamma}_*$ 的 H_∞ 范数值，所以可以用本文摄动法的计算结果指导控制系统的设计.

4 结束语

参数不确定性控制系统的 H_∞ 范数描述了系统在最不利情况下的干扰抑制能力. 由于不确定性的存在，其 H_∞ 范数的计算需要有区别于确定性系统的方法. 本文介绍了利用 Hamilton 微分方程特征值的摄动方法估计区间参数系统最小 H_∞ 范数的过程. 文中给出的数值算例结果表明较小的计算量就可以得到区间系数 Hamilton 微分方程的特征值分布区间，进而可以估计系统的最小 H_∞ 范数.

参 考 文 献

1 Basar T, Bernhard P. H_∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhäuser, 1995

2 Jaulin L, Kieffer M, Didrit O, et al. Applied Interval Analysis——with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics. London: Springer-Verlag, 2001

3 Shashikhin VN. Robust control using interval analysis. *Reliable Computing*, 2001, 7: 219~230

4 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 区间系统的 H_∞ 鲁棒控制. 自动化学报, 1999, 25(5): 705~708 (Wu Fangxiang, Shi Zhongke, Dai Guanzhong. H_∞ robust control for interval systems. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 705~708 (in Chinese))

5 Lin WW, Wang CS, Xu QF. Numerical computation of the minimal H_∞ norm of the discrete-time output feedback control problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2000, 38(2): 515~547

6 钟万勰. H_∞ 状态反馈与瑞利商精细积分. 计算力学学报, 1998, 15(4): 1~8 (Zhong Wanxie. H_∞ control state feedback and Rayleigh quotient precise integration. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 1998, 15(4): 1~8 (in Chinese))

7 Wu ZG, Zhong WX. Critical value computation for H_∞-Riccati difference equations. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 264: 303~316

8 Balandin DV, Kogan MM. Double-ended estimates of a minimum robust H_∞ norm for uncertain controllable systems. *Automation and Remote Control*, 2003, 64(1): 95~103

9 Alefeld G, Mayer G. Interval analysis: Theory and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000, 121: 421~464

10 Qiu ZP, Muller PC, Frommer A. An approximate method for the standard interval eigenvalue problem of real non-symmetric interval matrices. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2001, 17: 239 ~251

11 吴志刚, 高强. Hamilton 系统特征值问题的摄动方法及其应用. 振动工程学报, 2004, 17(1): 7~10 (Wu Zhigang, Gao Qiang. Perturbation method for eigenvalue problems of Hamiltonian systems with applications. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(1): 7~10 (in Chinese))

12 Zemke J. B4m a free interval arithmetic toolbox for Matlab. http://www.ti3.tu-harburg.de/zemke/b4m/ index.html

MINIMUM H_∞ NORM ESTIMATION OF INTERVAL SYSTEMS BY AN EIGENVALUE PERTURBATION METHOD [1)]

Wu Zhigang Gao Qiang

(*State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian* 116023, *China*)

Abstract The H_∞ norm represents disturbance attenuation performance of a system. An eigenvalue perturbation method of differential equations is proposed to calculate the minimum H_∞ norm of the control system with parametric uncertainty, where interval matrices are used to characterize the uncertainty in the system. The method is based on the correspondence between the minimum H_∞ norm and the first order eigenvalue of an associated Hamiltonian two-point boundary value problem.

Key words H_∞ control, eigenvalue perturbation, uncertain system, interval parameter, Hamiltonian differential equation

Received 9 October 2003, revised 28 June 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10202004).