

广义变分原理的结构形状优化伴随法灵敏度分析¹⁾

郭 旭 顾元宪 赵 康

(大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 提出了一种利用伴随变量进行结构形状优化灵敏度分析的新方法. 基于广义变分原理, 考虑了形状优化中位移边界条件的变化对结构响应的影响. 新方法弥补了 Arora 等人所提出的形状优化灵敏度分析变分原理中的缺陷, 为采用伴随法进行灵敏度分析提供了新的框架.

关键词 形状优化, 伴随法, 灵敏度分析, 广义变分原理

引 言

商业竞争的日趋激烈, 对产品设计提出了更高的要求. 结构优化由于可以为设计者提供具有竞争力的设计方案, 因而始终受到工程师和研究者的广泛关注. 形状优化是结构优化的一个重要方向, 从 20 世纪 80 年代至今, 一直保持着较高的研究热度. 较之于尺寸优化, 形状优化的灵敏度分析相对复杂, 因而求解难度更大. 众所周知, 灵敏度信息求解的精度直接影响着优化过程的效率甚至关系到能否收敛, 因此正确计算结构响应对于设计变量的灵敏度是结构形状优化过程中的一个关键步骤. 对于连续体结构的形状优化来说, 所需要的灵敏度信息既可以从离散之后的有限元模型出发, 通过将整体刚度矩阵对设计变量求偏导数得到; 也可以先对平衡方程的弱形式求物质导数, 以获得灵敏度所应该满足的弱形式方程, 然后再利用有限元等数值手段对其进行离散求解而得到. 从离散模型出发的灵敏度分析方法原理简单, 但在其实现过程中往往需要对单元刚度阵与形状设计变量之间的显式关系有透彻的了解, 而这往往是难以做到的. 另外在此框架下进行灵敏度计算, 也较难进行误差估计的理论分析. 而基于连续体模型的灵敏度分析方法, 则可在很大程度上弥补上述缺陷. 基于连续体模型的结构形状灵敏度研究是从 Cea 等人^[1] 的先驱性工作开始的. 稍后, Haug 等在连续模型框架下采用物质导数技术深入研究了各种结构响应泛函对于形状设计参数的灵敏度分析方法. 其成果集中体现在专著^[2]中. Sokolowski 和 Zolésio^[3] 利用泛函分析和偏微分方程基本理论作为

工具, 建立了形状灵敏度分析的理论框架. Dems 和 Haftka^[4] 通过对连续介质力学平衡方程的强形式求物质导数, 给出了形状优化灵敏度分析的直接法和伴随法控制方程. 基于物质导数以及控制体积的概念, Arora 等人^[5,6] 又进一步研究了考虑几何以及材料非线性的形状灵敏度分析方法.

在文献^[7]和^[8]中, Arora 从连续体模型出发, 建立了有关形状优化灵敏度分析的变分原理. 基于这样的变分原理可以较方便地得到结构形状灵敏度分析的伴随法方程. 但遗憾的是, Arora 的变分原理不能适用于所有的位移边界条件变化形式. 具体来说, 当结构的指定位移边界发生形状变化时, 如果指定位移的空间导数不为零, 则 Arora 的变分原理将不再成立. 我们知道, 对于需要考虑接触、支座沉陷以及多场耦合等现象的形状优化问题, 或者需要进行支撑条件优化的问题, 正确考虑目标泛函对于指定位移边界变化的灵敏度具有重要意义. 基于此, 本文提出了一种利用伴随变量进行结构形状优化灵敏度分析的新方法. 基于广义变分原理, 我们正确地考虑了形状优化中位移边界条件的变化对结构响应的影响. 新方法弥补了 Arora 等人所提出的形状优化灵敏度分析变分原理中的缺陷, 为采用伴随法进行灵敏度分析提供了新的框架.

1 基于连续体模型的灵敏度分析

在本节中, 为了行文的完整, 我们将首先对基于连续体模型的结构形状灵敏度分析方法作一个简单的介绍. 如无特殊声明, 以下推导均针对线弹性体小

2003-06-09 收到第 1 稿, 2004-03-16 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10102003, 10032030, 10225212, 10332010), 留学归国人员启动基金资助项目.

变形情形展开. 所有下标的取值范围均为 1~3, 重复下标遵从爱因斯坦求和约定. 记号 $(\bullet)^{\bullet} = D(\bullet)/Db$ 和 $(\prime) = \partial(\bullet)/\partial b$ 分别代表对括号中的量求物质导数和空间导数.

1.1 直接法

设结构优化目标泛函的形式为

$$\psi = \int_V G(\sigma_{ij}, e_{ij}, u_i, b) dV + \int_{S_u} g(u_i^0, T_i, b) dS_u + \int_{S_t} h(u_i, T_i^0, b) dS_t \quad (1)$$

这里 σ_{ij}, e_{ij} 和 u_i 分别为应力张量、应变张量以及位移矢量在笛卡尔坐标系下的分量. S_u 为指定位移边界, 其上的指定位移为 $u_i = u_i^0$. S_t 为外力给定边界, 在其上有 $\sigma_{ij}n_j = T_i^0$ 且 $S_u \cap S_t = \phi$. 这里的 T_i^0 为给定外力分量的面集度, n_i 为边界外法线矢量的分量. b 为控制结构形状变化的设计变量.

将目标泛函对 b 取物质导数, 有

$$\frac{d}{db}\psi = (\psi)^{\bullet} = \int_V G^{\bullet} dV + \int_V G(dV)^{\bullet} + \int_{S_u} g^{\bullet} dS_u + \int_{S_u} g(dS_u)^{\bullet} + \int_{S_t} h^{\bullet} dS_t + \int_{S_t} h(dS_t)^{\bullet} \quad (2)$$

这里

$$G^{\bullet} = \frac{\partial G}{\partial(\sigma_{ij})}[\sigma_{ij}(\mathbf{u})]^{\bullet} + \frac{\partial G}{\partial(e_{ij})}[e_{ij}(\mathbf{u})]^{\bullet} + \frac{\partial G}{\partial(u_i)}(u_i)^{\bullet} + \frac{\partial G}{\partial b} \quad (3)$$

$$g^{\bullet} = \frac{\partial g}{\partial(T_i)}(T_i)^{\bullet} + \frac{\partial g}{\partial(u_i^0)}(u_i^0)^{\bullet} + \frac{\partial g}{\partial b} \quad (4)$$

$$h^{\bullet} = \frac{\partial h}{\partial(u_i)}(u_i)^{\bullet} + \frac{\partial h}{\partial(T_i^0)}(T_i^0)^{\bullet} + \frac{\partial h}{\partial b} \quad (5)$$

结构平衡方程的弱形式为

$$\int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})\delta e_{ij}(\mathbf{u})dV - \int_V f_i\delta u_i dV - \int_{S_t} T_i^0\delta u_i dS_t = 0 \quad (6)$$

这里 \mathbf{u} 和 $\delta\mathbf{u}$ 均属于适当的函数空间 (如 $\mathbf{H}^1(V)$), 并且在指定位移边界 S_u 上分别满足 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$ 和 $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

将式 (6) 对 b 求物质导数并整理, 有

$$\begin{aligned} & \int_V [\sigma_{ij}(\mathbf{u})]^{\bullet} e_{ij}(\delta\mathbf{u})dV + \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})[e_{ij}(\delta\mathbf{u})]^{\bullet} dV - \\ & \int_V (f_i)^{\bullet} \delta u_i dV - \int_V f_i(\delta u_i)^{\bullet} dV - \\ & \int_{S_t} (T_i^0)^{\bullet} \delta u_i dS_t - \int_{S_t} T_i^0(\delta u_i)^{\bullet} dS_t = \\ & \int_V [f_i\delta u_i - \sigma_{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\delta\mathbf{u})](dV)^{\bullet} + \\ & \int_{S_t} T_i^0\delta u_i(dS_t)^{\bullet} \end{aligned} \quad (7)$$

考虑到

$$\frac{D}{Db}[e_{ij}(\delta\mathbf{u})] = e_{ij}[(\delta\mathbf{u})^{\bullet}] - (v_{k,j}\delta u_{i,k} + v_{k,i}\delta u_{j,k})/2 \quad (8)$$

$$\frac{D}{Db}[e_{ij}(\mathbf{u})] = e_{ij}(\mathbf{u}^{\bullet}) - (v_{k,j}u_{i,k} + v_{k,i}u_{j,k})/2 \quad (9)$$

并记 $\sigma_{ij}(\mathbf{u}^{\bullet}) = D_{ijkl}[e_{kl}(\mathbf{u}^{\bullet})]$, 有

$$(\sigma_{ij})^{\bullet} = \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{\bullet}) - D_{ijkl}(v_{m,l}u_{k,m} + v_{m,k}u_{l,m})/2 \quad (10)$$

这里 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ 为形状设计变量 b 发生变化时所引发的设计区域的变形速度场, D_{ijkl} 为弹性张量在笛卡尔坐标系下的分量. 这样式 (7) 可以进一步整理为

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})e_{ij}[(\delta\mathbf{u})^{\bullet}]dV - \int_V f_i(\delta u_i)^{\bullet} dV - \right. \\ & \left. \int_{S_t} T_i^0(\delta u_i)^{\bullet} dS_t \right\} + \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}^{\bullet})\delta e_{ij}dV = \\ & \int_V [f_i\delta u_i - \sigma_{ij}(\mathbf{u})e_{ij}(\delta\mathbf{u})](dV)^{\bullet} + \\ & \int_{S_t} T_i^0\delta u_i(dS_t)^{\bullet} + \int_V (f_i)^{\bullet}\delta u_i dV + \\ & \int_{S_t} (T_i^0)^{\bullet}\delta u_i dS_t + \\ & \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl}(v_{m,l}u_{k,m} + v_{m,k}u_{l,m})e_{ij}(\delta\mathbf{u})dV + \\ & \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u})(v_{k,j}\delta u_{i,k} + v_{k,i}\delta u_{j,k})dV \end{aligned} \quad (11)$$

因为 $e_{ij}[(\delta\mathbf{u})^{\bullet}]$ 和 $(\delta\mathbf{u})^{\bullet}$ 是运动学相容的, 而且在 S_u 上始终有 $(\delta\mathbf{u})^{\bullet} = \mathbf{0}$, 所以由式 (11) 可以得到

确定位移场的物质导数 \mathbf{u}^\bullet 的弱形式方程为

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\bullet) \delta e_{ij} dV = & \int_V [f_i \delta u_i - \sigma_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\delta \mathbf{u})] (dV)^\bullet + \\ & \int_{S_t} T_i^0 \delta u_i (dS_t)^\bullet + \int_V (f_i)^\bullet \delta u_i dV + \\ & \int_{S_t} (T_i^0)^\bullet \delta u_i dS_t + \\ & \frac{1}{2} \int_V D_{ijkl} (v_{mj} u_{k,m} + v_{m,k} u_{l,m}) e_{ij}(\delta \mathbf{u}) dV + \\ & \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}) (v_{k,j} \delta u_{i,k} + v_{k,i} \delta u_{j,k}) dV \end{aligned} \quad (12)$$

确定了 \mathbf{u}^\bullet ，就可以由式 (2)~(5) 计算出目标泛函对于形状设计变量 b 的灵敏度。因为在整个求解过程中没有引入任何新的变量，所以这种方法被称为直接法。

1.2 伴随法

按照 Arora 的思想 [7]，形状灵敏度的伴随法求解，可以在灵敏度分析变分原理的框架下进行。为了方便后面的行文，这里较详细地给出其推导。

首先，引入一个增广的目标泛函

$$L = \psi + W^a \quad (13)$$

这里

$$\begin{aligned} W^a = & - \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{u}^a) dV + \int_V f_i u_i^a dV + \\ & \int_{S_t} T_i^0 u_i^a dS_t + \int_{S_u} T_i u_i^{a0} dS_u = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

而 $\mathbf{u}^a = (u_1^a, u_2^a, u_3^a)^T$ 是一个人为引入的暂时未知的伴随位移场，其在 S_u 上需要满足 $u_i^a = u_i^{a0}$ (u_i^{a0} 的定义见后文)。有

$$L = \psi + W^a = \int_V \bar{G} dV + \int_{S_u} \bar{g} dS_u + \int_{S_t} \bar{h} dS_t \quad (15)$$

这里 $\bar{G} = G - \sigma_{ij} e_{ij}^a + f_i u_i^a$ ， $\bar{g} = g + T_i u_i^{a0}$ ， $\bar{h} = h + T_i^0 u_i^a$ 。

将 L 对设计变量 b 求物质导数，有

$$\begin{aligned} L^\bullet = & \int_V (\bar{G})^\bullet dV + \int_V \bar{G} (dV)^\bullet + \int_{S_u} (\bar{g})^\bullet dS_u + \\ & \int_{S_u} \bar{g} (dS_u)^\bullet + \int_{S_t} (\bar{h})^\bullet dS_t + \int_{S_t} \bar{h} (dS_t)^\bullet \end{aligned} \quad (16)$$

这里

$$\begin{aligned} (\bar{G})^\bullet = & \frac{\partial G}{\partial(\sigma_{ij})} [\sigma_{ij}(\mathbf{u})]^\bullet + \frac{\partial G}{\partial(e_{ij})} [e_{ij}(\mathbf{u})]^\bullet + \\ & \frac{\partial G}{\partial(u_i)} (u_i)^\bullet + \frac{\partial G}{\partial b} - (\sigma_{ij})^\bullet e_{ij}^a - \sigma_{ij} (e_{ij}^a)^\bullet + \\ & (f_i)^\bullet u_i^a + f_i (u_i^a)^\bullet \end{aligned} \quad (17)$$

令在 V 内 $e_{ij}^{aI} = G_{,\sigma_{ij}}$ ， $\sigma_{ij}^{aI} = G_{,e_{ij}}$ ， $f_i^a = G_{,u_i}$ ，在 S_u 上 $u_i^{a0} = -g_{,T_i}$ ，在 S_t 上 $T_i^{a0} = h_{,u_i}$ ，并经过一系列推导，可有

$$L^\bullet = L_e^\bullet + L_i^\bullet \quad (18)$$

这里

$$\begin{aligned} L_e^\bullet = & \int_V \bar{G} (dV)^\bullet + \int_{S_u} \bar{g} (dS_u)^\bullet + \int_{S_t} \bar{h} (dS_t)^\bullet + \\ & \int_V [G_{,b} + (f_i)^\bullet u_i^a + \\ & \frac{1}{2} \sigma_{ij}^a (v_{m,j} u_{i,m} + v_{m,i} u_{j,m}) + \\ & \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) (v_{m,j} u_{i,m}^a + v_{m,i} u_{j,m}^a)] dV + \\ & \int_{S_u} \left[\frac{\partial g}{\partial(u_i^0)} (u_i^0)^\bullet + \frac{\partial g}{\partial b} + T_i (u_i^{a0})^\bullet \right] dS_u + \\ & \int_{S_t} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial(T_i^0)} + u_i^a \right) (T_i^0)^\bullet + \frac{\partial h}{\partial b} \right] dS_t \end{aligned} \quad (19)$$

而

$$\begin{aligned} L_i^\bullet = & \int_V [-\sigma_{ij}^a e_{ij}(\mathbf{D}\mathbf{u}/\mathbf{D}b)] dV + \\ & \int_V f_i^a (u_i)^\bullet dV + \int_V f_i (u_i^a)^\bullet dV + \\ & \int_{S_t} T_i^{a0} (u_i)^\bullet dS_t + \int_{S_t} T_i^0 (u_i^a)^\bullet dS_t + \\ & \int_V -\sigma_{ij}(\mathbf{u}) e_{ij}(\mathbf{D}\mathbf{u}^a/\mathbf{D}b) dV \end{aligned} \quad (20)$$

Arora 认为：如果令伴随位移 \mathbf{u}^a 满足如下的虚功方程，即对所有属于合适函数空间 (即具有一定的光滑性) 并且在 S_u 上为零的虚位移 $\delta \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \int_V -\sigma_{ij}^a e_{ij}(\delta \mathbf{u}) dV + \int_V f_i^a \delta u_i dV + \\ \int_{S_t} T_i^{a0} \delta u_i dS_t = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

这里 $\sigma_{ij}^a = [(e_{kt}^a - e_{kt}^{aI}) D_{ijkl} - \sigma_{ij}^{aI}]$ 。将 $\mathbf{D}\mathbf{u}/\mathbf{D}b$ 和 $\mathbf{D}\mathbf{u}^a/\mathbf{D}b$ 作为虚位移分别代入式 (21) 和式 (6) 则有

$L_i^\bullet = 0$. 可以证明 $L^\bullet = \psi^\bullet$, 所以综合上述推导, 有

$$\begin{aligned} L^\bullet &= L_e^\bullet = \psi^\bullet = \\ &\int_V \bar{G}(dV)^\bullet + \int_{S_u} \bar{g}(dS_u)^\bullet + \int_{S_t} \bar{h}(dS_t)^\bullet + \\ &\int_V \left[G_{,b} + (f_i)^\bullet u_i^a + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^a (v_{m,j} u_{i,m} + v_{m,i} u_{j,m}) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{u})(v_{m,j} u_{i,m}^a + v_{m,i} u_{j,m}^a) \right] dV + \\ &\int_{S_u} \left[\frac{\partial g}{\partial (u_i^0)} (u_i^0)^\bullet + \frac{\partial g}{\partial b} + T_i (u_i^{a0})^\bullet \right] dS_u + \\ &\int_{S_t} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial (T_i^0)} + u_i^a \right) (T_i^0)^\bullet + \frac{\partial h}{\partial b} \right] dS_t \quad (22) \end{aligned}$$

这就是 Arora 在文献 [7] 中所得到的伴随法灵敏度分析表达式.

2 Arora 灵敏度变分原理中的一些问题

Arora 认为式 (21) 给出了求解伴随位移的弱形式方程. 但必须指出的是: Du/Db 可以作为式 (21) 中虚位移的前提是: 其在 S_u 上必须满足 $Du/Db = 0$ (也就是 $(u_i)^\bullet = 0$). 否则确定伴随位移的弱形式方程应为如下形式

$$\begin{aligned} &\int_V -\sigma_{ij}^a e_{ij} (Du/Db) dV + \int_V f_i^a (u_i)^\bullet dV + \\ &\int_{S_t} T_i^{a0} (u_i)^\bullet dS_t + \int_{S_u} T_i^a (u_i)^\bullet dS_u = 0 \quad (23) \end{aligned}$$

也就是应该在式 (21) 的基础上增加 S_u 边界上的外力虚功. 由此可见, 如果所考虑的形状优化问题在 S_u 边界上指定位移的物质导数不为零, 则 Arora 的推导将不再成立. 这个问题在 Arora 原有的变分框架下是无法解决的. 为了弥补这个缺陷, 必须借助于广义变分原理.

仍然引入增广拉格朗日泛函 $L = \psi + W_{HR}^a$, 但与式 (13) 中的 W^a 不同, 此处

$$\begin{aligned} W_{HR}^a &= \int_V \{ [C_{ijrs} \sigma_{rs} - e_{ij}(\mathbf{u})] \sigma_{ij}^a + \\ &(\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^a \} dV + \int_{S_u} (u_i - u_i^0) T_i^a dS_u - \\ &\int_{S_t} (T_i - T_i^0) u_i^a dS_t \quad (24) \end{aligned}$$

这里 u_i, σ_{ij} 为真实的结构位移和应力, 而 u_i^a, σ_{ij}^a 为待确定的伴随位移以及伴随应力. 除了必须具有适当的光滑性之外, 它们无需事先满足任何约束条件. $T_i = \sigma_{ij} n_j$ 以及 $T_i^a = \sigma_{ij}^a n_j$ 分别为 S_t 边界上的真实

面力集度以及伴随面力集度. C_{ijrs} 为柔度张量在笛卡尔坐标系下的分量.

将 L 对设计变量 b 求物质导数, 并令在 V 内 $e_{ij}^{aI} = G_{,ij}$, $\sigma_{ij}^{aI} = G_{,e_{ij}}$, $f_i^a = G_{,u_i}$, 在 S_u 上 $u_i^{a0} = -g_{,T_i}$, 在 S_t 上 $T_i^{a0} = h_{,u_i}$. 同时假定材料柔度张量的分量在形状变化时保持空间不变, 即 $(C_{ijkl})' = 0$. 这样有

$$L^\bullet = L_e^\bullet + L_i^\bullet \quad (25)$$

这里

$$\begin{aligned} L_i^\bullet &= \left\{ \int_V \{ [C_{ijrs} \sigma_{rs} - e_{ij}(\mathbf{u})] (\sigma_{ij}^a)' + \right. \\ &(\sigma_{ij,j} + f_i) (u_i^a)' \} dV + \int_{S_u} (u_i - u_i^0) (T_i^a)' dS_u - \\ &\int_{S_t} (T_i - T_i^0) (u_i^a)' dS_t \} + \\ &\left\{ \int_V \{ e_{ij}^{aI} (\sigma_{ij})' + \sigma_{ij}^{aI} [e_{ij}(\mathbf{u})]' + f_i^a (u_i)' \} dV + \right. \\ &\int_V \{ C_{ijrs} (\sigma_{rs})' \sigma_{ij}^a - [e_{ij}(\mathbf{u})]' \sigma_{ij}^a \} dV + \\ &\int_V (\sigma_{ij,j})' u_i^a dV + \int_{S_u} -u_i^{a0} (T_i)' dS_u + \\ &\int_{S_u} T_i^a (u_i)' dS_u + \int_{S_t} -u_i^a (T_i)' dS_t + \\ &\left. \int_{S_t} T_i^{a0} (u_i)' dS_t \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} L_e^\bullet &= \int_V \bar{G}(dV)^\bullet + \int_V G_{,b} dV + \int_V \{ G_{,ij} [\nabla \sigma_{ij} \cdot \mathbf{v}] + \\ &G_{,e_{ij}} [\nabla e_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] + G_{,u_i} [\nabla (u_i) \cdot \mathbf{v}] \} dV + \\ &\int_{S_u} [g_{,u_i^0} (u_i^0)^\bullet + g_{,b} + g_{,T_i} (\nabla (T_i) \cdot \mathbf{v})] dS_u + \\ &\int_{S_u} g(dS_u)^\bullet + \int_{S_t} [h_{,T_i^0} (T_i^0)^\bullet + h_{,b} + \\ &h_{,u_i} (\nabla (u_i) \cdot \mathbf{v})] dS_t + \int_{S_t} h(dS_t)^\bullet + \\ &\int_V \nabla \{ [C_{ijrs} \sigma_{rs} - e_{ij}(\mathbf{u})] \sigma_{ij}^a \} \cdot \mathbf{v} dV + \\ &\int_V \nabla [(\sigma_{ij,j} + f_i) u_i^a] \cdot \mathbf{v} dV + \int_V (f_i)' u_i^a dV + \\ &\int_{S_u} \nabla (u_i T_i^a) \cdot \mathbf{v} dS_u - \int_{S_u} (u_i^0)^\bullet T_i^a dS_u - \\ &\int_{S_u} u_i^0 \nabla (T_i^a) \cdot \mathbf{v} dS_u - \int_{S_t} \nabla (T_i u_i^a) \cdot \mathbf{v} dS_t + \\ &\int_{S_t} (T_i^0)^\bullet u_i^a dS_t + \int_{S_t} T_i^0 \nabla (u_i^a) \cdot \mathbf{v} dS_t \quad (27) \end{aligned}$$

由泛函分析以及偏微分方程的理论可以知道: 如果当前设计区域以及设计变量变化所引发的速度场具有适当的正则性, 则原始以及伴随场变量的空间导数也会具有相应的正则性. 因此, 在上述假设下, 可以选取 $(\sigma_{ij}^a)'$ 以及 $(u_i^a)'$ 作为广义虚功方程中的试探函数. 又因为 σ_{ij} 与 f_i 在域内, $\sigma_{ij}n_j$ 与 T_i^0 在 S_t 上满足平衡方程; u_i 与 $e_{ij}(\mathbf{u})$ 在域内满足运动学协调条件, u_i 在 S_u 上等于指定位移 u_i^0 , 则由 Hellinger-Reissner 广义变分原理, 式 (26) 第一个大括号中的项之和为零.

为了得到确定伴随位移以及伴随应力的弱形式方程, 我们需要进一步对式 (26) 中的某些项作进一步变形.

考虑项 $\int_{S_t} -u_i^a(T_i)'\mathrm{d}S_t$, 它可以变形为

$$\begin{aligned} \int_{S_t} -u_i^a(T_i)'\mathrm{d}S_t &= \int_{S_t} -u_i^a(T_i)'\mathrm{d}S_t + \\ &\int_{S_u} -(T_i)'u_i^a\mathrm{d}S_u + \int_{S_u} (T_i)'u_i^a\mathrm{d}S_u = \\ &\int_S -u_i^a(T_i)'\mathrm{d}S + \int_{S_u} (T_i)'u_i^a\mathrm{d}S_u \end{aligned} \quad (28)$$

这里利用了 $S = S_u \cup S_t$, $S_u \cap S_t = \phi$.

再考虑项 $\int_{S_u} T_i^a(u_i)'\mathrm{d}S_u$, 它可以变形为

$$\begin{aligned} \int_{S_u} T_i^a(u_i)'\mathrm{d}S_u &= \\ \int_{S_u} T_i^a(u_i)'\mathrm{d}S_u + \int_{S_t} (u_i)'T_i^a\mathrm{d}S_t - \int_{S_t} (u_i)'T_i^a\mathrm{d}S_t &= \\ \int_S (u_i)'T_i^a\mathrm{d}S - \int_{S_t} (u_i)'T_i^a\mathrm{d}S_t \end{aligned} \quad (29)$$

进一步, 有

$$\begin{aligned} \int_S -u_i^a(T_i)'\mathrm{d}S &= \int_S -[\sigma_{ij}(\mathbf{u})]'\mathrm{d}S = \\ &-\int_V [(\sigma_{ij})'u_i^a]_{,j}\mathrm{d}V = \\ &-\int_V (\sigma_{ij})'_{,j}u_i^a\mathrm{d}V - \int_V (\sigma_{ij})'u_{i,j}^a\mathrm{d}V = \\ &-\int_V (\sigma_{ij})'_{,j}u_i^a\mathrm{d}V - \int_V (\sigma_{ij})'e_{ij}(\mathbf{u}^a)\mathrm{d}V = \\ &-\int_V (\sigma_{ij,j})'u_i^a\mathrm{d}V - \int_V (\sigma_{ij})'e_{ij}(\mathbf{u}^a)\mathrm{d}V \end{aligned} \quad (30)$$

以及

$$\begin{aligned} \int_S (u_i)'T_i^a\mathrm{d}S &= \int_S \sigma_{ij}^a n_j (u_i)'\mathrm{d}V = \\ &\int_V [\sigma_{ij}^a(u_i)']_{,j}\mathrm{d}V = \\ &\int_V [\sigma_{ij,j}^a(u_i)'\mathrm{d}V + \sigma_{ij}^a(u_i)']_{,j}\mathrm{d}V = \\ &\int_V \sigma_{ij,j}^a(u_i)'\mathrm{d}V + \int_V \sigma_{ij}^a e_{ij}(\mathbf{u}')\mathrm{d}V = \\ &\int_V \sigma_{ij,j}^a(u_i)'\mathrm{d}V + \int_V \sigma_{ij}^a [e_{ij}(\mathbf{u}')]'\mathrm{d}V \end{aligned} \quad (31)$$

在以上推导中多次利用了应力和应变张量的对称性以及算符 $\partial/\partial x_i$ 和 $\partial/\partial b$ 的可交换特性.

有了上面的准备, 同时考虑到 u_i 以及 σ_{ij} 是外荷载 f_i 和 T_i^0 作用下真实的位移和应力, 式 (26) 可以简化为

$$\begin{aligned} &\int_V \{[C_{ijrs}(\sigma_{rs}^a + \sigma_{rs}^a) + e_{ij}^a] - e_{ij}^a\}(\sigma_{ij})'\mathrm{d}V + \\ &\int_V (\sigma_{ij,j}^a + f_i^a)(u_i)'\mathrm{d}V + \\ &\int_{S_u} (u_i^a - u_i^{a0})(T_i)'\mathrm{d}S_u - \int_{S_t} (T_i^a - T_i^{a0})(u_i)'\mathrm{d}S_t \end{aligned} \quad (32)$$

如果令伴随位移和伴随应力满足如下广义弱形式方程, 即对所有具有适当光滑性的任意 $\delta\sigma_{ij}$, δu_i 和 δT_i , u_i^a , σ_{ij}^a 和 T_i^a 满足

$$\begin{aligned} &\int_V \{[C_{ijrs}(\sigma_{rs}^a + \sigma_{rs}^a) + e_{ij}^a] - e_{ij}^a\}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \\ &\int_V (\sigma_{ij,j}^a + f_i^a)\delta u_i\mathrm{d}V + \\ &\int_{S_u} (u_i^a - u_i^{a0})(\delta T_i)\mathrm{d}S_u - \\ &\int_{S_t} (T_i^a - T_i^{a0})\delta u_i\mathrm{d}S_t = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

若假定当前设计区域, f_i^a , T_i^{a0} 以及 u_i^{a0} 等具有一定的光滑性, 则由椭圆型方程的基本性质, 知道 u_i^a , σ_{ij}^a 也将具有适当的光滑性. 在如上假设下, 对式 (33) 作分部积分并考虑到 $\delta\sigma_{ij}$, δu_i 的任意性, 可以得到 u_i^a 和 σ_{ij}^a 所应该满足的强形式控制方程为

$$\sigma_{ij,j}^a + f_i^a = 0, \quad \text{在 } V \text{ 内} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} [C_{ijrs}(\sigma_{rs}^a + \sigma_{rs}^a) + e_{ij}^a] &= e_{ij}^a = \\ (u_{i,j}^a + u_{j,i}^a)/2, &\quad \text{在 } V \text{ 内} \end{aligned} \quad (35)$$

$$u_i^a = u_i^{a0}, \text{ 在 } S_u \text{ 上} \quad (36)$$

$$T_i^a = T_i^{a0}, \text{ 在 } S_t \text{ 上} \quad (37)$$

可以看到, 这是一个在伴随结构上, 承受伴随外力、伴随初应变以及伴随初应力的弹性力学问题. 这里 u_i^a 是伴随位移, 而 σ_{ij}^a 为在 $f_i^a, T_i^{a0}, e_{ij}^{a0}$ 以及 σ_{rs}^{a0} 作用下的一个平衡许可应力场, 其定义式为式 (35). 采用文献中常用的提法, 我们称其为伴随应力场. 对此弹性力学问题, 可以采用有限元等数值技术对其进行离散求解, 从而得到伴随位移和伴随应力的近似值.

综合上面的讨论可以知道: 如果 W_{RR}^0 中的 u_i^a 和 σ_{ij}^a 由式 (34)~ 式 (37) 确定, 同时把式 (32) 中的 $(u_i)'$, $(\sigma_{ij})'$ 和 $(T_i)'$ 看作式 (33) 中的试探函数, 则有 $L_i^* = 0$. 可以证明 $L^* = \psi^*$, 所以进一步有: $L^* = \psi^* = L_e^*$.

考虑到在区域 V 上 $\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \nabla(\sigma_{ij,j} + f_i) = 0, C_{ijrs}\sigma_{rs} - e_{ij}(\mathbf{u}) = 0$ 以及 $\nabla[C_{ijrs}\sigma_{rs} - e_{ij}(\mathbf{u})] = 0$; 在 S_u 上 $u_i = u_i^0$, 在 S_t 上 $T_i = T_i^0$, 所以有

$$\begin{aligned} \psi^* = L_e^* &= \int_V G(dV)^* + \int_V G_{,b}dV + \\ &\int_V \{G_{,\sigma_{ij}}[\nabla\sigma_{ij} \cdot \mathbf{v}] + G_{,e_{ij}}[\nabla e_{ij}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}] + \\ &G_{,u_i}[\nabla(u_i) \cdot \mathbf{v}]\}dV + \int_{S_u} [g_{,u_i^0}(u_i^0)^* + g_{,b} + \\ &g_{,T_i}(\nabla(T_i) \cdot \mathbf{v})]dS_u + \int_{S_u} g(dS_u)^* + \\ &\int_{S_t} [h_{,T_i^0}(T_i^0)^* + h_{,b} + h_{,u_i}(\nabla(u_i) \cdot \mathbf{v})]dS_t + \\ &\int_{S_t} h(dS_t)^* + \int_V (f_i)'u_i^a dV + \\ &\int_{S_u} \nabla(u_i T_i^a) \cdot \mathbf{v}dS_u - \int_{S_u} (u_i^0)^* T_i^a dS_u - \\ &\int_{S_u} u_i^0 \nabla(T_i^a) \cdot \mathbf{v}dS_u - \int_{S_t} \nabla(T_i u_i^a) \cdot \mathbf{v}dS_t + \\ &\int_{S_t} (T_i^0)^* u_i^a dS_t + \int_{S_t} T_i^0 \nabla(u_i^a) \cdot \mathbf{v}dS_t \end{aligned} \quad (38)$$

这就是结构响应泛函对于设计变量的灵敏度显式表达.

在上述灵敏度分析变分原理的构建中, 与 Arora 的做法不同, 我们采用了由 Hellinger-Reissner 广义变分原理所诱导出的广义虚功等式作为增广项加入原目标泛函之中, 因此完满地解决了 Arora 原始推导中无法考虑在可动的指定位移边界上指定位移的物质导数不为零的情形. Arora 的推导途径以及所

得到的结论仅仅在特殊情形下才能成立.

3 结构响应泛函灵敏度各种表达式之间的关系

式 (38) 给出了结构响应泛函灵敏度的显式表达. 可以看到伴随位移和伴随内力仅仅出现在边界积分当中. 实际上通过适当的变形, 还可以得到许多等价的灵敏度表达式.

在式 (38) 中增加一个恒等于零的项

$$\left(\int_V \sigma_{ij,j} u_i^a dV \right)^* + \left(\int_V f_i u_i^a dV \right)^* \quad (39)$$

将式 (39) 中的两项分别作恒等变形, 有

$$\begin{aligned} \left(\int_V (\sigma_{ij,j} u_i^a dV) \right)^* &= \\ &\int_V -\sigma_{ij} e_{ij}^a (dV)^* + \int_V -(\sigma_{ij})' e_{ij}^a dV + \\ &\int_V -\sigma_{ij} (e_{ij}^a)' dV + \int_V -\nabla(\sigma_{ij} e_{ij}^a) \cdot \mathbf{v}dV + \\ &\int_{S_u} T_i u_i^{a0} (dS_u)^* + \int_{S_u} (T_i)' u_i^{a0} dS_u + \\ &\int_{S_u} u_i^{a0} \nabla(T_i) \cdot \mathbf{v}dS_u + \int_{S_u} T_i (u_i^{a0})' dS_u + \\ &\int_{S_u} T_i \nabla(u_i^{a0}) \cdot \mathbf{v}dS_u + \int_{S_t} T_i^0 u_i^a (dS_t)^* + \\ &\int_{S_t} (T_i^0)' u_i^a dS_t + \int_{S_t} u_i^a \nabla(T_i^0) \cdot \mathbf{v}dS_t + \\ &\int_{S_t} T_i^0 (u_i^a)' dS_t + \int_{S_t} T_i^0 \nabla(u_i^a) \cdot \mathbf{v}dS_t \end{aligned} \quad (40)$$

以及

$$\begin{aligned} \left(\int_V f_i u_i^a dV \right)^* &= \\ &\int_V f_i u_i^a (dV)^* + \int_V (f_i)' u_i^a dV + \\ &\int_V f_i (u_i^a)' dV + \int_V \nabla(f_i u_i^a) \cdot \mathbf{v}dV \end{aligned} \quad (41)$$

将式 (40) 与式 (41) 中相关的项合并略去相加之后等于零的项, 有

$$\begin{aligned} \psi^* = L_e^* &= \int_V (G - \sigma_{ij} e_{ij}^a + f_i u_i^a) (dV)^* + \\ &\int_V G_{,b}dV + \int_V [G_{,\sigma_{ij}}(\nabla e_{ij} \cdot \mathbf{v}) + G_{,e_{ij}}(\nabla e_{ij} \cdot \mathbf{v}) + \\ &G_{,u_i}(\nabla u_i \cdot \mathbf{v})]dV + \int_{S_u} g_{,u_i^0}(u_i^0)^* dS_u + \\ &\int_{S_u} g_{,b}dS_u + \int_{S_u} (g + T_i u_i^{a0})(dS_u)^* + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_u} g_{,T_i}(\nabla T_i \cdot \mathbf{v}) dS_u + \int_{S_t} h_{,(T_i^0)}(T_i^0)^\bullet dS_t + \\ & \int_{S_t} h_{,b} dS_t + \int_{S_t} (h + T_i^0 u_i^a)(dS_t)^\bullet + \\ & \int_{S_t} h_{,u_i}(\nabla u_i \cdot \mathbf{v}) dS_t - \int_V [\nabla(\sigma_{ij} e_{ij}^a) \cdot \mathbf{v}] dV + \\ & \int_V (f_i)^\bullet u_i^a dV + \int_V f_i(\nabla u_i^a \cdot \mathbf{v}) dV + \\ & \int_{S_u} u_i^{a0}(\nabla T_i \cdot \mathbf{v}) dS_u + \int_{S_t} T_i^0(\nabla u_i^a \cdot \mathbf{v}) dS_t + \\ & \int_{S_t} (T_i^0)^\bullet u_i^a dS_t + \int_{S_u} T_i \nabla(u_i^{a0}) \cdot \mathbf{v} dS_u \quad (42) \end{aligned}$$

文献 [7] 中的式 (60) 与这里的式 (42) 相比, $\int_{S_u} T_i(u_i^{a0})^\bullet dS_u$ 变成了 $\int_{S_u} T_i \nabla(u_i^{a0}) \cdot \mathbf{v} dS_u$, 同时多出了一项 $-\int_{S_u} (u_i^{a0})' T_i^a dS_u$. 这种差异正是由于文献 [7] 作者在其灵敏度分析变分原理的建立过程中, 因为没能够正确地考虑可动的指定位移边界上指定位移的物质导数不为零的情形所导致的. 显然仅仅在 $(u_i^{a0})' = 0$ 而且 $(u_i^0)' = 0$ 或者 $\int_{S_u} (u_i^0)' T_i^a dS_u = \int_{S_u} (u_i^{a0})' T_i dS_u$ 的情况下, 二者才是一致的.

如果在式 (38) 的基础上, 引入其它恒等于零的项, 如

$$\begin{aligned} & \int_V \nabla[(\sigma_{ij,j} + f_i)u_i^a] \cdot \mathbf{v} dV \\ & \int_V \nabla\{[C_{ijrs}\sigma_{rs} - e_{ij}(\mathbf{u})]\sigma_{ij}^a\} \cdot \mathbf{v} dV \\ & \int_{S_u} (u_i - u_i^0)T_i^a dS_u \\ & \int_{S_t} -(T_i - T_i^0)u_i^a dS_t \end{aligned}$$

等, 并对它们作适当的恒等变形, 还可以得到其它形式的结构响应泛函的灵敏度表达式. 这些表达式在理论上完全是等价的, 但在实际的数值计算中, 采用不同的表达式将得到不同精度的灵敏度分析结果. 此时可以根据问题的具体特点以及所采用的离散手段灵活地加以选用.

下面用一个简单的例子来说明在指定位移边界发生变化的情况下, 相关伴随位移场以及伴随应力场的具体形式.

考虑如图 1 所表示的各向同性的均匀细长杆件. 其横截面积为 A , 弹性模量为 E , 泊松比 $\nu = 0$, 所受力为零, 长度为 l . 左端固定不动, 右端受指定位移 $u_1^0(l, x_2, x_3) = \alpha l$, $u_2^0 = u_3^0 = 0$. 这里 α 为一

个无量纲参数. 取杆长 l 作为形状参数, 目标函数取为结构的应变能, 也就是

$$\psi = \int_A \left(\int_0^l \sigma : \mathbf{D} \mathbf{e} dx_1 / 2 \right) dA \quad (43)$$

这里 \mathbf{D} 代表四阶弹性张量. 下面用伴随法来计算 ψ 对于 l 的灵敏度.

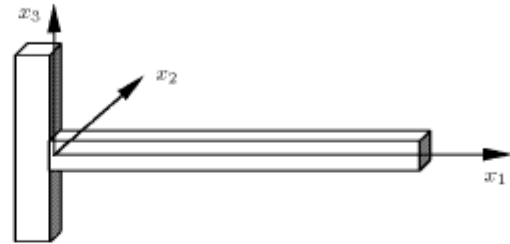


图 1 左端固定右端施加指定位移的均匀杆
Fig.1 A axial-loaded bar with clamped boundaries at both ends

简单计算表明结构的位移场为 $u_1(\mathbf{x}) = \alpha x_1$, $u_2(\mathbf{x}) = u_3(\mathbf{x}) = 0$. 所以 $e_{11}(\mathbf{x}) = \alpha$, $\sigma_{11}(\mathbf{x}) = E e_{11}(\mathbf{x}) = E \alpha$, 其余应变和应力分量都为零. 因此有

$$\psi = EA \alpha^2 l / 2 \quad (44)$$

而目标函数对于形状设计变量的导数为

$$d\psi/dl = EA \alpha^2 / 2 \quad (45)$$

下面采用伴随法求解 $d\psi/dl$. 注意到对于本例, $G = \sigma : \mathbf{D} \mathbf{e} / 2$, $g = h = 0$, 因此 $u_i^{a0} = 0$, $\sigma_{11}^{a0} = \partial G / \partial e_{11} = \sigma_{11}$, $e_{11}^{a0} = \partial G / \partial \sigma_{11} = e_{11} = \sigma_{11} / E$, 其余伴随初应力和伴随初应变分量都为零. 由式 (34)~式 (37), 可以得到相应的伴随位移场和伴随应力场为 $\mathbf{u}^a = \mathbf{0}$, $\sigma^a = -2\sigma$. 将它们代入式 (42), 并注意到 $G_b = G_{,u_i} = 0$, $g = h = 0$, S_t 上 $T_i^0 = (T_i^0)^\bullet = 0$, $(dS_u)^\bullet = 0$, $f_i = 0$ 以及 $\nabla e_{ij} = \mathbf{0}$, $e_{ij}^a = 0$; S_u 上 $\nabla(u_i^{a0}) = \mathbf{0}$, 有

$$d\psi/dl = \frac{1}{2} E \alpha^2 d(V)/dl = \frac{1}{2} E \alpha^2 d(Al)/dl = EA \alpha^2 / 2 \quad (46)$$

这与式 (45) 是完全一致的. 而且利用式 (38) 也可以得到同样的结果.

4 结 论

本文基于 Hellinger-Reissner 变分原理诱导出的广义虚功方程, 重新构建了基于连续体模型的伴随法灵敏度分析的变分原理. 采用这样的方法, 能够

以自洽的方式按系统的步骤得到确定伴随位移以及伴随应力的控制方程. 这种灵敏度分析变分原理的构建修正了以往文献中存在的错误, 为伴随法灵敏度分析的公式推导提供了新的框架.

参 考 文 献

- 1 Cea J. Problems of shape optimal design. In: Haug EJ, Cea J. eds. Optimization of Distributed Parameter Structures. Vol 2, Sijthoff & Noordhoff, 1981. 1005~1048
- 2 Haug EJ, Choi KK, Komkov K. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Orlando, Florida: Academic Press, 1986
- 3 Sokolowski K, Zolesio J. Introduction to Shape Optimization. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1992
- 4 Dems K, Haftka RT. Two approaches to sensitivity analysis for shape variation of structures. *Mechanics of Structures and Machines*, 1989, 16: 501~522
- 5 Cardoso JB, Arora JS. Variational method for design sensitivity analysis in nonlinear structural mechanics. *AIAA Journal*, 1988, 26: 595~603
- 6 Tsay JJ, Arora JS. Optimum design of nonlinear structures with path dependent response. *Structural Optimization*, 1989, 1: 183~208
- 7 Arora JS, Cardoso JB. Variational principle for shape design sensitivity analysis. *AIAA Journal*, 1992, 30: 538~547
- 8 Arora JS. An exposition of the material derivative approach for structural shape sensitivity analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1993, 105: 41~62

ADJOINT SHAPE SENSITIVITY ANALYSIS BASED ON GENERALIZED VARIATIONAL PRINCIPLE¹⁾

Guo Xu Gu Yuanxian Zhao Kang

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Variational principle for adjoint design sensitivity analysis was first developed by Arora. The original form of the principle is stated in terms of an augmented functional that is defined by adding to the response functional whose sensitivity is required, the weak form equilibrium equation of the primary problem. In the present paper, a new adjoint shape sensitivity analysis method for shape optimization of continuum structures is proposed. Based on the generalized variational principle, the shape variation of the displacement prescribed boundary and the associated derivatives of the prescribed boundary conditions is considered in a consistent way. The proposed method eliminates the limitation of Arora's method for dealing with the variations of Dirichlet boundaries and provides a new framework for shape sensitivity analysis. An analytical example illustrates the effectiveness and validity of the proposed approach.

Key words shape optimization, adjoint method, sensitivity analysis, generalized variational principle

Received 9 June 2003, revised 16 March 2004.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10102003, 10032030, 10225212, 10332010) and the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars State Education Ministry.